

TESE DE DOUTORAMENTO

# Modelización del flujo de un fluido viscoso en un tubo curvilíneo con paredes viscoelásticas

*Gonzalo Castiñeira Veiga*

ESCOLA DE DOUTORAMENTO EN CIENCIAS E TECNOLOXÍAS DA USC

PROGRAMA DE DOUTORAMENTO EN MÉTODOS MATEMÁTICOS  
E SIMULACIÓN NUMÉRICA EN ENXEÑARÍA E CIENCIAS APLICADAS

SANTIAGO DE COMPOSTELA

2018







## DECLARACIÓN DO AUTOR DA TESE

“Modelización del flujo de un fluido viscoso en un tubo curvilíneo  
con paredes viscoelásticas”

D. Gonzalo Castiñeira Veiga

presento a miña tese, seguindo o procedemento adecuado ao Regulamento, e declaro que:

1. A tese abarca os resultados da elaboración do meu traballo.
2. No seu caso, na tese faise referencia as colaboracións que tivo este traballo.
3. A tese é a versión definitiva presentada para a súa defensa e coincide ca versión enviada en formato electrónico.
4. Confirmo que a tese non incorre en ningún tipo de plaxio doutros autores nin de traballos presentados por min para a obtención doutros títulos.

En Santiago de Compostela, a 13 de setembro de 2018

Asdo. Gonzalo Castiñeira Veiga





## AUTORIZACIÓN DOS DIRECTORES DA TESE

“Modelización del flujo de un fluido viscoso en un tubo curvilíneo  
con paredes viscoelásticas”

D. José Manuel Rodríguez Seijo (director), D. Ángel Daniel Rodríguez Arós (director) e  
D. Juan Manuel Viaño Rey (titor)

INFORMAN:

que a presente tese correspóndese co traballo realizado por D. Gonzalo Castiñeira Veiga  
baixo a nosa dirección e titorización, que autorizamos a súa presentación considerando que  
reúne os requisitos esixidos no Regulamento de Estudos de Doutoramento da USC e que  
como directores e titor desta, non incorre nas causas de abstención establecidas na Lei  
40/2015.

En Santiago de Compostela, a 13 de setembro de 2018

Asdo. José Manuel Rodríguez Seijo

Asdo. Ángel Daniel Rodríguez Arós

Asdo. Juan Manuel Viaño Rey



*“El razonamiento matemático puede considerarse como el ejercicio de dos instalaciones, que podemos llamar la intuición y el ingenio”*

Alan Mathison Turing (1912-1954)

*“Es imposible ser matemático sin ser un poeta del alma”*

Sofia Vasilyevna Kovalévskaya (1850-1891)





# Agradecimientos

Las siguientes páginas de esta memoria reflejan el fruto del trabajo durante mi etapa como doctorando en la Universidad de Santiago de Compostela. Para su conclusión, ha sido indispensable el apoyo y esfuerzo de numerosas personas que me han ayudado no solo a crecer académicamente, sino también a nivel personal.

Quiero expresar mi total gratitud a mis directores de tesis, José M. Rodríguez Seijo y Ángel D. Rodríguez Arós, por el trabajo, dedicación, entusiasmo y motivación que siempre me han transmitido a lo largo de estos años y gracias a los cuales este trabajo ha sido posible. También me gustaría agradecer a Juan M. Viaño, por haber confiado en mí y haberme dado la oportunidad de participar en este proyecto. También gracias a Eduard Marušić Paloka (*Hvala!*), a Miguel Á. Fernández (*Merci!*) y a sus respectivos departamentos por haberme acogido en sus centros durante mis estancias de investigación y haberme ofrecido su tiempo de forma desinteresada para concluir algunos aspectos relevantes de este trabajo.

También me gustaría dar las gracias a Alfredo Bermúdez y a Rafael Muñoz, por acompañarme en mis primeros pasos como docente y que, sin duda, han despertado en mí una nueva vocación. En particular, me gustaría agradecer a mi mentor de prácticas de Modelización Matemática, Rafa, por su dedicación y entusiasmo, no solo en la docencia de la asignatura, sino también en la discusión de algunos problemas relacionados con la tesis y cuyos comentarios han sido de gran utilidad. Tampoco quiero olvidarme de mis compañeros y compañeras del departamento de Matemática Aplicada, en especial a Patricia, Carmen, Dolores, Elena, Pilar Mato, Elisa, Carlos y Manolo, por su cariño y gran ayuda durante estos años de tesis. Muchas gracias.

Esta tesis no hubiese sido posible sin el apoyo incondicional de muchas personas que cada día me hacían recordar que esto era posible. Por un lado, muchas gracias a mi familia a la cual le debo todo. A mi madre y a mi padre, les agradezco todo su cariño con el cual cada paso en mi tesis ha sido un poco menos difícil y, sobre todo, les agradezco su esfuerzo, gracias al cual he podido llegar hasta aquí. A mi hermana Verónica, le debo ser la persona que soy hoy en día. Ella es para mí, un ejemplo de esfuerzo, motivación y superación. Muchas gracias por tu apoyo y afecto en todo momento. Como familia hemos realizado ya un largo recorrido juntos y en estos últimos años hemos demostrado que podemos superar cualquier obstáculo siempre unidos. Os quiero. También quiero agradecer al resto de miembros de mi gran familia. Mención especial a Berto, a Cris y a David, por su cariño y apoyo.

Por otro lado, quiero dar las gracias a esa otra familia, la que se escoge. Gracias por

haber compartido conmigo mis buenos y malos momentos, por haber estado siempre ahí y haberme acompañado en esta gran aventura. En particular, gracias a Araceli (definición de amistad desde el inicio de nuestros tiempos), a Taty (mi hermanita siempre), a Patri (por su cariño y su *alter ego*), a Miguel y a Paula (gracias por las noches antiestrés de Catán). También gracias a Lore, a Jose, a Iria, a mis chicas de Samieira y Raxó y a Ignito. Tampoco puedo olvidarme de la familia “Frozen” (como buen ganador de *la Copa de las Casas*) y tod@s los nuev@s amig@s que he tenido el placer de conocer en las estancias, por las visitas y los futuros encuentros internacionales. En especial gracias a Lorena, Lena, Max, Khrys, Berat y Ceyhun, por haber sido para mí una verdadera familia.

También muchas gracias a mis bailarines y bailarinas favoritos de la escuela *Mandala*. Me habéis acompañado en cada paso de esta tesis doctoral, haciendo del baile una vía de escape para mi mente, una terapia natural y un lugar donde expresar todos los sentimientos que uno lleva dentro. No olvidaré esa sensación de estar encima de un escenario, delante de cientos de personas, compartir miradas, sentimientos y nervios; sensaciones que espero poder volver a repetir. Gracias Bea por cada clase, donde cada día lograbas que yo fuera un poco más yo. Gracias a tod@s.

Entre mis amistades, me gustaría hacer una mención especial a dos personas que han dado brillo y luz especialmente a estos años de tesis; ellas son Seila y Andrea. Gracias por los paseos, las cenas, las quedadas, los tupperes, las escapadas, las visitas, las risas, los llantos, más risas... Sin duda, habéis sido piezas clave de mi vida, por las cuales cada semana de tesis se hacía un poco más dulce, gracias a las verduritas y a vuestro cariño. Gracias por haberme hecho crecer como persona, os quiero mucho.

También quiero dar las gracias a l@s matemátic@s Irene, Cris, Marta, Cintia y Néstor, mis licenciadísimos. Gracias por cada momento santiagués compartido, por los “buenos días” cada mañana, por protagonizar algunos de los mejores momentos de mi vida y por el cariño incondicional desde cada punto de Europa. Habéis sido y sois para mí, fuente de inspiración constante y ocupáis un gran espacio en mi corazón. Juntos hemos pasado por algunos de los momentos más difíciles de nuestras vidas, pero que, sin duda, nos han unido aún más. Por ello, me gustaría enviarte a ti, Laura, un beso enorme allá donde estés, pues sigues siendo parte de nosotr@s. Te queremos.

Gracias también a mis compañer@s de sala en la facultad de matemáticas. Sin duda, este último año de tesis doctoral no hubiese sido lo mismo sin vuestro cariño, nuestros “debates”, frases de pizarra y risas, sobre todo risas. Por ello, gracias en especial a Aida, Maribel, Pilar, Víctor y Jorge, por este último empujón hacia la línea de meta que ha sido la conclusión de este trabajo.

Dicen que detrás de cada tesis hay una persona importante que merecería una mención especial. Si bien en mi caso muchos son los nombres que destacaría por su apoyo durante este trabajo, sí existe una persona especial sin la cual nada hubiese sido lo mismo. Una persona que me ha acompañado a 2,767.28 km de distancia en cada paso de mi vida predoctoral. Gracias por tu apoyo incondicional en los buenos y malos momentos, tu cariño y sobre todo, tu paciencia. Gracias por saber escucharme en los momentos de estrés, por apoyarme en todas mis decisiones y también por tus abrazos cuando más los necesitaba. *Ačių Lukas, aš tave myliu labai.*



Durante la realización de esta tesis, he recibido la siguiente financiación del Ministerio de Economía y Competitividad con la colaboración de FEDER:

- Contrato predoctoral para la formación de doctores BES-2013-066399.
- Proyectos de investigación MTM2012-36452-C02-01 y MTM2016-78718-P.





# Índice general

Resumen	xvi
Summary	xix
Introducción	xxi
<b>I Análisis asintótico de un fluido viscoso en una tubería curva con paredes en movimiento</b>	<b>1</b>
Introducción a la Parte I	3
<b>1. Análisis asintótico formal</b>	<b>7</b>
1.1. Problema de un fluido viscoso en una tubería deformable curva . . . . .	8
1.2. Problema escalado en el dominio de referencia . . . . .	13
1.2.1. Cálculo del Jacobiano de la aplicación inversa del cambio de variable	13
1.2.2. Ecuaciones en el dominio de referencia . . . . .	17
1.3. Análisis asintótico formal . . . . .	19
1.4. Comportamiento de la pared de la tubería . . . . .	36
1.5. Algunos ejemplos numéricos . . . . .	37
<b>2. Correctores de capa límite</b>	<b>41</b>
2.1. Condiciones de contorno en los extremos y condición inicial . . . . .	42
2.2. Resultados preliminares . . . . .	47
2.2.1. Problema de Leray . . . . .	48
2.2.2. Problema de Leray modificado . . . . .	55
2.3. Corrector de capa límite en espacio . . . . .	59
<b>3. Estimaciones del error</b>	<b>79</b>
3.1. Resultados preliminares . . . . .	80
3.2. Estimaciones del error . . . . .	88

<b>II</b>	<b>Análisis asintótico de láminas viscoelásticas</b>	<b>107</b>
	<b>Introducción a la Parte II</b>	<b>109</b>
<b>4.</b>	<b>Análisis asintótico formal</b>	<b>113</b>
4.1.	Problema tridimensional de una lámina viscoelástica . . . . .	114
4.2.	Problema escalado de una lámina viscoelástica . . . . .	120
4.3.	Resultados preliminares . . . . .	125
4.4.	Análisis asintótico formal . . . . .	134
<b>5.</b>	<b>Membrana elíptica viscoelástica</b>	<b>151</b>
5.1.	Resultados preliminares . . . . .	152
5.2.	Ecuaciones de una membrana elíptica viscoelástica . . . . .	156
5.3.	Resultados de convergencia cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ . . . . .	159
<b>6.</b>	<b>Membrana generalizada viscoelástica</b>	<b>185</b>
6.1.	Resultados preliminares . . . . .	186
6.2.	Espacios de completación y fuerzas admisibles . . . . .	194
6.3.	Resultados de convergencia cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ . . . . .	202
<b>7.</b>	<b>Lámina flexural viscoelástica</b>	<b>225</b>
7.1.	Ecuaciones de una lámina flexural viscoelástica . . . . .	226
7.2.	Resultados de convergencia cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ . . . . .	228
<b>8.</b>	<b>Problema dinámico de una lámina viscoelástica</b>	<b>251</b>
8.1.	Problema dinámico para una lámina viscoelástica . . . . .	252
8.2.	Resultados preliminares . . . . .	254
8.3.	Análisis asintótico formal . . . . .	261
<b>III</b>	<b>Modelo acoplado</b>	<b>267</b>
	<b>Introducción a la Parte III</b>	<b>269</b>
<b>9.</b>	<b>Modelos acoplados</b>	<b>273</b>
9.1.	Modelo acoplado con una ley de pared viscoelástica . . . . .	273
9.2.	Modelo acoplado con una ley de pared elástica algebraica . . . . .	278
9.2.1.	Modelo unidimensional . . . . .	279
9.2.2.	Resolución numérica . . . . .	280
	<b>Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>287</b>
	<b>Conclusions and future work</b>	<b>291</b>

<b>Apéndice A. Cálculo detallado de algunos términos identificados en el Teorema 1.3.5</b>	<b>295</b>
A.1. Cálculo de $\mathbf{U}^1$ y $p^2$ . . . . .	295
A.2. Cálculo de $\mathbf{U}^2$ y $p^3$ . . . . .	297
<b>Bibliografía</b>	<b>303</b>
<b>Índice alfabético</b>	<b>314</b>





# Resumen

En este trabajo se proponen y justifican modelos relacionados con el problema del flujo de un fluido viscoso en el interior de una tubería curva con paredes viscoelásticas, mediante el uso de métodos asintóticos. Para tal fin, se divide la memoria en tres partes.

En la primera parte abordamos el problema del fluido viscoso en una tubería curva con paredes en movimiento. Para modelar el fluido consideramos las ecuaciones de Navier-Stokes en un dominio variable en el tiempo y que depende de un parámetro pequeño adimensional que mide la razón entre el radio de la sección transversal de la tubería y la longitud de la misma. Mediante la definición de una aplicación de referencia, obtenemos las ecuaciones del problema en un dominio independiente del parámetro pequeño y del tiempo. A continuación, asumimos que las incógnitas del problema pueden expresarse como un desarrollo en serie de potencias del pequeño parámetro que, tras su sustitución en las ecuaciones en el dominio de referencia, permite caracterizar algunos de sus términos. Así, identificamos que el término principal del desarrollo asintótico de la velocidad describe un flujo de Poiseuille, obtenemos la relación entre el flujo y los parámetros de curvatura y torsión de la línea media, y detectamos los efectos de la fuerza centrífuga en el interior de la tubería sobre el flujo secundario.

A continuación, añadimos correctores a la aproximación asintótica para tener en cuenta el fenómeno de capa límite. Estos correctores son solución de problemas de tipo Leray en bandas infinitas, de los cuales aseguramos que tienen al menos una solución que decae exponencialmente cuando la componente axial tiende a infinito. Con el objetivo de deducir estimaciones *a priori* del error entre la solución exacta y la aproximada, obtenemos una desigualdad de tipo Poincaré adecuada para la condición de contorno del problema y estudiamos estimaciones para soluciones de problemas de valor en la frontera. Así, bajo ciertas hipótesis de regularidad, obtenemos estimaciones del error relativo que justifican matemáticamente el modelo propuesto.

En la segunda parte de la memoria, abordamos el problema de la deformación de las paredes viscoelásticas de una tubería compuesta por un material viscoelástico bajo la acción de fuerzas externas. Para ello aplicamos el análisis asintótico a láminas viscoelásticas cuyo espesor depende de un parámetro pequeño. Comenzamos con el caso cuasiestático del problema tridimensional considerando una lámina cuya ley constitutiva viscoelástica presenta un término de memoria corta (de tipo Kelvin-Voigt). Mediante técnicas de análisis asintótico se deduce que, en el límite, las láminas viscoelásticas se describen mediante ecuaciones bidimensionales que presentan un término de memoria larga, representado por

una integral con respecto al tiempo, que tiene en cuenta los estados de deformación previos. Además, incluimos resultados de existencia y unicidad de solución para los problemas tridimensionales y bidimensionales expuestos. Al igual que ocurre en el caso elástico, cuyo estudio se encuentra en la literatura, las ecuaciones bidimensionales se dividen en tres grupos dependiendo de la geometría de la superficie media de la lámina y el conjunto donde se considera la condición de contorno de fijación. Así, se pueden distinguir las ecuaciones de una membrana elíptica, membrana generalizada y lámina flexural viscoelásticas. Estos modelos son justificados mediante teoremas de convergencia fuerte en espacios de Bochner-Sobolev. Posteriormente, realizamos un análisis formal del problema dinámico de una lámina viscoelástica, identificando las ecuaciones dinámicas bidimensionales para una membrana viscoelástica. También en este caso incluimos resultados de existencia y unicidad de solución de los problemas expuestos.

En la tercera parte de la memoria, abordamos la formulación del problema acoplado del flujo de un fluido viscoso en el interior de un tubo con paredes móviles, aunando para ello los resultados desarrollados en este trabajo. Por un lado, consideramos que las paredes están formadas por un material viscoelástico, proponemos el modelo reducido correspondiente e indicamos algunas líneas del trabajo futuro. Por otro lado, para mostrar el buen comportamiento del modelo del fluido, consideramos una ley constitutiva algebraica elástica para las paredes de la tubería, de forma que podemos resolver el problema numérico y mostrar algunos ejemplos para diferentes geometrías.

Para finalizar, expondremos algunas conclusiones y propuestas de trabajo futuro.





# Summary

In this work we propose and justify models related with the problem of the viscous incompressible fluid flow inside a curved pipe with viscoelastic walls by using asymptotic methods. To that end, the memory is divided into three parts.

In the first part we study the problem of the viscous fluid moving inside a curved pipe whose wall is deformable. In order to study the fluid problem we consider the Navier-Stokes equations in a time dependent domain that depends on a small non-dimensional parameter, which measures the ratio between the radius of the cross section of the pipe and its length. Defining a reference mapping, we obtain the equations of the problem posed in a domain independent of the small parameter and time. Then, we assume that the unknowns of the problem can be expressed as an asymptotic expansion in terms of the small parameter which, upon substitution in the equations defined in the reference domain, leads us to characterize some of their terms. Thus, we identify that the leading term of the asymptotic expansion of the velocity describes a Poiseuille flow, we obtain the relation between the flow and the curvature and torsion of the middle line, and we detect the effects of the centrifugal force inside the pipe over the secondary flow.

Next we add correctors to the asymptotic approximation in order to take into account the boundary layer phenomena. These correctors are solution of Leray's type problems defined over semi-infinite strips, for which we ensure the existence of at least one solution that has an exponential decay when the axial component tends to infinity. With the aim of deriving *a priori* error estimates between the exact solution and the asymptotic approach, we obtain a Poincaré's type inequality taking into account the boundary condition of the problem and we study estimations for solutions of boundary value problems. Thus, under certain hypothesis on the regularity of the solution, we obtain relative error estimates which mathematically justify the model proposed.

In the second part of this memory, we study the problem of the viscoelastic wall's deformation under the effects of external forces. To this end, we apply the asymptotic method to a family of viscoelastic shells whose thickness depends on a small parameter. We start the study considering the three-dimensional quasi-static problem of a shell whose constitutive law presents a short term memory (Kelvin-Voigt type). By using arguments of asymptotic analysis we deduce that, in the limit, the viscoelastic shells are described through two-dimensional equations which present a long term memory, represented by an integral with respect to the time variable, that takes into account the previous states of deformation. Besides, we include results of existence and uniqueness of solution of the

three-dimensional and two-dimensional problems presented. As it happens in the elastic case, whose study is available in the literature, the two-dimensional equations are divided in three groups depending on the geometry of the middle surface of the shell and the set where the boundary condition of position is considered. Thus, we distinguish the viscoelastic elliptic membrane, generalized membrane and flexural shell equations. These models are justified with strong convergence theorems in Bochner-Sobolev spaces. Then, we perform an asymptotic analysis of the dynamic problem of a viscoelastic shell, identifying the dynamic equations of a viscoelastic membrane. Also in this case, we include results of existence and uniqueness of solution for the problems.

In the third part of this memory, we study the formulation of the coupled problem of the viscous fluid flow inside a pipe with deformable walls, combining the results developed in this work. On one hand, we consider that the wall's pipe is made of a viscoelastic material, we propose the corresponding reduced model and we indicate some steps of the future work. On the other hand, in order to show the good behaviour of the fluid model, we consider an algebraic elastic law for the wall of the pipe, so that we can solve the numerical problem and present some examples for different geometries.

Finally, we summarize some conclusions and proposals for future work.



# Introducción

Las Matemáticas en general y la Matemática Aplicada en particular, han sido y son una herramienta muy útil a la hora de estudiar diferentes problemas en numerosos campos del conocimiento. Aunque históricamente su uso ha sido muy destacado en física y en ingeniería, cada vez son utilizadas en un mayor número de áreas. Quizás uno de los campos de aplicación más reciente e interesante sea el de la biomedicina. A día de hoy, todavía existen muchos problemas relacionados con el cuerpo humano que se abordan mediante técnicas no muy precisas o simplemente mediante la experimentación del caso particular. En algunos de esos casos, las técnicas utilizadas son invasivas, lo que puede acarrear riesgos al paciente. Este tipo de técnicas son más complicadas en problemas relacionados con el sistema cardiovascular. Por ejemplo, ante la presencia de un aneurisma (hipertrofia de un vaso sanguíneo del sistema circulatorio) el tratamiento consiste en la visualización de la inflamación en cuestión y, mediante técnicas estadísticas basadas en el tamaño de la misma, el profesional toma la decisión de intervenir o no al paciente. En muchas ocasiones, la complejidad de la operación y el desconocimiento real del comportamiento de la aneurisma tiene consecuencias nefastas. Algunas de estas dificultades podrían superarse de conocer un modelo matemático que predijese de forma eficiente y veraz el comportamiento del flujo en los vasos sanguíneos (véase, por ejemplo, el Capítulo 11 en [79]).

En 1775 Euler fue un pionero al proponer un modelo matemático unidimensional para predecir el comportamiento del flujo sanguíneo en el sistema circulatorio (véase [25]). Si bien muchas de las características que posee el flujo sanguíneo fueron halladas con posterioridad, su trabajo inició una línea de investigación que dio lugar a numerosos estudios en dinámica de fluidos, algunos de los cuales citaremos en esta introducción. La obtención de modelos para el sistema circulatorio podría ser clave para el tratamiento o la detección de patologías, como zonas de mayor erosión, deposición de partículas u obstrucciones en las venas y arterias.

En las últimas décadas muchos autores, como puede comprobarse en [17, 41, 53–55, 81, 112, 120, 126, 128, 130, 131, 143, 151, 160, 161, 164, 165], han dedicado sus trabajos a la obtención de modelos para el sistema circulatorio, mediante el estudio del flujo sanguíneo en venas y arterias cuyo material biológico es flexible. Destacan también, los trabajos que estudian este tipo de modelos con aplicaciones en hemodinámica cerebral como en [122, 149], el sistema linfático en [90] o más recientemente la importancia de la circulación en vasos auditivos en [154]. También debemos destacar otros sectores del campo de la industria y la ingeniería donde estos modelos pueden ser muy útiles. Por ejemplo, podrían

modelar el flujo de un fluido a través de una cañería de una red hidráulica, mangueras y conductos, entre otros (véase por ejemplo, [101]). Este tipo de modelos son de gran utilidad, por ejemplo, a la hora de estudiar los sistemas de refrigeración. En particular, en estos problemas es muy importante conocer el tiempo de residencia del fluido, que está estrechamente relacionado con el denominado flujo secundario en las secciones transversales de la tubería. Cuanto mayor sea el tiempo de residencia mayor será la transferencia de calor, por lo que poder predecir esta característica es crucial en el ejemplo mencionado.

A la hora de modelar este tipo de problemas, podemos identificar dos partes bien diferenciadas en el estudio. Por un lado, debemos analizar el comportamiento de un fluido viscoso e incompresible a través de tuberías curvas con paredes móviles. Por otro lado, debemos estudiar el comportamiento del movimiento de una pared de pequeño espesor que, por tanto, puede ser modelada por las ecuaciones de una lámina. Además, consideraremos que la pared está formada por un material viscoelástico como, por ejemplo, podría ser modelada la pared de un vaso sanguíneo (véanse [55, 79]). Una vez identificados ambos modelos, tendremos que acoplarlos para estudiar el efecto que uno provoca sobre el otro. Por una parte, el modelo del fluido necesitará como dato el radio de la tubería, que vendrá dado en función del desplazamiento de la lámina. Por otra parte, el movimiento de la pared se producirá por el efecto de la densidad de fuerzas aplicadas por lo que, en este caso, se deberá conocer la presión que el fluido ejerce sobre las paredes de la tubería. Este tipo de acoplamiento se conoce como problema de interacción de fluido-estructura (denotados en inglés por *FSI problems*) el cual se configura como el más adecuado para abordar este tipo de estudios. A pesar del gran avance tecnológico de los últimos años, la simulación numérica de estos problemas no es sencilla debido a su elevado coste computacional y a problemas de estabilidad numérica. Por ello, es necesaria la obtención de nuevos modelos reducidos, bien justificados matemáticamente, que puedan utilizarse en lugar de los modelos tridimensionales correspondientes.

En esa dirección, observamos que en los dos problemas identificados se detecta una característica común: la diferencia de magnitudes en las dimensiones del dominio. En el primer caso, el flujo viscoso en una tubería curvilínea, el radio del dominio tubular será muy pequeño en comparación con la longitud. En el segundo problema, el movimiento de las paredes, el espesor de las mismas es de magnitud mucho menor en comparación con la superficie. Esta característica ha llevado a numerosos autores a la utilización de métodos especialmente útiles para problemas dependientes de un parámetro pequeño: los métodos asintóticos. Uno de los trabajos pioneros en el cual se dota de una robusta base matemática de esta técnica aparece en 1973 en [88], donde se engloba dentro de los problemas denominados de perturbación singular. Los modelos reducidos obtenidos mediante los métodos asintóticos deben justificarse matemáticamente para confirmar su validez. Esto se puede realizar a través de resultados de convergencia y mediante estimaciones del error entre la aproximación asintótica y la solución exacta del problema.

Debido a los diferentes problemas identificados en la motivación de este trabajo, dividiremos esta memoria en tres partes. En la Parte I, empezaremos analizando el primer problema planteado: el flujo de un fluido viscoso a través de una tubería curvilínea con paredes flexibles. Actualmente, existen numerosos estudios de flujos viscosos a través de

tuberías. En particular, W. Dean, en sus trabajos de los años 20 [42, 43], fue el primero en plantear lo que más tarde se denominaría como métodos asintóticos en tuberías curvas, donde el radio de curvatura es mayor que la magnitud de la sección transversal. Su trabajo sirvió de inspiración para el desarrollo de nuevos modelos en tuberías curvas que permitían identificar características importantes como el flujo secundario (véanse, por ejemplo, [62, 66, 78, 93, 145, 163]). Además, en la literatura se pueden encontrar estudios donde el comportamiento del flujo en la tubería se relaciona directamente con la curvatura y torsión de la línea media de la misma, como por ejemplo en [64–66, 92, 98, 100, 101, 110, 111, 148]. En [64], mediante el uso de métodos asintóticos, se compara el término principal del desarrollo propuesto con un flujo de Poiseuille en el interior de una tubería con paredes rígidas. También en [98], se realiza un análisis asintótico en un dominio similar, identificando los efectos de la curvatura y la torsión en el flujo y aportando estimaciones del error entre la solución exacta y la aproximada. En ese trabajo se identifica un problema común en los estudios asintóticos conocido como el fenómeno de capa límite. Con respecto al estudio del problema no estacionario, encontramos la primera referencia en 1970 en [93], donde se analiza el flujo secundario producido en las secciones transversales de la tubería en función del llamado número de Dean. En [132] también se utiliza este número y se analiza el comportamiento cerca de las paredes, donde se produce el fenómeno de capa límite. Más recientemente, en [114, 115], se ha considerado el caso no estacionario en estructuras de tipo tubular y se obtienen las estimaciones del error correspondientes. Por último, también podemos destacar algunos trabajos donde se analiza el comportamiento del flujo en dominios con paredes en movimiento. En [117] se considera un fluido en el interior de un canal con paredes elásticas, dando lugar a un problema de interacción de fluido-estructura que se estudia mediante el método asintótico. El modelo presentado se justifica matemáticamente en [119], donde se estudia el problema acoplado entre el movimiento de un fluido viscoso y una placa. Utilizando las mismas técnicas, los autores consideran en [118] un dominio tubular rectilíneo donde el desplazamiento de la pared se describe utilizando las ecuaciones de Koiter. En [120] generalizan sus resultados previos considerando el caso no estacionario y una ley de pared elástica para una tubería cilíndrica. Más recientemente, en [121], se realiza un análisis asintótico con estimaciones del error del problema de interacción de fluido-estructura en una tubería cilíndrica elástica cuya densidad y módulo de Young dependen del parámetro pequeño que mide el ratio del radio de la sección transversal de la tubería y el espesor de las paredes de la misma.

En el presente estudio, siguiendo el trabajo de [98], presentaremos un modelo transitorio para el flujo de un fluido viscoso en el interior de una tubería curvilínea con paredes flexibles. Además, identificaremos el flujo secundario en la sección transversal de nuestra tubería y representaremos los perfiles de velocidad hasta el orden dos del desarrollo asintótico propuesto. Con respecto a los términos de presión presentes en nuestras ecuaciones, obtendremos un conjunto de problemas en derivadas parciales que deberán ser completados con una ley de pared adecuada. Esto quiere decir que el modelo que propondremos se obtendrá asumiendo conocido el desplazamiento de la pared del dominio, y que posteriormente será determinado a partir de la ley de pared correspondiente al caso de interés. Después, obtendremos los correctores necesarios para tener en cuenta el fenómeno de capa



límite que surge en el problema. Finalmente, justificaremos el modelo matemáticamente mediante estimaciones *a priori* del error entre la solución exacta del problema y la solución asintótica aproximada.

Como hemos comentado anteriormente, existen trabajos donde se aborda con detalle el problema del flujo sanguíneo. En [54], se propone un modelo unidimensional y además se destacan algunos procedimientos clínicos donde este modelo podría ser utilizado. Encontramos otro modelo del flujo sanguíneo en arterias en [126], donde el pulso sanguíneo y los patrones del flujo son relacionados, y se destaca como este tipo de modelos pueden ayudar a la hora de diseñar tratamientos para dolencias particulares. En el estudio planteado en [55] para el modelado del flujo sanguíneo se comentan las dificultades para modelar el comportamiento de los tejidos de los vasos sanguíneos. A pesar de que los autores proponen un modelo unidimensional para el problema, también sugieren la posibilidad de considerar modelos bidimensionales con una descripción de tipo lámina y una ley constitutiva viscoelástica. Por este motivo abordaremos en la Parte II de esta memoria el segundo problema planteado (estudio del movimiento de las paredes de la tubería curvilínea) mediante el análisis asintótico de láminas viscoelásticas. Para seguir un orden adecuado en el estudio, comenzaremos considerando el análisis asintótico del caso cuasiestático, para luego dar los primeros pasos del caso dinámico.

Precisamente, es en mecánica de sólidos donde se obtienen los primeros resultados aplicados del análisis asintótico, en particular, en la teoría de la flexión de placas (véanse [31, 45]) y algunos años más tarde en la teoría de vigas (véanse [5, 159]). Con respecto a las láminas, los modelos que utilizaremos para el problema del movimiento de la pared de la tubería, se publican más de una década más tarde los trabajos asintóticos sobre láminas lineales elásticas [33, 36]. En ellos se presenta la existencia y unicidad de las ecuaciones bidimensionales de láminas membranas elípticas deducidas mediante los métodos asintóticos y se justifican con resultados de convergencia. Más tarde en [30], se presenta una completa teoría sobre láminas elásticas (lineales y no lineales), donde se justifican los modelos bidimensionales para las denominadas membranas elípticas, membranas generalizadas y láminas flexurales. Esta referencia presenta una descripción detallada del procedimiento asintótico que conduce a los correspondientes conjuntos de ecuaciones bidimensionales. Por otra parte, años más tarde y basándose en los estudios presentados en esta referencia, aparecen los modelos dinámicos correspondientes en [85–87], donde también se justifican las ecuaciones dinámicas para las láminas membranas, flexurales y de Koiter.

El problema motivador de este estudio es solo uno de los muchos problemas reales que han hecho necesaria la introducción de modelos que puedan tener en cuenta efectos como la memoria y el endurecimiento, cualidades que pueden ser descritas en el campo de la viscoelasticidad, cuya teoría podemos encontrar detallada en [48, 83, 127]. Numerosos autores han contribuido al conocimiento actual de este tipo de problemas, proporcionando nuevos resultados y modelos justificados. De hecho, podemos encontrar en la literatura como [69, 71, 106, 138] (y en las referencias disponibles en ellos), una gran variedad de problemas planteados para materiales viscoelásticos. En el caso de las láminas viscoelásticas, existe un conjunto de resultados más limitado. Por ejemplo, en [10] los autores presentan un modelo para un problema dinámico de contacto donde se considera un material viscoe-

lástico de memoria corta (de tipo Kelvin-Voigt). En [56–58] se utiliza el análisis asintótico para estudiar una familia de láminas de un material con una ley constitutiva que presenta un término de memoria larga y, además, se justifican con resultados de convergencia las ecuaciones límite de membranas, láminas flexurales y de Koiter.

Como veremos en la segunda parte de este trabajo, siguiendo el estudio realizado en [30], presentaremos el análisis asintótico de una familia de láminas viscoelásticas cuya ley constitutiva presenta un término de memoria corta (de tipo Kelvin-Voigt), representado por una derivada con respecto al tiempo, del cual deduciremos nuevos modelos límite bidimensionales (láminas membrana, generalizadas y flexurales) que presentan un término de memoria larga representado por una integral en la variable temporal. Además, demostraremos la existencia y unicidad de los problemas presentados y comentaremos su interpretación física. Los modelos obtenidos serán justificados matemáticamente mediante teoremas de convergencia. Una vez finalizado el estudio del caso cuasiestático estaremos en condiciones de realizar un análisis asintótico formal del problema dinámico de láminas viscoelásticas. Las ecuaciones aquí deducidas se utilizarán para modelar el comportamiento de la pared viscoelástica de la tubería curva del problema motivador de esta memoria.

Una vez estudiados los problemas para el fluido viscoso en el interior de la tubería curva con paredes flexibles (Parte I) y para la lámina viscoelástica (Parte II), procederemos en la Parte III al acoplamiento de los mismos. De esta forma expondremos dos modelos formales acoplados que modelan el flujo viscoso en tuberías curvas con paredes en movimiento. Por un lado, consideraremos un modelo acoplado resultante de combinar la aproximación asintótica del problema del fluido obtenida en la Parte I y el modelo bidimensional dinámico de una lámina viscoelástica identificado en la Parte II. Comentaremos como se produce el acoplamiento entre ambos modelos y cuales serían los siguientes pasos a realizar en el estudio. Por otro lado, como ejemplo del buen comportamiento del modelo asintótico del fluido, consideraremos que la pared de la tubería curva esta formada por un material elástico cuya ley de pared se describe a través de una ecuación algebraica que relaciona el radio de la tubería y la presión. Presentaremos el modelo unidimensional resultante y algunos ejemplos numéricos obtenidos para este acoplamiento.

Finalmente, terminaremos la redacción de esta memoria exponiendo algunas conclusiones obtenidas a partir del estudio realizado y comentaremos algunas ideas sobre el trabajo que se puede abordar en el futuro tomando como punto de partida el presentado aquí.

Los resultados obtenidos en esta memoria han dado lugar a la preparación de los artículos [18–24] de los cuales algunos se encuentran actualmente publicados.





## Parte I

# Análisis asintótico de un fluido viscoso en una tubería curva con paredes en movimiento





# Introducción a la Parte I

En el campo de la dinámica de fluidos, el estudio de flujos en canales y tuberías ha destacado enormemente debido a su gran número de aplicaciones en campos como la industria, ingeniería o, más recientemente, la biomedicina. Como hemos mencionado al inicio de esta memoria, uno de los campos donde más destacan este tipo de modelos es en el de la biomedicina, por su capacidad de predecir el comportamiento del flujo sanguíneo en el sistema circulatorio.

Los primeros estudios pioneros del flujo estacionario en tuberías curvas se presentan en [42, 43], donde el autor realiza un análisis sobre el flujo desarrollado en una tubería cuyo radio de curvatura es mucho mayor que su sección transversal y donde estudia el efecto del gradiente de presiones en el flujo. Siguiendo sus pasos, numerosos autores amplían el conocimiento de este tipo de flujo mediante resultados teóricos, algunos de los cuales citaremos en esta introducción, centrándose en particularidades que pueden aparecer en los problemas reales y en analizar las propiedades del flujo.

Una de estas características importantes a estudiar es el denominado flujo secundario, que se produce en las secciones transversales de las tuberías como consecuencia de su curvatura. Este flujo es de especial interés en problemas del campo de la ingeniería ya que están estrechamente relacionados con la transferencia de calor que se produce entre el fluido y las paredes de una tubería curva, por lo que predecir su comportamiento es clave para problemas de refrigeración y transporte de sedimentos, entre otros ejemplos. En trabajos como [62, 66, 76, 78, 92, 133, 145, 147, 163, 166] podemos encontrar interesantes estudios donde se comenta, entre otras características, la importancia del flujo secundario. También podemos encontrar resultados numéricos en [4, 67, 68, 73, 81, 111] que evidencian este comportamiento.

Otro aspecto interesante a estudiar en un flujo de estas características es su comportamiento en función de las propiedades de la línea media de la tubería como su curvatura y torsión (véanse, por ejemplo, [64–66, 73, 92, 98, 100, 101, 110, 148]). Así, en [110] se presenta un estudio donde se trata un flujo en una tubería con curvatura variable y torsión nula. Por su parte en [65, 66], se centran en la importancia de la torsión en el flujo, concluyendo que su efecto es menor en comparación con el de la curvatura. En los trabajos [100, 101] podemos encontrar un ejemplo aplicable al problema de sistemas de refrigeración mencionado anteriormente. En concreto, los autores se centran en el estudio de flujos incompresibles en tuberías helicoidales. Para ello, definen el problema con respecto a una base que depende de un parámetro pequeño relacionado con la distancia entre las espiras.

En tuberías rectas también podemos encontrar trabajos relacionando el flujo y el gradiente de presiones en [63], considerando fluidos cuya viscosidad depende de la presión en [102] o flujos en redes de tuberías como en [113], entre muchos otros.

Con respecto a los problemas de flujos evolutivos en tuberías curvas, encontramos una primera referencia en [93], donde también se hace hincapié en el flujo secundario dependiendo de los valores del número de Dean. En [92], se realiza un estudio donde la curvatura de la línea media de la tubería depende del tiempo. También podemos encontrar estudios transitorios, como en [132], donde se analiza el efecto de capa límite. Más recientemente, se ha estudiado el flujo evolutivo en estructuras formadas por cilindros rectos en [114, 115], donde se incluyen estimaciones del error entre la aproximación y la solución exacta.

En muchas ocasiones, estas características y comportamientos del flujo se presentan en trabajos donde se consideran tuberías que dependen de un parámetro pequeño adimensional relacionado, en la mayor parte de los casos, con el ratio entre el radio de la sección transversal y la longitud de la tubería. Es por ello por lo que en estudios como en [15, 47, 49, 65, 93, 96, 97, 99–103, 118, 120, 123, 124, 145, 163] se utiliza el método de los desarrollos asintóticos para obtener una aproximación analítica del problema. Este método permite identificar en qué orden de la aproximación asintótica obtenemos los primeros efectos de flujo secundario (véanse, por ejemplo, [93, 145]) o la influencia de la curvatura y la torsión de la línea media de la tubería en la velocidad y la presión del fluido (véanse, por ejemplo, [65, 100, 101]). A pesar de que en esta memoria nos centraremos en fluidos Newtonianos incompresibles, también existen trabajos que utilizan los métodos asintóticos para analizar el flujo de gases en tuberías (véase [103], por ejemplo) y de flujos no Newtonianos o casi Newtonianos (véanse [96, 103], por ejemplo). También encontramos trabajos donde se utilizan los métodos asintóticos para estudiar flujos más complejos, como en [47], donde el autor presenta una aproximación asintótica para problemas de fluidos micropolares en el interior de canales curvos. El mismo tipo de fluidos se analizan en [123, 124] en tuberías rectas y en [125] en tuberías circulares, también utilizando los métodos asintóticos.

Como hemos comentado al principio, estos estudios son de gran interés debido a su gran aplicabilidad. Sin embargo, para poder obtener un modelo que pueda representar problemas como los mencionados en el campo de la medicina u otros ejemplos de la industria donde las paredes de la tubería son flexibles, debemos considerar una ley de pared que permita el movimiento de las mismas. Por ejemplo, en el campo de la biomedicina destacamos los trabajos [54, 129, 130] donde los autores presentan modelos y herramientas numéricas, especificando procedimientos clínicos donde estos modelos podrían ser útiles. En [126], también se presentan modelos para el flujo en arterias relacionando el pulso sanguíneo con los patrones del flujo y destacando como estos modelos pueden ayudar a diseñar tratamientos para enfermedades concretas. En [117] se realiza el análisis asintótico de un fluido en el interior de un canal con paredes elásticas, dando lugar a un problema de interacción de fluido-estructura. Los mismos autores presentan un ejemplo en tuberías en [118], donde el desplazamiento de la pared se describe utilizando las ecuaciones de Koiter, o en [120, 121] con una ley de pared elástica. Existen numerosas referencias de problemas de fluido-estructura relacionados con un fluido moviéndose en el interior de una tubería, que detallaremos en la Parte III.

En esta primera parte de la memoria, estamos interesados en la deducción de un modelo de un fluido viscoso incompresible que se mueve en el interior de una tubería curva donde el radio de la sección transversal viene dado por una función  $R$  dependiente del tiempo, que se considera dato del problema, y que tiene en cuenta el desplazamiento de la pared. Así, obtendremos un modelo asintótico para el fluido que dependerá de  $R$ , de modo que bastará relacionar esta función con la ley de pared adecuada para obtener el modelo acoplado correspondiente. Con este objetivo, seguiremos algunas ideas de [98] donde se utiliza el método asintótico para obtener un modelo de un flujo estacionario en una tubería curva con paredes rígidas. En nuestro caso, consideraremos un flujo evolutivo y que las paredes están en movimiento. También hallaremos los correctores necesarios para tener en cuenta el fenómeno de capa límite. Por último, justificaremos el modelo propuesto obteniendo estimaciones del error entre la aproximación asintótica y la solución exacta del problema.





# Capítulo 1

## Análisis asintótico formal de un fluido viscoso en una tubería curva con paredes flexibles

El objetivo de este capítulo es utilizar el método de los desarrollos asintóticos para obtener un modelo unidimensional del flujo de un fluido viscoso en una tubería curva con paredes flexibles. Para ello consideremos un conducto curvo cuyo radio es muy pequeño en comparación con la longitud de la línea media de la misma. Supondremos que la expresión de ese radio viene dada por  $\varepsilon R$ , siendo  $\varepsilon$  un parámetro pequeño adimensional y  $R$  una función dada, que depende del punto de la línea media de la tubería y del tiempo. En el interior de dicha tubería consideraremos un fluido viscoso en movimiento debido a las diferencias de presión entre la entrada y la salida. Como consecuencia de la presión que el fluido ejerce sobre las paredes, estas tendrán un movimiento que supondremos continuo con respecto al movimiento del fluido.

Para este estudio, seguiremos algunos pasos de [98], donde se realiza un análisis asintótico de un flujo estacionario en una tubería curva con paredes rígidas. En la Sección 1.1 presentaremos el dominio de definición de nuestro problema, un cilindro curvo con paredes flexibles, en función de los elementos de la base de Frenet-Serret y el radio  $\varepsilon R$ . A continuación, introduciremos las ecuaciones que gobiernan el movimiento del fluido en el interior de la tubería. Como además consideraremos que el fluido es incompresible, lo modelizaremos con las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles, donde las incógnitas son la velocidad  $\mathbf{u}^\varepsilon$  y la presión  $p^\varepsilon$ . Veremos también aquí la expresión matemática de la condición de contorno que obtenemos de considerar continuidad entre el movimiento del fluido y los desplazamientos de la pared de la tubería, permitiendo únicamente desplazamientos en la dirección radial. Después, dado que utilizaremos el método asintótico para el estudio del problema, será conveniente definir el problema en un dominio de referencia independiente del parámetro  $\varepsilon$ . Como consecuencia, obtendremos una aplicación entre los puntos del dominio de referencia y el dominio original que nos permitirá en la Sección 1.2 identificar los campos y ecuaciones del problema definidos en el dominio de referencia. En la Sección 1.3 estaremos en condiciones de suponer la existencia de un desarrollo asintótico

para las incógnitas escaladas (velocidad,  $\mathbf{u}(\varepsilon)$  y presión,  $p(\varepsilon)$ ) y sustituirlo en las ecuaciones definidas en el dominio de referencia. De esta forma, podremos identificar algunos de los términos del desarrollo asintótico propuesto que compondrán la aproximación asintótica de la solución del problema. En este capítulo supondremos conocido el movimiento de la pared (dado por la función  $R$ ), aunque en la Sección 1.4 haremos algunas consideraciones de como determinar  $R$ . Este problema se estudiará con más detalle en la Parte III de la memoria. Finalmente, con carácter meramente ilustrativo, en la Sección 1.5 mostraremos algunas imágenes resultantes de evaluar los términos de la aproximación asintótica obtenida.

## 1.1. Problema de un fluido viscoso en una tubería deformable curva

En esta sección comenzaremos introduciendo el dominio del problema en cuestión. Después, escribiremos las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido viscoso incompresible a través de una tubería curva con paredes flexibles.

En lo que sigue, a no ser que se indique lo contrario explícitamente, utilizaremos la convención de suma en índices repetidos. Además, los índices latinos  $i, j, k, l, \dots$ , tomarán sus valores en el conjunto  $\{1, 2, 3\}$ , mientras que los índices griegos  $\alpha, \beta, \sigma, \tau, \dots$ , lo harán en el conjunto  $\{1, 2\}$ . Dada una función  $v$  que dependa únicamente de una variable, denotaremos por  $v'$  su función derivada. Utilizaremos la notación estándar “ $\cdot$ ” para denotar el producto interior usual entre dos vectores o dos campos vectoriales. También utilizaremos la notación estándar para los espacios de Lebesgue y Sobolev. En el desarrollo de este capítulo, supondremos suficiente regularidad para las funciones involucradas de forma que las operaciones que realicemos estén bien definidas.

Supongamos que la curva central o línea media de la tubería está parametrizada por la aplicación  $\mathbf{c}(s)$ , donde  $s \in [0, L]$  es el parámetro de longitud de arco. Además, sea  $T > 0$  el periodo de observación del problema. Entonces, los puntos del interior del dominio vienen dados para cada instante de tiempo  $t \in [0, T]$  por

$$\hat{\Omega}_t^\varepsilon := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y, z) = \mathbf{c}(s) + \varepsilon r R(t, s) [(\cos \theta)\mathbf{N}(s) + (\sin \theta)\mathbf{B}(s)]\},$$

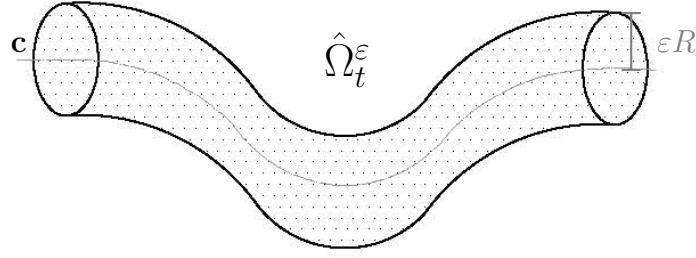
donde  $r \in [0, 1)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ ,  $\{\mathbf{T} = \mathbf{c}', \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$  es la base de Frenet-Serret de la curva  $\mathbf{c}$ , y  $R(t, s)$  denota la función radio de la sección transversal de la tubería en el punto  $s$  y tiempo  $t$  (véase la Figura 1.1). El parámetro adimensional  $\varepsilon$  representa la diferencia de escala de magnitud entre el diámetro de la tubería y su longitud, por lo que asumiremos que  $\varepsilon \ll 1$ .

Si denotamos por  $\partial\hat{\Omega}_t^\varepsilon$  a la frontera de la tubería curva, definamos la frontera lateral  $\Sigma_l^\varepsilon$  como,

$$\Sigma_l^\varepsilon := \{(x, y, z) \in \partial\hat{\Omega}_t^\varepsilon; r = 1\}. \quad (1.1.1)$$

A continuación, introduzcamos la notación,  $s_1 := s$ ,  $s_2 := \theta$ ,  $s_3 := r$  para las variables y  $\{\mathbf{v}_1 := \mathbf{T}, \mathbf{v}_2 := \mathbf{N}, \mathbf{v}_3 := \mathbf{B}\}$  para la base de Frenet-Serret de la curva  $\mathbf{c}$ . Esta nueva notación, nos permitirá utilizar en lo que sigue la convención de suma de Einstein.



Figura 1.1: Tubería curva de radio variable  $\varepsilon R$ .

Recordemos que, por las fórmulas de Frenet-Serret, se verifican las siguientes igualdades:

$$\begin{cases} \mathbf{v}'_1(s_1) = \kappa(s_1)\mathbf{v}_2(s_1), \\ \mathbf{v}'_2(s_1) = -\kappa(s_1)\mathbf{v}_1(s_1) + \tau(s_1)\mathbf{v}_3(s_1), \\ \mathbf{v}'_3(s_1) = -\tau(s_1)\mathbf{v}_2(s_1), \end{cases} \quad (1.1.2)$$

donde las funciones  $\kappa$  y  $\tau$  denotan la curvatura y la torsión, respectivamente, de la línea media de la tubería curva de forma que  $\kappa(s_1) = \|\mathbf{v}'_1(s_1)\|$  y  $\tau(s_1) = \mathbf{v}'_2(s_1) \cdot \mathbf{v}_3(s_1)$ .

Dado que consideraremos que en el interior de la tubería fluye un fluido viscoso incompresible, utilizaremos las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles para describir su movimiento en  $\hat{\Omega}_t^\varepsilon$ . Además, supondremos que la pared de la tubería es flexible, por lo que es necesario considerar una condición de contorno adecuada. Por tanto, el objetivo de este capítulo será el estudio del siguiente problema:

**Problema 1.1.1.** Hallar  $\mathbf{u}^\varepsilon : [0, T] \times \hat{\Omega}_t^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $p^\varepsilon : [0, T] \times \hat{\Omega}_t^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u}^\varepsilon) \mathbf{u}^\varepsilon + \frac{1}{\rho_0} \nabla p^\varepsilon - \nu \Delta \mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{b}_0^\varepsilon \text{ en } \hat{\Omega}_t^\varepsilon, \quad (1.1.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon = 0 \text{ en } \hat{\Omega}_t^\varepsilon, \quad (1.1.4)$$

$$\mathbf{u}^\varepsilon = \left( \varepsilon \frac{\partial R}{\partial t} \right) \hat{\mathbf{n}} \text{ en } \Sigma_l^\varepsilon, \quad (1.1.5)$$

donde  $\mathbf{u}^\varepsilon$  denota el campo de velocidades,  $p^\varepsilon$  el campo de presiones,  $\rho_0$  es la densidad del fluido,  $\nu$  es su viscosidad cinemática,  $\mathbf{b}_0^\varepsilon$  es la densidad de fuerzas por unidad de masa y  $\hat{\mathbf{n}}$  es el vector unitario exterior con dirección radial en la cara lateral.

Procedamos a describir las ecuaciones del Problema 1.1.1. El par (1.1.3)–(1.1.4) representa las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles que modelan el movimiento de un fluido viscoso incompresible. En particular, (1.1.3) es la ecuación de equilibrio (o conservación) del momento lineal para un flujo viscoso bajo los efectos de la densidad de fuerzas  $\mathbf{b}_0^\varepsilon$

y (1.1.4) es la ecuación de la incompresibilidad, que se obtiene de la ecuación de la conservación de la masa considerando un fluido viscoso incompresible, es decir, con  $\rho_0$  constante. Por último, la expresión (1.1.5) denota la condición de contorno en la cara lateral de la tubería. Con esta ecuación, estamos suponiendo continuidad entre el movimiento del fluido y los desplazamientos de la pared, asumiendo que solo se producen movimientos radiales.

**Observación 1.1.2.** *El Problema 1.1.1 podría modelar el flujo en el interior de un vaso sanguíneo. La sangre está formada por una amplia variedad de elementos que hacen que algunos autores la consideren como un fluido casi Newtoniano (véase por ejemplo [80, 96]); sin embargo, la gran mayoría admite que su comportamiento es más semejante a un fluido Newtoniano (véanse, por ejemplo, [131, 160, 163]), con excepción de flujos en pequeños vasos como los capilares, donde los glóbulos rojos deben ser tenidos en cuenta en el comportamiento del fluido.*

*La condición de contorno (1.1.5) podría representar el desplazamiento producido por las paredes de los vasos sanguíneos en el sistema circulatorio. A pesar de que pueden producirse desplazamientos en otras direcciones, estos son despreciables en comparación con los existentes en la dirección normal, por lo que se considera una hipótesis ampliamente aceptada en la literatura (véanse, por ejemplo, [112, 118, 120, 160]).*

**Observación 1.1.3.** *Nótese que no hemos considerado ninguna condición de contorno en los extremos de la tubería ni una condición inicial. Estas podrán ser escogidas libremente de forma que sean compatibles con la condición de contorno (1.1.5). Como veremos en los siguientes capítulos, será suficiente con imponer la velocidad en dichas superficies y en el instante inicial (véase el Problema 2.1.2).*

Para proporcionar una aproximación de la solución del Problema 1.1.1 aplicaremos el método de los desarrollos asintóticos (véase [88]). Por tanto, necesitamos definir las ecuaciones de este problema en un dominio de referencia independiente de  $\varepsilon$ . Con este fin, consideremos los subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$  definidos por  $\Omega^\varepsilon = (0, L) \times [0, 2\pi) \times [0, \varepsilon)$  y  $\Omega = (0, L) \times [0, 2\pi) \times [0, 1)$ . Denotaremos por  $\mathbf{x}^\varepsilon := (x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon, x_3^\varepsilon)$ ,  $\mathbf{s}^\varepsilon := (s_1^\varepsilon, s_2^\varepsilon, s_3^\varepsilon)$ , y  $\mathbf{s} := (s_1, s_2, s_3)$ , respectivamente, los puntos de los dominios  $\hat{\Omega}_t^\varepsilon$ ,  $\Omega^\varepsilon$  y  $\Omega$ . También, denotaremos por  $dx^\varepsilon$ ,  $d\Sigma^\varepsilon$  los elementos diferenciales de volumen y área en  $\hat{\Omega}_t^\varepsilon$  y por  $ds$ ,  $d\Sigma$  los correspondientes en  $\Omega$ . Utilizaremos la notación  $\nabla$  y  $\Delta$  para denotar los operadores gradiente y el laplaciano con respecto a la variable del problema correspondiente donde se escriba. Para mayor claridad, en aquellos casos donde se pueda llevar a confusión, indicaremos con un subíndice la variable con respecto a la cual se deben considerar estos operadores. Además, en lo que sigue, para mayor brevedad notacional, omitiremos la dependencia explícita de las diversas funciones con respecto a las variables espaciales y temporal cuando no haya ambigüedad.

Consideremos las aplicaciones  $\phi_1^\varepsilon : \Omega \rightarrow \Omega^\varepsilon$ ,  $\phi_2^\varepsilon : \Omega^\varepsilon \rightarrow \hat{\Omega}_t^\varepsilon$ , donde  $\phi_1^\varepsilon$  y  $\phi_2^\varepsilon$  vienen dadas por las expresiones,

$$\begin{aligned} \phi_1^\varepsilon(s_1, s_2, s_3) &= (s_1, s_2, \varepsilon s_3) =: (s_1^\varepsilon, s_2^\varepsilon, s_3^\varepsilon), \\ \phi_2^\varepsilon(s_1^\varepsilon, s_2^\varepsilon, s_3^\varepsilon) &= \mathbf{c}(s_1^\varepsilon) + s_3^\varepsilon R(t, s_1^\varepsilon)[(\cos s_2^\varepsilon)\mathbf{v}_2(s_1^\varepsilon) + (\sin s_2^\varepsilon)\mathbf{v}_3(s_1^\varepsilon)]. \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

Entonces  $\hat{\Omega}_t^\varepsilon = \phi_2^\varepsilon(\phi_1^\varepsilon(\Omega))$  representa los puntos interiores de la tubería para cada  $t \in [0, T]$ . Por tanto, podemos definir el cambio de variable del dominio de referencia  $\Omega$ , como  $\phi^\varepsilon = (\phi_2^\varepsilon \circ \phi_1^\varepsilon) : \Omega \rightarrow \hat{\Omega}_t^\varepsilon$ , donde

$$\phi^\varepsilon(s_1, s_2, s_3) = \mathbf{c}(s_1) + \varepsilon s_3 R(t, s_1)[(\cos s_2)\mathbf{v}_2(s_1) + (\sin s_2)\mathbf{v}_3(s_1)] =: (x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon, x_3^\varepsilon). \quad (1.1.7)$$

Utilizando esta aplicación podemos definir la frontera lateral del dominio  $\hat{\Omega}_t^\varepsilon$ , véase (1.1.1), como

$$\Sigma_l^\varepsilon = \{\mathbf{x}^\varepsilon \in \partial\hat{\Omega}_t^\varepsilon; \mathbf{x}^\varepsilon = \phi^\varepsilon(s_1, s_2, 1)\}.$$

Además, si denotamos por  $\partial\Omega$  a los puntos de la frontera del dominio de referencia, entonces su correspondiente cara lateral,  $\Sigma_l$  vendrá dada por,

$$\Sigma_l = \{\mathbf{s} \in \partial\Omega; s_3 = 1\}.$$

Calculando las parciales correspondientes de la aplicación (1.1.7), se tiene que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi^\varepsilon}{\partial s_1} &= (1 - \varepsilon s_3 \kappa R \cos s_2) \mathbf{v}_1 + \left( \varepsilon s_3 \frac{\partial R}{\partial s_1} \cos s_2 - \varepsilon s_3 \tau R \sin s_2 \right) \mathbf{v}_2 \\ &\quad + \left( \varepsilon s_3 \frac{\partial R}{\partial s_1} \sin s_2 + \varepsilon s_3 \tau R \cos s_2 \right) \mathbf{v}_3. \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi^\varepsilon}{\partial s_2} &= -\varepsilon s_3 R \sin s_2 \mathbf{v}_2 + \varepsilon s_3 R \cos s_2 \mathbf{v}_3, \\ \frac{\partial\phi^\varepsilon}{\partial s_3} &= \varepsilon R \hat{\mathbf{n}}, \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

donde,

$$\hat{\mathbf{n}} := \cos s_2 \mathbf{v}_2 + \sin s_2 \mathbf{v}_3. \quad (1.1.10)$$

Entonces, se tiene que el determinante del jacobiano del cambio de variable (1.1.7) es,

$$\sqrt{g} := \left( \frac{\partial\phi^\varepsilon}{\partial s_2} \wedge \frac{\partial\phi^\varepsilon}{\partial s_1} \right) \cdot \frac{\partial\phi^\varepsilon}{\partial s_3} = \varepsilon^2 s_3 R^2 (1 - \varepsilon \kappa R \cos s_2). \quad (1.1.11)$$

Con esta parametrización definida, podemos calcular el vector normal exterior unitario en los puntos de la cara lateral del dominio  $\hat{\Omega}_t^\varepsilon$  (es decir, los puntos tales que  $s_3 = 1$ ) de la siguiente forma:

$$\mathbf{n}^\varepsilon = \frac{\frac{\partial\phi^\varepsilon}{\partial s_2} \wedge \frac{\partial\phi^\varepsilon}{\partial s_1}}{\left| \frac{\partial\phi^\varepsilon}{\partial s_2} \wedge \frac{\partial\phi^\varepsilon}{\partial s_1} \right|},$$

en  $s_3 = 1$ . Entonces, realizando el producto vectorial entre (1.1.8) y (1.1.9) y evaluando en  $s_3 = 1$  obtenemos que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^\varepsilon}{\partial s_2} \wedge \frac{\partial \phi^\varepsilon}{\partial s_1} &= \varepsilon R (1 - \varepsilon \kappa R \cos s_2) \hat{\mathbf{n}} - \varepsilon^2 R \frac{\partial R}{\partial s_1} \mathbf{v}_1, \\ \left| \frac{\partial \phi^\varepsilon}{\partial s_2} \wedge \frac{\partial \phi^\varepsilon}{\partial s_1} \right| &= \varepsilon R \sqrt{(1 - \varepsilon \kappa R \cos s_2)^2 + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial R}{\partial s_1} \right)^2}. \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

Por tanto,

$$\mathbf{n}^\varepsilon = \frac{(1 - \varepsilon \kappa R \cos s_2) \hat{\mathbf{n}} - \varepsilon \frac{\partial R}{\partial s_1} \mathbf{v}_1}{\sqrt{(1 - \varepsilon \kappa R \cos s_2)^2 + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial R}{\partial s_1} \right)^2}}. \quad (1.1.13)$$

Como el objetivo es realizar un análisis asintótico del problema propuesto, nos interesa obtener una expresión en potencias de  $\varepsilon$  de cada uno de los términos implicados. En este caso (recordemos que  $\varepsilon \ll 1$ ), observamos que,

$$\frac{1}{1 + \varepsilon a + \varepsilon^2 b} = (c_0 + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + \dots)^2 = (d_0 + \varepsilon d_1 + \varepsilon^2 d_2 + \dots),$$

donde  $a, b \in \mathbb{R}$ , implica que

$$c_0 = 1, \quad c_1 = -\frac{a}{2}, \quad \sum_{i+j=k; i,j \geq 0} c_i c_j = d_k, \quad k \geq 2, \quad (1.1.14)$$

$$d_0 = 1, \quad d_1 = -a, \quad d_k = -a d_{k-1} - b d_{k-2}, \quad k \geq 2. \quad (1.1.15)$$

En particular, si  $a = -2\kappa R \cos s_2$  y  $b = \kappa^2 R^2 \cos^2 s_2 + \left( \frac{\partial R}{\partial s_1} \right)^2$ , se tiene que

$$\begin{aligned} d_0 &= 1, \quad d_1 = 2\kappa R \cos s_2, \quad d_2 = 3\kappa^2 R^2 \cos^2 s_2 - \left( \frac{\partial R}{\partial s_1} \right)^2, \\ d_3 &= 4\kappa^3 R^3 \cos^3 s_2 - 4\kappa R \cos s_2 \left( \frac{\partial R}{\partial s_1} \right)^2, \quad \dots \end{aligned}$$

y también,

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \kappa R \cos s_2, \quad c_2 = \kappa^2 R^2 \cos^2 s_2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial R}{\partial s_1} \right)^2, \quad (1.1.16)$$

$$c_3 = \kappa^3 R^3 \cos^3 s_2 - \frac{3}{2} \kappa R \cos s_2 \left( \frac{\partial R}{\partial s_1} \right)^2, \quad \sum_{i+j=k; i,j \geq 0} c_i c_j = d_k, \quad k \geq 2. \quad (1.1.17)$$

Entonces, de (1.1.13) deducimos que,

$$\mathbf{n}^\varepsilon = \left( 1 - \varepsilon^2 \kappa^2 R^2 \cos^2 s_2 + \sum_{k=2}^{\infty} c_k (1 - \varepsilon \kappa \cos s_2) \varepsilon^k \right) \hat{\mathbf{n}}$$

$$- \left( \varepsilon \frac{\partial R}{\partial s_1} + \varepsilon^2 \kappa R \cos s_2 \frac{\partial R}{\partial s_1} \sum_{k=2}^{\infty} c_k \frac{\partial R}{\partial s_1} \varepsilon^{k+1} \right) \mathbf{v}_1. \quad (1.1.18)$$

Además, siguiendo argumentos similares podemos deducir (véase (1.1.12)) la siguiente relación que será útil más adelante:

$$\left| \frac{\partial \phi^\varepsilon}{\partial s_2} \wedge \frac{\partial \phi^\varepsilon}{\partial s_1} \right| = \varepsilon R \sqrt{(1 - \varepsilon \kappa R \cos s_2)^2 + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial R}{\partial s_1} \right)^2} = \varepsilon R (\hat{c}_0 + \varepsilon \hat{c}_1 + \varepsilon^2 \hat{c}_2 + \dots), \quad (1.1.19)$$

donde,

$$\hat{c}_0 = 1, \quad \hat{c}_1 = -2\kappa R \cos s_2, \quad \hat{c}_2 = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial R}{\partial s_1} \right)^2 - 3\kappa^2 R^2 \cos^2 s_2 \right), \quad (1.1.20)$$

$$\sum_{i+j=k; i,j \geq 0} \hat{c}_i \hat{c}_j = 0, \quad k \geq 3. \quad (1.1.21)$$

De esta forma ya estamos en condiciones de escribir las ecuaciones del Problema 1.1.1 en el dominio de referencia  $\Omega$ .

## 1.2. Problema escalado en el dominio de referencia

A continuación, para poder proceder con el análisis asintótico, estudiaremos cómo definir el problema en un dominio de referencia independiente del parámetro pequeño  $\varepsilon$  y del tiempo  $t$  (véase la Figura 1.2). Teniendo en cuenta el cambio de variable (1.1.7), podemos asociar a cada campo vectorial  $\mathbf{w}^\varepsilon$  en  $\hat{\Omega}_t^\varepsilon$ , un nuevo campo vectorial  $\mathbf{w}(\varepsilon)$  definido en  $\Omega$ , como sigue:

$$w_i^\varepsilon = \mathbf{w}^\varepsilon \cdot \mathbf{e}_i = (w_k^\varepsilon \mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{e}_i = (w_k(\varepsilon) \mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{e}_i =: w_k(\varepsilon) v_{ki}, \quad (1.2.1)$$

donde  $\{\mathbf{e}_i\}_i$  es una base ortonormal (nótese que se considera la convención de suma de Einstein en los términos con índices repetidos) y utilizamos la notación  $v_{ki} := \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{e}_i$ .

### 1.2.1. Cálculo del Jacobiano de la aplicación inversa del cambio de variable

Como primer paso para escribir las ecuaciones del Problema 1.1.1 definidas en el dominio de referencia  $\Omega$ , necesitaremos estudiar la inversa del cambio de variable (1.1.7), en particular, de su Jacobiano. Consideremos la aplicación  $\tilde{\phi}^\varepsilon : [0, T] \times \Omega \longrightarrow [0, T] \times \hat{\Omega}_t^\varepsilon$ ,

$$\tilde{\phi}^\varepsilon(t, s_1, s_2, s_3) := (t^\varepsilon, x^\varepsilon) = (t^\varepsilon, \phi^\varepsilon(s_1, s_2, s_3)).$$

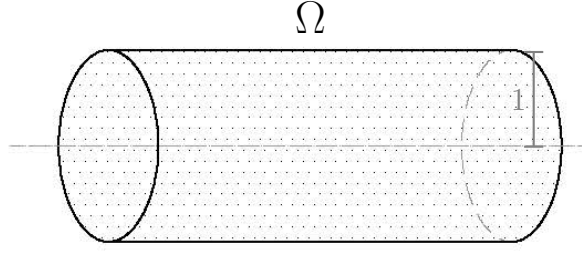


Figura 1.2: Dominio de referencia independiente de  $\varepsilon$  y del tiempo  $t$ .

Entonces, el Jacobiano asociado, que denotaremos por  $J_\phi$ , será

$$J_\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial t^\varepsilon}{\partial t} & \frac{\partial t^\varepsilon}{\partial s_1} & \frac{\partial t^\varepsilon}{\partial s_2} & \frac{\partial t^\varepsilon}{\partial s_3} \\ \frac{\partial x_1^\varepsilon}{\partial t} & \frac{\partial x_1^\varepsilon}{\partial s_1} & \frac{\partial x_1^\varepsilon}{\partial s_2} & \frac{\partial x_1^\varepsilon}{\partial s_3} \\ \frac{\partial x_2^\varepsilon}{\partial t} & \frac{\partial x_2^\varepsilon}{\partial s_1} & \frac{\partial x_2^\varepsilon}{\partial s_2} & \frac{\partial x_2^\varepsilon}{\partial s_3} \\ \frac{\partial x_3^\varepsilon}{\partial t} & \frac{\partial x_3^\varepsilon}{\partial s_1} & \frac{\partial x_3^\varepsilon}{\partial s_2} & \frac{\partial x_3^\varepsilon}{\partial s_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial t^\varepsilon}{\partial t} & \frac{\partial t^\varepsilon}{\partial s_1} & \frac{\partial t^\varepsilon}{\partial s_2} & \frac{\partial t^\varepsilon}{\partial s_3} \\ \frac{\partial \mathbf{x}^\varepsilon}{\partial t} & \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{x}^\varepsilon & & \end{pmatrix},$$

donde  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ . Ahora bien, como

$$t^\varepsilon = t, \quad \mathbf{x}^\varepsilon = \mathbf{c}(s_1) + \varepsilon s_3 R(t, s_1) ((\cos s_2) \mathbf{v}_2(s_1) + (\sin s_2) \mathbf{v}_3(s_1)),$$

entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\partial t^\varepsilon}{\partial t} &= 1, \quad \frac{\partial t^\varepsilon}{\partial s_i} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{x}^\varepsilon}{\partial t} &= \varepsilon s_3 \frac{\partial R}{\partial t} ((\cos s_2) \mathbf{v}_2(s_1) + (\sin s_2) \mathbf{v}_3(s_1)), \\ \frac{\partial \mathbf{x}^\varepsilon}{\partial s_1} &= \mathbf{c}'(s_1) + \varepsilon s_3 \frac{\partial R}{\partial s_1} ((\cos s_2) \mathbf{v}_2(s_1) + (\sin s_2) \mathbf{v}_3(s_1)) + \varepsilon s_3 R ((\cos s_2) \mathbf{v}_2'(s_1) + (\sin s_2) \mathbf{v}_3'(s_1)), \\ \frac{\partial \mathbf{x}^\varepsilon}{\partial s_2} &= \varepsilon s_3 R (-(\sin s_2) \mathbf{v}_2(s_1) + (\cos s_2) \mathbf{v}_3(s_1)), \\ \frac{\partial \mathbf{x}^\varepsilon}{\partial s_3} &= \varepsilon R ((\cos s_2) \mathbf{v}_2(s_1) + (\sin s_2) \mathbf{v}_3(s_1)). \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Ahora, la aplicación inversa  $(\tilde{\phi}^\varepsilon)^{-1} : [0, T] \times \hat{\Omega}_t^\varepsilon \longrightarrow [0, T] \times \Omega$  es tal que su Jacobiano, denotado por  $J_\phi^{-1}$ , es

$$J_\phi^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial t}{\partial t^\varepsilon} & \frac{\partial t}{\partial s_1^\varepsilon} & \frac{\partial t}{\partial s_2^\varepsilon} & \frac{\partial t}{\partial s_3^\varepsilon} \\ \frac{\partial s_1}{\partial t^\varepsilon} & \frac{\partial s_1}{\partial s_1^\varepsilon} & \frac{\partial s_1}{\partial s_2^\varepsilon} & \frac{\partial s_1}{\partial s_3^\varepsilon} \\ \frac{\partial s_2}{\partial t^\varepsilon} & \frac{\partial s_2}{\partial s_1^\varepsilon} & \frac{\partial s_2}{\partial s_2^\varepsilon} & \frac{\partial s_2}{\partial s_3^\varepsilon} \\ \frac{\partial s_3}{\partial t^\varepsilon} & \frac{\partial s_3}{\partial s_1^\varepsilon} & \frac{\partial s_3}{\partial s_2^\varepsilon} & \frac{\partial s_3}{\partial s_3^\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t^\varepsilon} & \nabla_{\mathbf{x}^\varepsilon} \mathbf{s} & & \end{pmatrix}.$$

Por tanto, como  $J_\phi J_\phi^{-1} = \mathbf{I}$ , se tienen las siguientes relaciones,

$$\nabla_{\mathbf{x}^\varepsilon} \mathbf{s} = (\nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{x}^\varepsilon)^{-1}, \quad (1.2.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t^\varepsilon} = -(\nabla_{\mathbf{x}^\varepsilon} \mathbf{s}) \frac{\partial \mathbf{x}^\varepsilon}{\partial t}. \quad (1.2.4)$$

A continuación, identifiquemos los términos  $\frac{\partial s_i}{\partial \mathbf{x}^\varepsilon}$ . Para ello, escribiremos  $\frac{\partial s_i}{\partial \mathbf{x}^\varepsilon} = \alpha_i \mathbf{v}_1 + \beta_i \mathbf{v}_2 + \gamma_i \mathbf{v}_3$  con  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$ . Ahora, por la relación (1.2.3), tenemos que

$$\frac{\partial s_i}{\partial \mathbf{x}^\varepsilon} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}^\varepsilon}{\partial s_j} = \delta_{ij}, \quad (1.2.5)$$

donde  $\delta_{ij}$  denota la delta de Kronecker. Para  $i = 1$  obtenemos que

$$\begin{aligned} 1 &= (\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \beta_1 \mathbf{v}_2 + \gamma_1 \mathbf{v}_3) \cdot \left( \mathbf{v}_1 + \varepsilon s_3 \frac{\partial R}{\partial s_1} (\cos s_2 \mathbf{v}_2 + \sin s_2 \mathbf{v}_3) + \varepsilon s_3 R (\cos s_2 \mathbf{v}_2' + \sin s_2 \mathbf{v}_3') \right) \\ &= \alpha_1 (1 + \varepsilon s_3 R (\cos s_2 (\mathbf{v}_2' \cdot \mathbf{v}_1) + \sin s_2 (\mathbf{v}_3' \cdot \mathbf{v}_1))) + \beta_1 \varepsilon s_3 \left( \frac{\partial R}{\partial s_1} \cos s_2 + R \sin s_2 (\mathbf{v}_3' \cdot \mathbf{v}_2) \right) \\ &\quad + \gamma_1 \varepsilon s_3 \left( \frac{\partial R}{\partial s_1} \sin s_2 + R \cos s_2 (\mathbf{v}_2' \cdot \mathbf{v}_3) \right), \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

ya que  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{c}'$ , y

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \beta_1 \mathbf{v}_2 + \gamma_1 \mathbf{v}_3) \cdot (\varepsilon s_3 R (-\sin s_2 \mathbf{v}_2 + \cos s_2 \mathbf{v}_3)) \\ &= -\beta_1 \varepsilon s_3 R \sin s_2 + \gamma_1 \varepsilon s_3 R \cos s_2, \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \beta_1 \mathbf{v}_2 + \gamma_1 \mathbf{v}_3) \cdot (\varepsilon R (\cos s_2 \mathbf{v}_2 + \sin s_2 \mathbf{v}_3)) \\ &= \beta_1 \varepsilon R \cos s_2 + \gamma_1 \varepsilon R \sin s_2. \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

De las relaciones (1.2.7)–(1.2.8) se deduce que necesariamente  $\beta_1 = \gamma_1 = 0$ . Por tanto, de (1.2.6) y las identidades (1.1.2), se tiene:

$$\alpha_1 = \frac{1}{1 - \varepsilon \kappa(s_1) s_3 R(t, s_1) \cos s_2}.$$

Ahora, tomemos  $i = 2$  en (1.2.5). Por un lado, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_2 (1 + \varepsilon s_3 R (\cos s_2 (\mathbf{v}'_2 \cdot \mathbf{v}_1) + \sin s_2 (\mathbf{v}'_3 \cdot \mathbf{v}_1))) \\ &\quad + \beta_2 \varepsilon s_3 \left( \frac{\partial R}{\partial s_1} \cos s_2 + R \sin s_2 (\mathbf{v}'_3 \cdot \mathbf{v}_2) \right) \\ &\quad + \gamma_2 \varepsilon s_3 \left( \frac{\partial R}{\partial s_1} \sin s_2 + R \cos s_2 (\mathbf{v}'_2 \cdot \mathbf{v}_3) \right), \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

y, por otro lado, que

$$\begin{aligned} 1 &= -\beta_2 \varepsilon s_3 R \sin s_2 + \gamma_2 \varepsilon s_3 R \cos s_2, \\ 0 &= \beta_2 \varepsilon R \cos s_2 + \gamma_2 \varepsilon R \sin s_2, \end{aligned}$$

de donde deducimos:

$$\beta_2 = -\frac{\sin s_2}{\varepsilon s_3 R(t, s_1)}, \quad \gamma_2 = \frac{\cos s_2}{\varepsilon s_3 R(t, s_1)}.$$

Por tanto, utilizando las relaciones (1.1.2) y (1.2.9), obtenemos que

$$\alpha_2 = -\frac{\tau(s_1)}{1 - \varepsilon \kappa(s_1) s_3 R(t, s_1) \cos s_2}.$$

Finalmente, tomemos  $i = 3$  en (1.2.5). Por un lado, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_3 (1 + \varepsilon s_3 R (\cos s_2 (\mathbf{v}'_2 \cdot \mathbf{v}_1) + \sin s_2 (\mathbf{v}'_3 \cdot \mathbf{v}_1))) \\ &\quad + \beta_3 \varepsilon s_3 \left( \frac{\partial R}{\partial s_1} \cos s_2 + R \sin s_2 (\mathbf{v}'_3 \cdot \mathbf{v}_2) \right) \\ &\quad + \gamma_3 \varepsilon s_3 \left( \frac{\partial R}{\partial s_1} \sin s_2 + R \cos s_2 (\mathbf{v}'_2 \cdot \mathbf{v}_3) \right), \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

y por otra parte, que

$$\begin{aligned} 0 &= -\beta_3 \varepsilon s_3 R \sin s_2 + \gamma_3 \varepsilon s_3 R \cos s_2 \\ 1 &= \beta_3 \varepsilon R \cos s_2 + \gamma_3 \varepsilon R \sin s_2. \end{aligned}$$

de donde deducimos:

$$\beta_3 = \frac{\cos s_2}{\varepsilon R(t, s_1)}, \quad \gamma_3 = \frac{\sin s_2}{\varepsilon R(t, s_1)}.$$

Por tanto, de las relaciones (1.1.2) y (1.2.10), obtenemos que

$$\alpha_3 = -\frac{s_3}{R(t, s_1) (1 - \varepsilon \kappa(s_1) s_3 R(t, s_1) \cos s_2)} \frac{\partial R}{\partial s_1}(t, s_1).$$



En definitiva, hemos obtenido que

$$\frac{\partial s_1}{\partial \mathbf{x}^\varepsilon} = \frac{1}{1 - \varepsilon \kappa(s_1) s_3 R(t, s_1) \cos s_2} \mathbf{v}_1(s_1), \quad (1.2.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_2}{\partial \mathbf{x}^\varepsilon} = & -\frac{\tau(s_1)}{1 - \varepsilon \kappa(s_1) s_3 R(t, s_1) \cos s_2} \mathbf{v}_1(s_1) - \frac{\sin s_2}{\varepsilon s_3 R(t, s_1)} \mathbf{v}_2(s_1) \\ & + \frac{\cos s_2}{\varepsilon s_3 R(t, s_1)} \mathbf{v}_3(s_1), \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_3}{\partial \mathbf{x}^\varepsilon} = & -\frac{s_3}{R(t, s_1) (1 - \varepsilon \kappa(s_1) s_3 R(t, s_1) \cos s_2)} \frac{\partial R}{\partial s_1}(t, s_1) \mathbf{v}_1(s_1) \\ & + \frac{\cos s_2}{\varepsilon R(t, s_1)} \mathbf{v}_2(s_1) + \frac{\sin s_2}{\varepsilon R(t, s_1)} \mathbf{v}_3(s_1), \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

y de las relaciones (1.2.2) y (1.2.4), deducimos:

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t^\varepsilon} = -\frac{s_3}{R(t, s_1)} \frac{\partial R}{\partial t}(t, s_1) \mathbf{v}_3(s_1). \quad (1.2.14)$$

### 1.2.2. Ecuaciones en el dominio de referencia

A continuación, escribiremos cada uno de los términos involucrados en las ecuaciones del Problema 1.1.1 en el dominio de referencia.

Comenzaremos con los términos de la ecuación de equilibrio (1.1.3). En primer lugar, utilizando (1.2.1), la regla de la cadena y la relación (1.2.14), se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t^\varepsilon} &= \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t^\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_i = \frac{\partial(u_k^\varepsilon \mathbf{e}_k)}{\partial t^\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_i = \frac{\partial(u_k(\varepsilon) \mathbf{v}_k)}{\partial t^\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_i = \left( \frac{\partial(u_k(\varepsilon) \mathbf{v}_k)}{\partial t} + \frac{\partial(u_k(\varepsilon) \mathbf{v}_k)}{\partial s_3} \frac{\partial s_3}{\partial t^\varepsilon} \right) \cdot \mathbf{e}_i \\ &= \left( \frac{\partial u_k(\varepsilon)}{\partial t} - \frac{s_3}{R} \frac{\partial R}{\partial t} \frac{\partial u_k(\varepsilon)}{\partial s_3} \right) (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{e}_i) = (D_t u_k(\varepsilon)) v_{ki}, \end{aligned}$$

donde  $D_t$  es el operador definido por

$$D_t := \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{s_3}{R} \frac{\partial R}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s_3} \right).$$

El término no lineal de la ecuación (1.1.3), utilizando (1.2.1) y la regla de la cadena, se puede escribir como,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j^\varepsilon} u_j^\varepsilon &= \frac{\partial(\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{e}_i)}{\partial x_j^\varepsilon} (\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{e}_j) = \frac{\partial((u_k^\varepsilon \mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{e}_i)}{\partial x_j^\varepsilon} ((u_m^\varepsilon \mathbf{e}_m) \cdot \mathbf{e}_j) \\ &= \frac{\partial((u_k(\varepsilon) \mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{e}_i)}{\partial x_j^\varepsilon} ((u_m(\varepsilon) \mathbf{v}_m) \cdot \mathbf{e}_j) = \left( \frac{\partial(u_k(\varepsilon) v_{ki})}{\partial s_q} \frac{\partial s_q}{\partial x_j^\varepsilon} \right) (u_m(\varepsilon) v_{mj}). \end{aligned}$$

El término laplaciano por su parte se escribe como,

$$\Delta u_i^\varepsilon = \Delta(\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{e}_i) = \Delta(u_k^\varepsilon \mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{e}_i = \Delta(u_k(\varepsilon) \mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial (x_j^\varepsilon)^2} (u_k(\varepsilon) v_{ki})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j^\varepsilon} \left( \frac{\partial(u_k(\varepsilon)v_{ki})}{\partial s_q} \frac{\partial s_q}{\partial x_j^\varepsilon} \right) = \frac{\partial}{\partial s_m} \left( \frac{\partial(u_k(\varepsilon)v_{ki})}{\partial s_q} \frac{\partial s_q}{\partial x_j^\varepsilon} \right) \frac{\partial s_m}{\partial x_j^\varepsilon}.$$

Por último, las componentes del gradiente de presiones y la densidad de fuerzas pueden escribirse como,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial x_i^\varepsilon} &= \frac{\partial p(\varepsilon)}{\partial s_q} \frac{\partial s_q}{\partial x_i^\varepsilon}, \\ (\mathbf{b}_0^\varepsilon)_i &= \mathbf{b}_0^\varepsilon \cdot \mathbf{e}_i = ((\mathbf{b}_0^\varepsilon)_k \mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{e}_i = ((\mathbf{b}_0(\varepsilon))_k \mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{e}_i = b_{0k}(\varepsilon) v_{ki}, \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

donde  $b_{0k}(\varepsilon) := (\mathbf{b}_0(\varepsilon))_k$ .

Escribamos ahora la ecuación de la incompresibilidad (1.1.4) en el dominio de referencia. Utilizando nuevamente (1.2.1) y la regla de la cadena, esta se escribe como,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon &= \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_j^\varepsilon} = \frac{\partial(\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{e}_j)}{\partial x_j^\varepsilon} = \frac{\partial((u_k^\varepsilon \mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{e}_j)}{\partial x_j^\varepsilon} = \frac{\partial((u_k(\varepsilon) \mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{e}_j)}{\partial x_j^\varepsilon} \\ &= \frac{\partial(u_k(\varepsilon) v_{kj})}{\partial s_q} \frac{\partial s_q}{\partial x_j^\varepsilon}. \end{aligned}$$

Para finalizar las transformaciones de las ecuaciones del Problema 1.1.1 al dominio de referencia solo nos queda estudiar la condición de contorno (1.1.5). Sea  $\hat{\mathbf{n}} = (\cos s_2) \mathbf{v}_2(s_1) + (\sin s_2) \mathbf{v}_3(s_1)$  el vector normal unitario en  $s_3 = 1$  (que coincide con el vector unitario exterior radial introducido en el Problema 1.1.1). Entonces la condición de contorno (1.1.5) conduce a

$$\mathbf{u}^\varepsilon = u_i^\varepsilon \mathbf{e}_i = u_i(\varepsilon) \mathbf{v}_i(\varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial R}{\partial t} ((\cos s_2) \mathbf{v}_2(s_1) + (\sin s_2) \mathbf{v}_3(s_1)).$$

Por tanto, dado que la base de Frenet-Serret es ortonormal, obtenemos las siguientes condiciones de contorno en  $\Sigma_l$  ( $s_3 = 1$ ) para las componentes escaladas de la velocidad:

$$\begin{cases} u_1(\varepsilon) = 0 & \text{en } s_3 = 1, \\ u_2(\varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial R}{\partial t} \cos s_2 & \text{en } s_3 = 1, \\ u_3(\varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial R}{\partial t} \sin s_2 & \text{en } s_3 = 1. \end{cases}$$

Como consecuencia, podemos enunciar la versión escalada del Problema 1.1.1 definido en el dominio de referencia:

**Problema 1.2.1.** Para cada  $\varepsilon > 0$ , hallar  $\mathbf{u}(\varepsilon) = (u_i(\varepsilon)) : [0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$  y  $p(\varepsilon) : [0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  tales que

$$D_t(u_k(\varepsilon)v_{ki}) + \left( \frac{\partial(u_k(\varepsilon)v_{ki})}{\partial s_q} \frac{\partial s_q}{\partial x_j^\varepsilon} \right) (u_m(\varepsilon)v_{mj})$$

$$-\nu \frac{\partial}{\partial s_m} \left( \frac{\partial(u_k(\varepsilon)v_{ki})}{\partial s_q} \frac{\partial s_q}{\partial x_j^\varepsilon} \right) \frac{\partial s_m}{\partial x_j^\varepsilon} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p(\varepsilon)}{\partial s_q} \frac{\partial s_q}{\partial x_i^\varepsilon} + b_{0k}(\varepsilon)v_{ki}, \quad (1.2.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial s_q} (u_k(\varepsilon)v_{kj}) \frac{\partial s_q}{\partial x_j^\varepsilon} = 0, \quad (1.2.17)$$

$$\begin{cases} u_1(\varepsilon) = 0 & \text{en } s_3 = 1, \\ u_2(\varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial R}{\partial t} \cos s_2 & \text{en } s_3 = 1, \\ u_3(\varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial R}{\partial t} \sin s_2 & \text{en } s_3 = 1. \end{cases}$$

**Observación 1.2.2.** Nótese que las expresiones (1.2.12)–(1.2.13) que aparecen en las ecuaciones del Problema 1.2.1 no están definidas para  $\varepsilon = 0$ . Como consecuencia, esto constituye un problema singular que motiva el estudio de este tipo de problemas mediante el análisis asintótico.

### 1.3. Análisis asintótico formal

En esta sección expondremos el análisis asintótico formal del Problema 1.2.1. En primer lugar, supondremos la existencia de un desarrollo asintótico para las incógnitas del problema, es decir, la velocidad y la presión, con la intención de identificar los tres primeros términos de la expansión asintótica tras su sustitución en (1.2.16)–(1.2.17).

De este modo, siguiendo el estudio realizado en [98], para el caso estático con paredes rígidas, supondremos que la solución del Problema 1.2.1 admite un desarrollo formal en potencias de  $\varepsilon$ , de tal forma que las componentes del campo de velocidades y de las presiones se pueden escribir como,

$$u_k(\varepsilon) = u_k^0 + \varepsilon u_k^1 + \varepsilon^2 u_k^2 + \dots \quad (1.3.1)$$

$$p(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} p^0 + \frac{1}{\varepsilon} p^1 + p^2 + \dots \quad (1.3.2)$$

**Observación 1.3.1.** Debemos señalar que esta hipótesis implica, como veremos más adelante, que el gradiente de presiones determina el campo de velocidades en nuestro problema. Como es evidente, otras hipótesis pueden ser consideradas tomando diferentes órdenes de  $\varepsilon$  para la presión y las velocidades en (1.3.1)–(1.3.2), conduciendo a diferentes conclusiones. Tras consultar la bibliografía y analizar alguna de estas posibles elecciones, consideramos este caso como el más interesante.

El siguiente paso a seguir será sustituir el desarrollo asintótico propuesto para las incógnitas en las ecuaciones del Problema 1.2.1. Para ello es necesario en primer lugar escribir las relaciones (1.2.11)–(1.2.13) como desarrollos en potencias de  $\varepsilon$ . Si tenemos en cuenta que

$$\frac{1}{a + \varepsilon b} = c_0 + c_1 \varepsilon + c_2 \varepsilon^2 + \dots,$$

donde  $a, b \in \mathbb{R}$ , tal que  $a \neq 0$ , entonces es sencillo comprobar que

$$c_k = (-1)^k \frac{b^k}{a^{k+1}}, \quad k \geq 0.$$

Por tanto, tomando  $a = 1$  y  $b = -\kappa s_3 R \cos s_2$ , se tiene que

$$\frac{\partial s_q}{\partial x_j^\varepsilon} = \frac{\partial s_q}{\partial \mathbf{x}^\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_j = \frac{1}{\varepsilon} d_{-1j}^q + d_{0j}^q + \varepsilon d_{1j}^q + \varepsilon^2 d_{2j}^q + \dots$$

con  $q = 1, 2, 3$  y donde (véanse (1.2.11)–(1.2.13)),

$$\begin{aligned} d_{-1j}^1 &= 0, & d_{kj}^1 &= (\kappa s_3 R \cos s_2)^k v_{1j}, \\ d_{-1j}^2 &= -\frac{\sin s_2}{R s_3} v_{2j} + \frac{\cos s_2}{R s_3} v_{3j}, & d_{kj}^2 &= -\tau (\kappa s_3 R \cos s_2)^k v_{1j}, \\ d_{-1j}^3 &= \frac{\cos s_2}{R} v_{2j} + \frac{\sin s_2}{R} v_{3j}, & d_{kj}^3 &= -\frac{s_3}{R} \frac{\partial R}{\partial s_1} (\kappa s_3 R \cos s_2)^k v_{1j}, \end{aligned}$$

con  $k \geq 0$ . Asumiremos también que las fuerzas aplicadas (por unidad de masa) admiten un desarrollo asintótico de la forma

$$b_{0k}(\varepsilon) = b_{0k}^0 + \varepsilon b_{0k}^1 + \varepsilon^2 b_{0k}^2 + \dots \quad (1.3.3)$$

Substituimos (1.3.1)–(1.3.2) en las ecuaciones y condición de contorno del Problema 1.2.1. Por un lado obtenemos las ecuaciones de Navier-Stokes en potencias de  $\varepsilon$  (en función de los términos del desarrollo asintótico propuesto) en el dominio de referencia:

$$\begin{aligned} & D_t((u_k^0 + \varepsilon u_k^1 + \varepsilon^2 u_k^2 + \dots) v_{ki}) \\ & + \left( \frac{\partial((u_k^0 + \varepsilon u_k^1 + \varepsilon^2 u_k^2 + \dots) v_{ki})}{\partial s_q} \left( \frac{1}{\varepsilon} d_{-1j}^q + d_{0j}^q + \varepsilon d_{1j}^q + \varepsilon^2 d_{2j}^q + \dots \right) \right) ((u_m^0 + \varepsilon u_m^1 \\ & + \varepsilon^2 u_m^2 + \dots) v_{mj}) - \nu \frac{\partial}{\partial s_m} \left( \frac{\partial((u_k^0 + \varepsilon u_k^1 + \varepsilon^2 u_k^2 + \dots) v_{ki})}{\partial s_q} \left( \frac{1}{\varepsilon} d_{-1j}^q + d_{0j}^q + \varepsilon d_{1j}^q \right. \right. \\ & \left. \left. + \varepsilon^2 d_{2j}^q + \dots \right) \right) \left( \frac{1}{\varepsilon} d_{-1j}^m + d_{0j}^m + \varepsilon d_{1j}^m + \varepsilon^2 d_{2j}^m + \dots \right) \\ & = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\frac{1}{\varepsilon^2} p^0 + \frac{1}{\varepsilon} p^1 + p^2 + \dots)}{\partial s_q} \left( \frac{1}{\varepsilon} d_{-1i}^q + d_{0i}^q + \varepsilon d_{1i}^q + \varepsilon^2 d_{2i}^q + \dots \right) \\ & + (b_{0k}^0 + \varepsilon b_{0k}^1 + \varepsilon^2 b_{0k}^2 + \dots) v_{ki}, \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial s_q}((u_k^0 + \varepsilon u_k^1 + \varepsilon^2 u_k^2 + \dots) v_{kj}) \left( \frac{1}{\varepsilon} d_{-1j}^q + d_{0j}^q + \varepsilon d_{1j}^q + \varepsilon^2 d_{2j}^q + \dots \right) = 0 \quad (1.3.5)$$

y por otro lado, la condición de contorno correspondiente en la frontera lateral, en términos del desarrollo asintótico:

$$\begin{cases} u_1^k = 0, \quad k \geq 0, & \text{en } s_3 = 1, \\ u_2^0 = u_3^0 = 0 & \text{en } s_3 = 1, \\ u_2^1 = \frac{\partial R}{\partial t} \cos s_2, \quad u_3^1 = \frac{\partial R}{\partial t} \sin s_2 & \text{en } s_3 = 1, \\ u_\alpha^k = 0, \quad k \geq 2, \quad \alpha = 2, 3 & \text{en } s_3 = 1. \end{cases} \quad (1.3.6)$$

A continuación, denotamos por  $Q^\varepsilon(t, s)$  el flujo a través de la sección transversal de  $\hat{\Omega}_t^\varepsilon$  en el punto  $s_1 = s$  de la curva media de la tubería, y en el instante  $t$  del periodo de observación,

$$Q^\varepsilon(t, s) := \int_{s_1=s} \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{v}_1 d\Sigma^\varepsilon, \quad (1.3.7)$$

donde  $\int_{s_1=s} \phi d\Sigma$  representa la integral de superficie de  $\phi$  en la sección transversal de  $\hat{\Omega}_t^\varepsilon$  en  $s_1 = s$ . Teniendo en cuenta la aplicación (1.1.7), definimos el flujo escalado en el dominio de referencia  $Q(\varepsilon)$ , como:

$$Q^\varepsilon(t, s_1) = \varepsilon^2 Q(\varepsilon)(t, s_1), \quad (1.3.8)$$

donde,

$$Q(\varepsilon) = R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 s_3 u_1(\varepsilon) ds_3 ds_2. \quad (1.3.9)$$

Además, el área de la sección transversal en el punto  $s_1$  y el instante  $t$  viene dado por

$$A^\varepsilon(t, s_1) := \varepsilon^2 A_0(t, s_1) = \varepsilon^2 \pi R^2(t, s_1), \quad (1.3.10)$$

donde  $A_0$  denota el área de la sección transversal de referencia,  $A_0 = \pi R^2$ .

Con estos conceptos introducidos, podemos demostrar a continuación la siguiente proposición, que utilizaremos más adelante.

**Proposición 1.3.2.** *Consideremos un fluido en el interior de la tubería curva  $\hat{\Omega}_t^\varepsilon$ , cuyo movimiento es descrito por el Problema 1.1.1. Asumamos, que existe un desarrollo asintótico de la forma (1.3.1)–(1.3.2) para las incógnitas del Problema 1.2.1 en el dominio de referencia. Entonces, existe un desarrollo asintótico para el flujo escalado en el dominio de referencia de la forma*

$$Q(\varepsilon) = Q^0 + \varepsilon Q^1 + \varepsilon^2 Q^2 + \dots,$$

donde  $Q^k$  se define como

$$Q^k = R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 s_3 u_1^k ds_3 ds_2 \quad (k \geq 0). \quad (1.3.11)$$

Además, se verifican las siguientes relaciones:

$$\frac{\partial Q^0}{\partial s_1} + \frac{\partial A^0}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial Q^2}{\partial s_1} = 3\kappa^2 A^0 R \frac{\partial R}{\partial t}, \quad (1.3.12)$$

$$\frac{\partial Q^1}{\partial s_1} = \frac{\partial Q^3}{\partial s_1} = 0, \quad \frac{\partial Q^k}{\partial s_1} = -R \frac{\partial R}{\partial t} \left( \int_0^{2\pi} \tilde{\gamma}_k ds_2 \right) \quad (k \geq 4), \quad (1.3.13)$$

siendo,

$$\tilde{\gamma}_k = \hat{\gamma}_k + \hat{c}_k + \gamma_k, \quad \sum_{i+j=k; i \geq 1, j \geq 2} \hat{c}_i \gamma_j = \hat{\gamma}_k, \quad \gamma_k = c_k - c_{k-1} \kappa R \cos s_2, \quad k \geq 4, \quad (1.3.14)$$

con  $c_k$  y  $\hat{c}_k$  definidos por las relaciones (1.1.16)–(1.1.17) y (1.1.20)–(1.1.21), respectivamente.

*Demostración.* Sea  $\tilde{\Omega}_t^\varepsilon = \{\mathbf{x}^\varepsilon = \phi^\varepsilon(s_1, s_2, s_3) \in \hat{\Omega}_t^\varepsilon; a < s_1 < b\}$  con  $a, b \in [0, L]$  arbitrarios. De (1.1.4) y el Teorema de la divergencia de Gauss, deducimos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\tilde{\Omega}_t^\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon dx^\varepsilon = \int_{\partial \tilde{\Omega}_t^\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon d\Sigma^\varepsilon \\ &= \int_{s_1=a} \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon d\Sigma^\varepsilon + \int_{s_1=b} \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon d\Sigma^\varepsilon + \int_{\Sigma_t^\varepsilon \cap \tilde{\Omega}_t^\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon d\Sigma^\varepsilon, \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

siendo  $\mathbf{n}^\varepsilon$  el vector normal exterior unitario en la frontera de  $\tilde{\Omega}_t^\varepsilon$ . En los extremos  $s_1 = a$  y  $s_1 = b$ , teniendo en cuenta (1.2.1) se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon &= (u_k(\varepsilon) \mathbf{v}_k) \cdot (-\mathbf{v}_1) = -u_1(\varepsilon) && \text{en } s_1 = a, \\ \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon &= (u_k(\varepsilon) \mathbf{v}_k) \cdot (\mathbf{v}_1) = u_1(\varepsilon) && \text{en } s_1 = b. \end{aligned}$$

Por tanto, por (1.3.7) y (1.3.15), obtenemos que

$$0 = -Q^\varepsilon(t, a) + Q^\varepsilon(t, b) + \int_{\Sigma_t^\varepsilon \cap \tilde{\Omega}_t^\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon d\Sigma^\varepsilon. \quad (1.3.16)$$

En los puntos de la cara lateral de la tubería, habíamos considerado continuidad entre el movimiento del fluido y los desplazamientos de la pared (véase (1.1.5)). Así, utilizando (1.1.18) deducimos que,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathbf{c}(s_1) + \varepsilon R(t, s_1) (\cos s_2 \mathbf{v}_2(s_1) + \sin s_2 \mathbf{v}_3(s_1)) \right) \cdot \mathbf{n}^\varepsilon \\ &= \varepsilon \frac{\partial R}{\partial t} \left( 1 - \varepsilon^2 \kappa^2 R^2 \cos^2 s_2 + \sum_{k=2}^{\infty} c_k (1 - \varepsilon \kappa R \cos s_2) \varepsilon^k \right) \\ &= \varepsilon \frac{\partial R}{\partial t} \left( 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_k \varepsilon^k \right), \end{aligned}$$

siendo,

$$\gamma_2 = c_2 - \kappa^2 R^2 \cos^2 s_2 = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial R}{\partial s_1} \right)^2, \quad (1.3.17)$$

$$\gamma_3 = c_3 - c_2 \kappa R \cos s_2 = -\kappa R \cos s_2 \left( \frac{\partial R}{\partial s_1} \right)^2, \quad (1.3.18)$$

donde hemos utilizado las expresiones de  $c_2$  y  $c_3$  en (1.1.16)–(1.1.17), mientras que los  $\gamma_k$ ,  $k \geq 4$  están definidos como se indica en (1.3.14). De esta forma, se tiene:

$$\int_{\Sigma_t^\varepsilon \cap \tilde{\Omega}_t^\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon d\Sigma^\varepsilon = \int_a^b \int_0^{2\pi} \varepsilon \frac{\partial R}{\partial t} \left( 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_k \varepsilon^k \right) \left| \frac{\partial \phi^\varepsilon}{\partial s_2} \wedge \frac{\partial \phi^\varepsilon}{\partial s_1} \right| ds_2 ds_1$$

Entonces, utilizando (1.1.19)–(1.1.21) y realizando cálculos elementales, deducimos que:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_t^\varepsilon \cap \tilde{\Omega}_t^\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon d\Sigma^\varepsilon &= \int_a^b \int_0^{2\pi} \varepsilon^2 R \frac{\partial R}{\partial t} \left( 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_k \varepsilon^k \right) \left( \sum_{m=0}^{\infty} \hat{c}_m \varepsilon^m \right) ds_2 ds_1 \\ &= \int_a^b 2\pi \varepsilon^2 R \frac{\partial R}{\partial t} ds_1 + \int_a^b \int_0^{2\pi} \varepsilon^2 R \frac{\partial R}{\partial t} \left( \sum_{k=2}^{\infty} \tilde{\gamma}_k \varepsilon^k \right) ds_2 ds_1, \end{aligned} \quad (1.3.19)$$

siendo,

$$\tilde{\gamma}_2 = \kappa^2 R^2 \cos^2 s_2 - \left( \frac{\partial R}{\partial s_1} \right)^2, \quad \tilde{\gamma}_3 = \kappa R \cos s_2 \left( \left( \frac{\partial R}{\partial s_1} \right)^2 - 3\kappa^2 R^2 \cos^2 s_2 \right), \quad (1.3.20)$$

donde hemos utilizado las expresiones de  $\hat{c}_1$  y  $\hat{c}_2$  en (1.1.20) y de  $\gamma_2$  y  $\gamma_3$  en (1.3.17)–(1.3.18), mientras que los  $\tilde{\gamma}_k$ ,  $k \geq 4$  están definidos como se indica en (1.3.14). Sustituyendo (1.3.19) en (1.3.16) y dividiendo por  $b - a$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{Q^\varepsilon(t, b) - Q^\varepsilon(t, a)}{b - a} + \frac{1}{b - a} \int_a^b 2\pi \varepsilon^2 R \frac{\partial R}{\partial t} ds_1 \\ &\quad + \frac{1}{b - a} \int_a^b \int_0^{2\pi} \varepsilon^2 R \frac{\partial R}{\partial t} \left( \sum_{k=2}^{\infty} \tilde{\gamma}_k \varepsilon^k \right) ds_2 ds_1. \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando  $b$  tiende a  $a$  y teniendo en cuenta la definición (1.3.10), deducimos la siguiente relación:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial Q^\varepsilon}{\partial s_1} + 2\pi \varepsilon^2 R \frac{\partial R}{\partial t} + \varepsilon^2 R \frac{\partial R}{\partial t} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=2}^{\infty} \tilde{\gamma}_k \varepsilon^k \right) ds_2 \\ &= \frac{\partial Q^\varepsilon}{\partial s_1} + \frac{\partial A^\varepsilon}{\partial t} + \varepsilon^2 R \frac{\partial R}{\partial t} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=2}^{\infty} \tilde{\gamma}_k \varepsilon^k \right) ds_2. \end{aligned}$$

Por una parte, como  $A^\varepsilon = \varepsilon^2 A^0$  y  $Q^\varepsilon = \varepsilon^2 Q(\varepsilon)$  (véanse (1.3.8) y (1.3.10)), se tiene que

$$\frac{\partial Q(\varepsilon)}{\partial s_1} + \frac{\partial A^0}{\partial t} + R \frac{\partial R}{\partial t} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=2}^{\infty} \tilde{\gamma}_k \varepsilon^k \right) ds_2 = 0. \quad (1.3.21)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta el desarrollo asintótico de  $u_1(\varepsilon)$  en (1.3.1) (para  $k = 1$ ) y (1.3.9), se deduce de forma inmediata que existe un desarrollo asintótico de la forma:

$$Q(\varepsilon) = Q^0 + \varepsilon Q^1 + \varepsilon^2 Q^2 + \dots, \quad (1.3.22)$$

donde,

$$Q^k = R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 s_3 u_1^k ds_3 ds_2.$$

Sustituimos (1.3.22) en (1.3.21) e identificamos términos del mismo orden en  $\varepsilon$ . Por un lado, deducimos que,

$$\frac{\partial Q^0}{\partial s_1} + \frac{\partial A^0}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial Q^1}{\partial s_1} = 0.$$

Por otro lado, utilizando (1.3.20) deducimos que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q^2}{\partial s_1} &= -R \frac{\partial R}{\partial t} \int_0^{2\pi} \tilde{\gamma}_2 ds_2 = 3\pi\kappa^2 R^3 \frac{\partial R}{\partial t} = 3\kappa^2 A^0 R \frac{\partial R}{\partial t}, \\ \frac{\partial Q^3}{\partial s_1} &= -R \frac{\partial R}{\partial t} \int_0^{2\pi} \tilde{\gamma}_3 ds_2 = 0, \\ \frac{\partial Q^k}{\partial s_1} &= -R \frac{\partial R}{\partial t} \left( \int_0^{2\pi} \hat{\gamma}_k ds_2 \right) \quad (k \geq 4), \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que  $A^0 = \pi R^2$ . Así, concluimos la demostración.  $\square$

**Observación 1.3.3.** *Este resultado es consecuencia directa de la ley de conservación de la masa. En efecto, similares deducciones han sido estudiadas en referencias previas, como por ejemplo [54].*

Antes de presentar el teorema principal de este capítulo, recordemos un resultado que se puede encontrar en el Teorema 2.4 de [152] y que utilizaremos en lo que sigue.

**Teorema 1.3.4.** *Sea  $\Omega$  un conjunto acotado de clase  $\mathcal{C}^2$  en  $\mathbb{R}^n$  y  $\Gamma = \partial\Omega$ . Sean dados  $\mathbf{f} \in [H^{-1}(\Omega)]^n$ ,  $g \in L^2(\Omega)$ ,  $\boldsymbol{\varphi} \in [H^{1/2}(\Gamma)]^n$ , tal que*

$$\int_{\Omega} g d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} d\Gamma,$$

donde  $\mathbf{n}$  denota el vector normal unitario a lo largo de  $\Gamma$ . Entonces, existen  $\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^n$ ,  $p \in L^2(\Omega)$ , tal que  $(\mathbf{u}, p)$  es la solución del problema de Stokes:

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{en } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = g & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi} & \text{en } \Gamma. \end{cases}$$

Además  $\mathbf{u}$  es única y  $p$  es única salvo suma de una constante.



Introducimos ahora las coordenadas cartesianas locales en la sección transversal de la tubería en  $s_1$  como los puntos  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$  definidos por

$$\mathbf{z} = (z_2, z_3) = (s_3 \cos s_2, s_3 \sin s_2), \quad (1.3.23)$$

y sea  $\omega = \{(z_2, z_3) \in \mathbb{R}^2 / z_2^2 + z_3^2 < 1\}$  (de modo que  $(s_3, s_2)$  denotarán las coordenadas polares en la misma sección transversal).

**Teorema 1.3.5.** *Asumamos que existe un desarrollo asintótico de la forma (1.3.1)–(1.3.2). Entonces:*

(i) *El término de orden cero de la velocidad,  $\mathbf{u}^0$ , verifica que*

$$u_1^0 = \frac{R^2}{4\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} (s_3^2 - 1), \quad (1.3.24)$$

$$u_2^0 = u_3^0 = 0, \quad (1.3.25)$$

*mientras que el término de la presión  $p^0 = p^0(t, s_1)$  es solución del problema:*

$$\frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^4 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) = 16\nu\rho_0 R \frac{\partial R}{\partial t}, \quad (1.3.26)$$

*con las condiciones de contorno adecuadas.*

(ii) *El término de orden uno de la velocidad,  $\mathbf{u}^1$ , verifica que*

$$u_1^1 = \left[ \frac{3R^3 \kappa s_3 \cos s_2}{16\nu\rho_0} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} + \frac{R^2}{4\nu\rho_0} \frac{\partial p^1}{\partial s_1} \right] (s_3^2 - 1), \quad (1.3.27)$$

$$u_2^1 = \frac{s_3 R}{16\rho_0\nu} \left[ 2 \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) - R^2 s_3^2 \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} \right] \cos s_2, \quad (1.3.28)$$

$$u_3^1 = \frac{s_3 R}{16\rho_0\nu} \left[ 2 \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) - R^2 s_3^2 \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} \right] \sin s_2, \quad (1.3.29)$$

*mientras que el término de la presión  $p^1 = p^1(t, s_1)$  es solución del problema:*

$$\frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^4 \frac{\partial p^1}{\partial s_1} \right) = 0, \quad (1.3.30)$$

*con las condiciones de contorno adecuadas.*

(iii) *La primera componente del término de orden dos de la velocidad,  $\mathbf{u}^2$ , viene dada por la expresión:*

$$\begin{aligned} u_1^2 = & \frac{R^2}{16} \left[ \frac{R^2}{4\rho_0\nu^2} \frac{\partial^2 p^0}{\partial t \partial s_1} - \frac{R^4}{16\rho_0^2\nu^3} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} - \frac{R^2}{2\rho_0\nu} \frac{\partial^3 p^0}{\partial s_1^3} + \frac{11\kappa^2 R^2}{8\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right] (s_3^4 - 1) \\ & + \frac{R^2}{4} \left[ -\frac{1}{4\rho_0\nu^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) + \frac{R^2}{16\rho_0^2\nu^3} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4\rho_0\nu} \frac{\partial^2}{\partial s_1^2} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) - \frac{7\kappa^2 R^2}{16\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} + \frac{1}{\rho_0\nu} \frac{\partial p_0^2}{\partial s_1} - \frac{b_{01}}{\nu} \left( s_3^2 - 1 \right) \\
& + \frac{R^6}{1152\rho_0^2\nu^3} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} (s_3^6 - 1) + \frac{3\kappa R^3}{16\rho_0\nu} \frac{\partial p^1}{\partial s_1} (s_3^3 - s_3) \cos s_2 \\
& + \frac{5\kappa^2 R^4}{64\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} (s_3^4 - s_3^2) \cos(2s_2),
\end{aligned} \tag{1.3.31}$$

mientras que el término de la presión  $p^2$  viene dado por

$$p^2 = -\frac{R^2}{4} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} s_3^2 + p_0^2(t, s_1), \tag{1.3.32}$$

donde  $p_0^2(t, s_1)$  es solución del problema:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^4 \frac{\partial p_0^2}{\partial s_1} \right) = & \frac{\partial}{\partial s_1} \left( -\frac{3R^8}{64\rho_0\nu^2} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} - \frac{R^6}{12} \frac{\partial^3 p^0}{\partial s_1^3} - \frac{\kappa^2 R^6}{48} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} + \frac{R^5}{2\nu} \frac{\partial R}{\partial t} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right. \\
& - \frac{R^7}{8\rho_0\nu^2} \frac{\partial R}{\partial s_1} \left( \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right)^2 - \frac{R^4}{2} \left( \frac{\partial R}{\partial s_1} \right)^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} - \frac{R^5}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial s_1^2} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} - R^5 \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} \\
& \left. + \frac{R^6}{6\nu} \frac{\partial^2 p^0}{\partial t \partial s_1} + R^4 \rho_0 b_{01} \right) + 3\pi\kappa^2 R^3 \frac{\partial R}{\partial t},
\end{aligned} \tag{1.3.33}$$

con las condiciones de contorno adecuadas. Sea  $\mathbf{U}^2 = (u_2^2, u_3^2)$ . Entonces el par  $(\mathbf{U}^2, p^3)$  es solución del siguiente problema:

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{z}} \mathbf{U}^2 = \frac{R}{\rho_0\nu} \nabla_{\mathbf{z}} p^3 + \mathbf{F} & \text{en } \omega, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{z}} \mathbf{U}^2 = g & \text{en } \omega, \\ \mathbf{U}^2 = \mathbf{0} & \text{en } \partial\omega, \end{cases} \tag{1.3.34}$$

donde los campos  $g$  y  $\mathbf{F}$  vienen definidos, respectivamente, por

$$\begin{aligned}
g = & \left( -\frac{\kappa R^4}{2\rho_0\nu} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} - \frac{3\kappa' R^4}{16\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) z_2 (z_2^2 + z_3^2) - \frac{3\kappa\tau R^4}{16\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} z_3 (z_2^2 + z_3^2) \\
& + \left( \frac{9\kappa R^3}{8\rho_0\nu} \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} + \frac{9\kappa R^4}{16\rho_0\nu} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} + \frac{3\kappa' R^4}{16\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) z_2 \\
& + \frac{3\kappa\tau R^4}{16\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} z_3 - \frac{R^3}{4\rho_0\nu} \frac{\partial^2 p^1}{\partial s_1^2} (z_2^2 + z_3^2) + \frac{R}{4\rho_0\nu} \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^1}{\partial s_1} \right),
\end{aligned} \tag{1.3.35}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} = & \left( \frac{\kappa R^6}{16\rho_0^2\nu^3} \left( \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right)^2 ((z_2^2 + z_3^2)^2 + 1) + \frac{\kappa' R^4}{4\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} + \frac{5R^2\kappa}{8\rho_0\nu} \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) \right. \\
& \left. + \left( -\frac{\kappa R^6}{8\rho_0^2\nu^3} \left( \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right)^2 - \frac{9R^4\kappa}{16\rho_0\nu} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} - \frac{\kappa' R^4}{4\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) (z_2^2 + z_3^2) - \frac{\kappa R^4}{8\rho_0\nu} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} z_2^2 \right.
\end{aligned}$$

$$-\frac{R^2}{\nu}b_{02}, \quad -\frac{\kappa\tau R^4}{4\rho_0\nu}\frac{\partial p^0}{\partial s_1}(z_2^2 + z_3^2 - 1) - \frac{2R^4\kappa}{16\rho_0\nu}\frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2}z_2z_3 - \frac{R^2}{\nu}b_{03} \Big). \quad (1.3.36)$$

El problema (1.3.34) tiene solución única  $(\mathbf{U}^2, p^3)$ , con  $\mathbf{U}^2$  única y  $p^3$  única salvo la suma de una función que dependa de  $t$  y  $s_1$ . Esta solución puede ser obtenida explícitamente (véase el Apéndice A.2).

*Demostración.* Tras la sustitución de (1.3.1)–(1.3.2) en (1.2.16)–(1.2.17), obtuvimos las ecuaciones en potencias de  $\varepsilon$  en (1.3.4)–(1.3.5). En lo que sigue, expondremos el procedimiento seguido para la obtención de los problemas correspondientes y, en su caso, de las expresiones explícitas de algunos de los términos del desarrollo asintótico propuesto.

(i) Agrupando los términos multiplicados por la menor de las potencias que encontramos en (1.3.4), es decir,  $\varepsilon^{-3}$ , hallamos las siguientes ecuaciones relacionadas con el término  $p^0$  de la presión:

$$-\frac{\sin s_2}{s_3}\frac{\partial p^0}{\partial s_2} + (\cos s_2)\frac{\partial p^0}{\partial s_3} = 0, \quad \frac{\cos s_2}{s_3}\frac{\partial p^0}{\partial s_2} + (\sin s_2)\frac{\partial p^0}{\partial s_3} = 0.$$

Por tanto, es claro que  $\frac{\partial p^0}{\partial s_2} = \frac{\partial p^0}{\partial s_3} = 0$ , y así,

$$p^0 = p^0(t, s_1). \quad (1.3.37)$$

Es decir, el término de orden  $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$  de la presión no depende de las variables de la sección transversal, o lo que es lo mismo, solo depende del tiempo y del punto  $s_1$  en el que nos encontremos de la línea media de la tubería curva.

Si ahora agrupamos los términos multiplicados por la potencia  $\varepsilon^{-2}$  en la ecuación (1.3.4), obtenemos las ecuaciones:

$$\frac{1}{(Rs_3)^2}\frac{\partial^2 u_1^0}{\partial s_2^2} + \frac{1}{R^2 s_3}\frac{\partial u_1^0}{\partial s_3} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u_1^0}{\partial s_3^2} = \frac{1}{\nu\rho_0}\frac{\partial p^0}{\partial s_1}, \quad (1.3.38)$$

$$\frac{1}{(Rs_3)^2}\frac{\partial^2 u_2^0}{\partial s_2^2} + \frac{1}{R^2 s_3}\frac{\partial u_2^0}{\partial s_3} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u_2^0}{\partial s_3^2} = \frac{1}{\nu\rho_0}\left(-\frac{\sin s_2}{Rs_3}\frac{\partial p^1}{\partial s_2} + \frac{\cos s_2}{R}\frac{\partial p^1}{\partial s_3}\right), \quad (1.3.39)$$

$$\frac{1}{(Rs_3)^2}\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial s_2^2} + \frac{1}{R^2 s_3}\frac{\partial u_3^0}{\partial s_3} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial s_3^2} = \frac{1}{\nu\rho_0}\left(\frac{\cos s_2}{Rs_3}\frac{\partial p^1}{\partial s_2} + \frac{\sin s_2}{R}\frac{\partial p^1}{\partial s_3}\right). \quad (1.3.40)$$

Utilizando el cambio de variable dado por (1.3.23) en (1.3.38) y teniendo en cuenta la condición de contorno correspondiente en (1.3.6), obtenemos el siguiente problema para la componente axial del término de orden cero de la velocidad:

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{z}} u_1^0 = \frac{R^2}{\nu\rho_0}\frac{\partial p^0}{\partial s_1} & \text{en } \omega, \\ u_1^0 = 0 & \text{en } \partial\omega. \end{cases} \quad (1.3.41)$$

Este problema (1.3.41) tiene solución única, cuya expresión es:

$$u_1^0 = \frac{R^2}{4\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} (s_3^2 - 1).$$

Ahora, teniendo en cuenta (1.3.11), (1.3.12) y que  $A^0 = \pi R^2$ , tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 s_3 u_1^0 ds_3 ds_2 \right) = -2\pi R \frac{\partial R}{\partial t}.$$

Por tanto, utilizando la expresión de  $u_1^0$  que acabamos de deducir en este paso, obtenemos del miembro de la izquierda de la ecuación anterior que

$$\frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{R^2}{4\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} s_3 (s_3^2 - 1) ds_3 ds_2 \right) = \frac{\partial}{\partial s_1} \left( -\frac{2\pi R^4}{16\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right)$$

Como  $p^0$  no depende de las variables transversales (véase (1.3.37)), tenemos que  $p^0$  verifica la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^4 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) = 16\nu\rho_0 R \frac{\partial R}{\partial t}, \quad (1.3.42)$$

que junto con las condiciones de contorno adecuadas, tiene solución única.

A continuación, agrupemos los términos multiplicados por la menor potencia que encontramos en (1.3.5), es decir  $\varepsilon^{-1}$ , para obtener que

$$-\frac{\sin s_2}{s_3} \frac{\partial u_2^0}{\partial s_2} + (\cos s_2) \frac{\partial u_2^0}{\partial s_3} + \frac{\cos s_2}{s_3} \frac{\partial u_3^0}{\partial s_2} + (\sin s_2) \frac{\partial u_3^0}{\partial s_3} = 0.$$

Utilizando el cambio de variable (1.3.23) en esta ecuación y en las ecuaciones (1.3.39)–(1.3.40) y teniendo en cuenta las condiciones de contorno para las componentes  $u_2^0$  y  $u_3^0$  en (1.3.6), deducimos que las componentes transversales del término de orden  $\mathcal{O}(1)$  de la velocidad, que denotaremos por  $\mathbf{U}^0 = (u_2^0, u_3^0)$ , y el término de orden  $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$  de la presión,  $p^1$ , son la solución del problema:

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{z}} \mathbf{U}^0 = \frac{R}{\nu\rho_0} \nabla_{\mathbf{z}} p^1 & \text{en } \omega, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{z}} \mathbf{U}^0 = 0 & \text{en } \omega, \\ \mathbf{U}^0 = \mathbf{0} & \text{en } \partial\omega. \end{cases}$$

Aplicando el Teorema 1.3.4, este problema tiene una única solución (salvo una función que dependa únicamente de  $t$  y  $s_1$ , para el término de la presión). Por tanto, esta solución es

$$u_2^0 = u_3^0 = 0, \quad p^1 = p^1(t, s_1).$$

(ii) Agrupando los términos multiplicados por  $\varepsilon^{-1}$  en la ecuación (1.3.4), se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{(Rs_3)^2} \frac{\partial^2 u_1^1}{\partial s_2^2} + \frac{1}{R^2 s_3} \frac{\partial u_1^1}{\partial s_3} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_1^1}{\partial s_3^2} &= \frac{1}{\nu \rho_0} \left( \frac{\partial p^1}{\partial s_1} + R\kappa s_3 \cos s_2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) \\ &\quad + \frac{\kappa \cos s_2}{R} \frac{\partial u_1^0}{\partial s_3}, \end{aligned} \quad (1.3.43)$$

$$\frac{1}{(Rs_3)^2} \frac{\partial^2 u_2^1}{\partial s_2^2} + \frac{1}{R^2 s_3} \frac{\partial u_2^1}{\partial s_3} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_2^1}{\partial s_3^2} = \frac{1}{\nu \rho_0} \left( -\frac{\sin s_2}{Rs_3} \frac{\partial p^2}{\partial s_2} + \frac{\cos s_2}{R} \frac{\partial p^2}{\partial s_3} \right), \quad (1.3.44)$$

$$\frac{1}{(Rs_3)^2} \frac{\partial^2 u_3^1}{\partial s_2^2} + \frac{1}{R^2 s_3} \frac{\partial u_3^1}{\partial s_3} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_3^1}{\partial s_3^2} = \frac{1}{\nu \rho_0} \left( \frac{\cos s_2}{Rs_3} \frac{\partial p^2}{\partial s_2} + \frac{\sin s_2}{R} \frac{\partial p^2}{\partial s_3} \right). \quad (1.3.45)$$

Utilizando (1.3.24) en (1.3.43), el cambio de variable (1.3.23) y teniendo en cuenta la condición de contorno en (1.3.6), tenemos que  $u_1^1$  será la única solución del problema:

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{z}} u_1^1 = \frac{R^2}{\nu \rho_0} \left( \frac{\partial p^1}{\partial s_1} + \frac{3R\kappa}{2} z_2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) & \text{en } \omega, \\ u_1^1 = 0 & \text{en } \partial\omega. \end{cases}$$

Entonces, se puede comprobar (por ejemplo, por sustitución en (1.3.43)) que la única solución es:

$$u_1^1 = \left( \frac{3R^3 \kappa s_3 \cos s_2}{16\nu \rho_0} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} + \frac{R^2}{4\nu \rho_0} \frac{\partial p^1}{\partial s_1} \right) (s_3^2 - 1).$$

Ahora, teniendo en cuenta (1.3.11) y (1.3.13) tenemos que,

$$\frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 s_3 u_1^1 ds_3 ds_2 \right) = 0,$$

igualdad que, sustituyendo la expresión de  $u_1^1$ , es equivalente a

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[ \frac{3R^3 \kappa s_3 \cos s_2}{16\nu \rho_0} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} + \frac{R^2}{4\nu \rho_0} \frac{\partial p^1}{\partial s_1} \right] s_3 (s_3^2 - 1) ds_3 ds_2 \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{R^2}{4\rho_0 \nu} \frac{\partial p^1}{\partial s_1} s_3 (s_3^2 - 1) ds_3 ds_2 \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial s_1} \left( -\frac{2\pi R^4}{16\rho_0 \nu} \frac{\partial p^1}{\partial s_1} \right). \end{aligned}$$

Por tanto, el término  $p^1$  (el cual es únicamente función de  $t$  y  $s_1$ , por lo visto en (i)) es solución de

$$\frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^4 \frac{\partial p^1}{\partial s_1} \right) = 0,$$

con las condiciones de contorno adecuadas. Si ahora agrupamos los términos multiplicados por  $\varepsilon^0 = 1$  en (1.3.5), obtenemos

$$-\frac{\sin s_2}{s_3} \frac{\partial u_2^1}{\partial s_2} + (\cos s_2) \frac{\partial u_2^1}{\partial s_3} + \frac{\cos s_2}{s_3} \frac{\partial u_3^1}{\partial s_2} + (\sin s_2) \frac{\partial u_3^1}{\partial s_3} + R \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial s_1} - \tau \frac{\partial u_1^0}{\partial s_2} - \frac{s_3}{R} \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial u_1^0}{\partial s_3} \right) = 0.$$

Sea  $\mathbf{U}^1 = (u_2^1, u_3^1)$ . Aplicando el cambio de variable (1.3.23) a la ecuación anterior y a las ecuaciones (1.3.44)–(1.3.45), y teniendo en cuenta las condiciones de contorno correspondientes en (1.3.6), hallamos que  $(\mathbf{U}^1, p^2)$  es solución del problema:

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{z}} \mathbf{U}^1 = \frac{R}{\nu \rho_0} \nabla_{\mathbf{z}} p^2 & \text{en } \omega, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{z}} \mathbf{U}^1 = \frac{R}{4\rho_0\nu} \left( \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) - (z_2^2 + z_3^2) R^2 \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} \right) =: g^1 & \text{en } \omega, \\ \mathbf{U}^1 = \frac{\partial R}{\partial t} (\cos s_2, \sin s_2) =: \boldsymbol{\varphi}^1 & \text{en } \partial\omega. \end{cases} \quad (1.3.46)$$

Aplicando el Teorema 1.3.4, se tiene que este problema tendrá solución única si, y solo si, se verifica la condición de compatibilidad dada por

$$\int_{\omega} g^1 = \int_{\partial\omega} \boldsymbol{\varphi}^1 \cdot \mathbf{n}, \quad (1.3.47)$$

donde  $\mathbf{n} := \hat{\mathbf{n}} = (\cos s_2, \sin s_2)$  es el vector normal unitario exterior a lo largo de  $\partial\omega$ . Por un lado, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\omega} g^1 &= \int_{\omega} \frac{R}{4\rho_0\nu} \left( \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) - (z_2^2 + z_3^2) R^2 \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} \right) dz_2 dz_3 \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{s_3 R}{4\rho_0\nu} \left( \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) - s_3^2 R^2 \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} \right) ds_2 ds_3 \\ &= \frac{2\pi R}{4\rho_0\nu} \int_0^1 \left( s_3 \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) - s_3^3 R^2 \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} \right) ds_3 \\ &= \frac{2\pi R}{16\rho_0\nu} \left( 2 \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) - R^2 \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} \right). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\int_{\partial\omega} \boldsymbol{\varphi}^1 \cdot \mathbf{n} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial R}{\partial t} ds_2 = 2\pi \frac{\partial R}{\partial t}.$$

Por tanto, la condición de compatibilidad (1.3.47) es equivalente a

$$\frac{R}{16\rho_0\nu} \left( 2 \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) - R^2 \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} \right) = \frac{\partial R}{\partial t}.$$

Realizando operaciones sencillas, se puede comprobar que esta ecuación es equivalente a (1.3.42). Entonces, concluimos que existe una solución única  $(\mathbf{U}^1, p^2)$  de (1.3.46) tal que  $\mathbf{U}^1$  es única y que  $p^2$  es única salvo una función dependiente de  $t$  y  $s_1$ . Dicha solución, puede ser obtenida de forma explícita (véase el Apéndice A.1 para más detalles) y viene dada por

$$\mathbf{U}^1 = \frac{R}{16\rho_0\nu} \left( 2 \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) - (z_2^2 + z_3^2) R^2 \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} \right) (z_2, z_3),$$

$$p^2 = -\frac{R^2}{4} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} (z_2^2 + z_3^2) + p_0^2(t, s_1),$$

donde la función  $p_0^2$  será caracterizada más adelante (véase (1.3.51)).

(iii) Agrupando los términos multiplicados por  $\varepsilon^0 = 1$  en (1.3.4), obtenemos que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(u_k^0 v_{ki})}{\partial t} - \frac{s_3}{R} \frac{\partial R}{\partial t} \frac{\partial(u_k^0 v_{ki})}{\partial s_3} + \left( -\frac{\sin s_2}{Rs_3} u_2^1 + \frac{\cos s_2}{Rs_3} u_3^1 \right) \frac{\partial(u_k^0 v_{ki})}{\partial s_2} \\ & + \left( \frac{\cos s_2}{R} u_2^1 + \frac{\sin s_2}{R} u_3^1 \right) \frac{\partial(u_k^0 v_{ki})}{\partial s_3} + \frac{\partial(u_k^0 v_{ki})}{\partial s_1} u_1^0 - \tau \frac{\partial(u_k^0 v_{ki})}{\partial s_2} u_1^0 \\ & + \left( -\frac{\sin s_2}{Rs_3} u_2^0 + \frac{\cos s_2}{Rs_3} u_3^0 \right) \frac{\partial(u_k^1 v_{ki})}{\partial s_2} - \frac{s_3}{R} \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial(u_k^0 v_{ki})}{\partial s_3} u_1^0 \\ & + \left( \frac{\cos s_2}{R} u_2^0 + \frac{\sin s_2}{R} u_3^0 \right) \frac{\partial(u_k^1 v_{ki})}{\partial s_3} \\ & - \nu \left( \kappa^2 \cos s_2 \sin s_2 \frac{\partial(u_k^0 v_{ki})}{\partial s_2} - \kappa^2 s_3 \cos^2 s_2 \frac{\partial(u_k^0 v_{ki})}{\partial s_3} + \frac{\partial^2(u_k^0 v_{ki})}{\partial s_1^2} \right. \\ & - \tau' \frac{\partial(u_k^0 v_{ki})}{\partial s_2} - \frac{s_3}{R} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial s_1^2} - \frac{2}{R} \left( \frac{\partial R}{\partial s_1} \right)^2 \right) \frac{\partial(u_k^0 v_{ki})}{\partial s_3} - 2\tau \frac{\partial^2(u_k^0 v_{ki})}{\partial s_1 \partial s_2} \\ & - 2 \frac{s_3}{R} \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial^2(u_k^0 v_{ki})}{\partial s_1 \partial s_3} + 2\tau \frac{s_3}{R} \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial^2(u_k^0 v_{ki})}{\partial s_3 \partial s_2} + \tau^2 \frac{\partial^2(u_k^0 v_{ki})}{\partial s_2^2} \\ & + \frac{s_3^2}{R^2} \left( \frac{\partial R}{\partial s_1} \right)^2 \frac{\partial^2(u_k^0 v_{ki})}{\partial s_3^2} + \kappa \frac{\sin s_2}{Rs_3} \frac{\partial(u_k^1 v_{ki})}{\partial s_2} - \kappa \frac{\cos s_2}{R} \frac{\partial(u_k^1 v_{ki})}{\partial s_3} \\ & \left. + \frac{1}{(Rs_3)^2} \frac{\partial^2(u_k^2 v_{ki})}{\partial s_2^2} + \frac{1}{R^2 s_3} \frac{\partial(u_k^2 v_{ki})}{\partial s_3} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2(u_k^2 v_{ki})}{\partial s_3^2} \right) = DP_k^0 v_{ki} + b_{0k}^0 v_{ki}, \quad (1.3.48) \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} DP_1^0 &= -\frac{1}{\rho_0} \left( \kappa^2 s_3^2 R^2 \cos^2 s_2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} + \kappa s_3 R \cos s_2 \frac{\partial p^1}{\partial s_1} - \tau \kappa s_3 R \cos s_2 \frac{\partial p^1}{\partial s_2} \right. \\ & \quad \left. - \kappa s_3^2 \cos s_2 \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial p^1}{\partial s_3} + \frac{\partial p^2}{\partial s_1} - \tau \frac{\partial p^2}{\partial s_2} - \frac{s_3}{R} \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial p^2}{\partial s_3} \right), \\ DP_2^0 &= -\frac{1}{\rho_0} \left( -\frac{\sin s_2}{Rs_3} \frac{\partial p^3}{\partial s_2} + \frac{\cos s_2}{R} \frac{\partial p^3}{\partial s_3} \right), \end{aligned}$$



$$DP_3^0 = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\cos s_2}{Rs_3} \frac{\partial p^3}{\partial s_2} + \frac{\sin s_2}{R} \frac{\partial p^3}{\partial s_3} \right).$$

Puesto que  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  es una base ortonormal, podemos obtener tres ecuaciones a partir de (1.3.48) agrupando los términos que multiplican a cada uno de los elementos de la base. Si además utilizamos los resultados obtenidos en los apartados (i) y (ii) de esta demostración, los términos multiplicados por  $\mathbf{v}_1$  en (1.3.48), nos conducen a la ecuación:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(Rs_3)^2} \frac{\partial^2 u_1^2}{\partial s_2^2} + \frac{1}{R^2 s_3} \frac{\partial u_1^2}{\partial s_3} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_1^2}{\partial s_3^2} \\ &= \left( \frac{R^2}{4\rho_0\nu^2} \frac{\partial^2 p^0}{\partial t \partial s_1} - \frac{R^4}{16\rho^2\nu^3} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} - \frac{R^2}{2\rho_0\nu} \frac{\partial^3 p^0}{\partial s_1^3} + \frac{7\kappa^2 R^2}{16\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) s_3^2 \\ &+ \frac{R^4}{32\rho_0^2\nu^3} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} s_3^4 - \frac{1}{4\rho_0\nu^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) + \frac{R^2}{16\rho_0^2\nu^3} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) \\ &+ \frac{1}{4\rho_0\nu} \frac{\partial^2}{\partial s_1^2} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) - \frac{7\kappa^2 R^2}{16\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} + \frac{1}{\rho_0\nu} \frac{\partial p_0^2}{\partial s_1} \\ &+ \frac{3\kappa R}{2\rho_0\nu} \frac{\partial p^1}{\partial s_1} s_3 \cos s_2 + \frac{15\kappa^2 R^2}{8\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} s_3^2 \cos^2 s_2 - \frac{b_{01}}{\nu}. \end{aligned}$$

Utilizando el cambio de variable (1.3.23) en esta ecuación, junto con la condición de contorno correspondiente a  $u_1^2$  en (1.3.6), nos conduce a que  $u_1^2$  será la única solución del problema:

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta_{\mathbf{z}} u_1^2 &= \left( \frac{R^4}{4\rho_0\nu^2} \frac{\partial^2 p^0}{\partial t \partial s_1} - \frac{R^6}{16\rho^2\nu^3} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} - \frac{R^4}{2\rho_0\nu} \frac{\partial^3 p^0}{\partial s_1^3} + \frac{7\kappa^2 R^4}{16\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) (z_2^2 + z_3^2) \\ &+ \frac{R^6}{32\rho_0^2\nu^3} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} (z_2^2 + z_3^2)^2 - \frac{R^2}{4\rho_0\nu^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) \\ &+ \frac{R^4}{16\rho_0^2\nu^3} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) + \frac{R^2}{4\rho_0\nu} \frac{\partial^2}{\partial s_1^2} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) \\ &- \frac{7\kappa^2 R^4}{16\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} + \frac{R^2}{\rho_0\nu} \frac{\partial p_0^2}{\partial s_1} + \frac{3\kappa R^3}{2\rho_0\nu} \frac{\partial p^1}{\partial s_1} z_2 + \frac{15\kappa^2 R^4}{8\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} z_2^2 - R^2 \frac{b_{01}}{\nu} \quad \text{en } \omega, \\ u_1^2 &= 0 \quad \text{en } \partial\omega. \end{aligned} \right. \quad (1.3.49)$$

A la vista de (1.3.49), y por inspección entre las funciones polinómicas en  $z_2$  y  $z_3$ , obtenemos que la expresión de  $u_1^2$  es:

$$\begin{aligned} u_1^2 &= \frac{R^2}{16} \left( \frac{R^2}{4\rho_0\nu^2} \frac{\partial^2 p^0}{\partial t \partial s_1} - \frac{R^4}{16\rho_0^2\nu^3} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} - \frac{R^2}{2\rho_0\nu} \frac{\partial^3 p^0}{\partial s_1^3} + \frac{11\kappa^2 R^2}{8\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) ((z_2^2 + z_3^2)^2 - 1) \\ &+ \frac{R^2}{4} \left( -\frac{1}{4\rho_0\nu^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) + \frac{R^2}{16\rho_0^2\nu^3} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) + \frac{1}{4\rho_0\nu} \frac{\partial^2}{\partial s_1^2} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -\frac{7\kappa^2 R^2}{16\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} + \frac{1}{\rho_0\nu} \frac{\partial p_0^2}{\partial s_1} - \frac{b_{01}}{\nu} \Big) (z_2^2 + z_3^2 - 1) + \frac{R^6}{1152\rho_0^2\nu^3} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} ((z_2^2 + z_3^2)^3 - 1) \\
& + \frac{3\kappa R^3}{16\rho_0\nu} \frac{\partial p^1}{\partial s_1} (z_2^2 + z_3^2 - 1) z_2 + \frac{5\kappa^2 R^4}{64\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} (z_2^2 + z_3^2 - 1) (z_2^2 - z_3^2),
\end{aligned}$$

que utilizando el cambio de variable (1.3.23), se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
u_1^2 = & \frac{R^2}{16} \left( \frac{R^2}{4\rho_0\nu^2} \frac{\partial^2 p^0}{\partial t \partial s_1} - \frac{R^4}{16\rho_0^2\nu^3} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} - \frac{R^2}{2\rho_0\nu} \frac{\partial^3 p^0}{\partial s_1^3} + \frac{11\kappa^2 R^2}{8\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) (s_3^4 - 1) \\
& + \frac{R^2}{4} \left( -\frac{1}{4\rho_0\nu^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) + \frac{R^2}{16\rho_0^2\nu^3} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) + \frac{1}{4\rho_0\nu} \frac{\partial^2}{\partial s_1^2} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) \right. \\
& - \frac{7\kappa^2 R^2}{16\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} + \frac{1}{\rho_0\nu} \frac{\partial p_0^2}{\partial s_1} - \frac{b_{01}}{\nu} \Big) (s_3^2 - 1) + \frac{R^6}{1152\rho_0^2\nu^3} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} (s_3^6 - 1) \\
& + \frac{3\kappa R^3}{16\rho_0\nu} \frac{\partial p^1}{\partial s_1} (s_3^3 - s_3) \cos s_2 + \frac{5\kappa^2 R^4}{64\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} (s_3^4 - s_3^2) \cos(2s_2). \tag{1.3.50}
\end{aligned}$$

Si ahora tenemos en cuenta (1.3.11), (1.3.12) y que  $A^0 = \pi R^2$ , obtenemos que,

$$\frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 s_3 u_1^2 ds_3 ds_2 \right) = 3\pi\kappa^2 R^3 \frac{\partial R}{\partial t}.$$

Substituyendo la expresión de  $u_1^2$  (véase (1.3.50)), se tiene que  $p_0^2$  es solución del problema:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^4 \frac{\partial p_0^2}{\partial s_1} \right) = & \frac{\partial}{\partial s_1} \left( -\frac{3R^8}{64\rho_0\nu^2} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} - \frac{R^6}{12} \frac{\partial^3 p^0}{\partial s_1^3} - \frac{\kappa^2 R^6}{48} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} + \frac{R^5}{2\nu} \frac{\partial R}{\partial t} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right. \\
& - \frac{R^7}{8\rho_0\nu^2} \frac{\partial R}{\partial s_1} \left( \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right)^2 - \frac{R^4}{2} \left( \frac{\partial R}{\partial s_1} \right)^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} - \frac{R^5}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial s_1^2} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} - R^5 \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} \\
& \left. + \frac{R^6}{6\nu} \frac{\partial^2 p^0}{\partial t \partial s_1} + R^4 \rho_0 b_{01} \right) + 3\pi\kappa^2 R^3 \frac{\partial R}{\partial t}, \tag{1.3.51}
\end{aligned}$$

junto con las condiciones de contorno adecuadas. Con esta ecuación, hemos completado la descripción del término de la presión  $p^2$  (véanse (1.3.32)–(1.3.33)).

Si ahora agrupamos los términos multiplicados por el elemento  $\mathbf{v}_2$  en (1.3.48), obtenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(Rs_3)^2} \frac{\partial^2 u_2^2}{\partial s_2^2} + \frac{1}{R^2 s_3} \frac{\partial u_2^2}{\partial s_3} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_2^2}{\partial s_3^2} = & \frac{\kappa R^4}{16\rho_0^2\nu^3} \left( \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right)^2 (s_3^4 + 1) \\
& + \frac{\kappa' R^2}{4\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} + \frac{5\kappa}{8\rho_0\nu} \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) \\
& + \left( -\frac{\kappa R^4}{8\rho_0^2\nu^3} \left( \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right)^2 - \frac{\kappa}{2\rho_0\nu} \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) - \frac{\kappa' R^2}{4\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} + \frac{\kappa R}{\rho_0\nu} \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} - \frac{\kappa R^2}{16\rho_0\nu} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} \right) s_3^2
\end{aligned}$$

$$-\frac{\kappa R^2}{8\rho_0\nu} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} s_3^2 \cos^2 s_2 + \frac{1}{\rho_0\nu} \left( -\frac{\sin s_2}{R s_3} \frac{\partial p^3}{\partial s_2} + \frac{\cos s_2}{R} \frac{\partial p^3}{\partial s_3} \right) - \frac{b_{02}}{\nu}.$$

De la misma forma, identificando los términos multiplicados por  $\mathbf{v}_3$  en (1.3.48), se tiene la siguiente ecuación,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(R s_3)^2} \frac{\partial^2 u_3^2}{\partial s_2^2} + \frac{1}{R^2 s_3} \frac{\partial u_3^2}{\partial s_3} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_3^2}{\partial s_3^2} &= -\frac{\kappa \sin s_2 \cos s_2}{16 s_3 \rho_0 \nu} \left( 2 \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) s_3 - R^2 \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} s_3^3 \right) \\ &+ \frac{\kappa \sin s_2 \cos s_2}{16 \rho_0 \nu} \left( 2 \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) - 3 R^2 \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} s_3^2 \right) - \frac{\kappa \tau R^2}{4 \rho_0 \nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} (s_3^2 - 1) \\ &+ \frac{1}{\rho_0 \nu} \left( \frac{\cos s_2}{R s_3} \frac{\partial p^3}{\partial s_2} + \frac{\sin s_2}{R} \frac{\partial p^3}{\partial s_3} \right) - \frac{b_{03}}{\nu}. \end{aligned}$$

Utilizando el cambio de variable (1.3.23) y simplificando, deducimos de las dos últimas expresiones que  $u_2^2$  y  $u_3^2$  verifican:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{z}} u_2^2 &= \frac{\kappa R^6}{16 \rho^2 \nu^3} \left( \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right)^2 ((z_2^2 + z_3^2)^2 + 1) + \frac{\kappa' R^4}{4 \rho_0 \nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} + \frac{5 R^2 \kappa}{8 \rho_0 \nu} \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) \\ &+ \left( -\frac{\kappa R^6}{8 \rho_0^2 \nu^3} \left( \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right)^2 - \frac{9 R^4 \kappa}{16 \rho_0 \nu} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} - \frac{\kappa' R^4}{4 \rho_0 \nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) (z_2^2 + z_3^2) \\ &- \frac{\kappa R^4}{8 \rho_0 \nu} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} z_2^2 + \frac{R}{\rho_0 \nu} \frac{\partial p^3}{\partial z_2} - \frac{R^2}{\nu} b_{02}, \end{aligned} \quad (1.3.52)$$

$$\Delta_{\mathbf{z}} u_3^2 = -\frac{\kappa \tau R^4}{4 \rho_0 \nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} (z_2^2 + z_3^2 - 1) - \frac{2 R^4 \kappa}{16 \rho_0 \nu} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} z_2 z_3 + \frac{R}{\rho_0 \nu} \frac{\partial p^3}{\partial z_3} - \frac{R^2}{\nu} b_{03}. \quad (1.3.53)$$

Por otro lado, si agrupamos los términos multiplicados por  $\varepsilon$  en (1.3.5), obtenemos que

$$\begin{aligned} -\frac{\sin s_2}{R s_3} \frac{\partial u_2^2}{\partial s_2} + \frac{\cos s_2}{R s_3} \frac{\partial u_3^2}{\partial s_2} + \frac{\cos s_2}{R} \frac{\partial u_2^2}{\partial s_3} + \frac{\sin s_2}{R} \frac{\partial u_3^2}{\partial s_3} &= -\kappa R s_3 \cos s_2 \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial s_1} - \frac{s_3}{R} \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial u_1^0}{\partial s_3} \right) \\ &- \frac{\partial u_1^1}{\partial s_1} + \kappa u_2^1 + \tau \frac{\partial u_1^1}{\partial s_2} + \frac{s_3}{R} \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial u_1^1}{\partial s_3}, \end{aligned}$$

que junto a las expresiones obtenidas en (i) y (ii) conduce a

$$\begin{aligned} &-\frac{\sin s_2}{s_3} \frac{\partial u_2^2}{\partial s_2} + \frac{\cos s_2}{s_3} \frac{\partial u_3^2}{\partial s_2} + (\cos s_2) \frac{\partial u_2^2}{\partial s_3} + (\sin s_2) \frac{\partial u_3^2}{\partial s_3} \\ &= -\kappa R^2 s_3 \cos s_2 \left( \frac{1}{4 \rho_0 \nu} \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) (s_3^2 - 1) - \frac{R}{2 \rho_0 \nu} \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} s_3^3 \right) \\ &- \frac{3 R}{16 \rho_0 \nu} \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^3 \kappa \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) s_3 (s_3^2 - 1) \cos s_2 - \frac{R}{4 \rho_0 \nu} \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^1}{\partial s_1} \right) (s_3^2 - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\kappa R^2}{16\rho_0\nu} \left( 2 \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) - R^2 s_3^2 \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} \right) s_3 \cos s_2 - \frac{3R^4 \tau \kappa}{16\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} s_3 (s_3^2 - 1) \sin s_2 \\
& + \frac{3R^3 \kappa}{16\rho_0\nu} \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} (3s_3^2 - 1) s_3 \cos s_2 + \frac{R^2}{2\rho_0\nu} \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial p^1}{\partial s_1} s_3^2 =: g.
\end{aligned} \tag{1.3.54}$$

Sea  $\mathbf{U}^2 = (u_2^2, u_3^2)$ . Utilizando el cambio de variable (1.3.23), obtenemos de las ecuaciones (1.3.52), (1.3.53), (1.3.54) y de las condiciones de contorno correspondientes en (1.3.6), que  $(\mathbf{U}^2, p^3)$  es solución del siguiente problema:

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{z}} \mathbf{U}^2 = \frac{R}{\rho_0\nu} \nabla_{\mathbf{z}} p^3 + \mathbf{F} & \text{en } \omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{U}^2 = g & \text{en } \omega, \\ \mathbf{U}^2 = \mathbf{0} & \text{en } \partial\omega, \end{cases} \tag{1.3.55}$$

donde,

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} := & \left( \frac{\kappa R^6}{16\rho_0^2\nu^3} \left( \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right)^2 ((z_2^2 + z_3^2)^2 + 1) + \frac{\kappa' R^4}{4\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} + \frac{5R^2 \kappa}{8\rho_0\nu} \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) \right. \\
& + \left( -\frac{\kappa R^6}{8\rho_0^2\nu^3} \left( \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right)^2 - \frac{9R^4 \kappa}{16\rho_0\nu} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} - \frac{\kappa' R^4}{4\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) (z_2^2 + z_3^2) - \frac{\kappa R^4}{8\rho_0\nu} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} z_2^2 \\
& \left. - \frac{R^2}{\nu} b_{02}, \quad -\frac{\kappa \tau R^4}{4\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} (z_2^2 + z_3^2 - 1) - \frac{2R^4 \kappa}{16\rho_0\nu} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} z_2 z_3 - \frac{R^2}{\nu} b_{03} \right).
\end{aligned} \tag{1.3.56}$$

Aplicando el Teorema 1.3.4, este problema tiene solución única si se verifica la siguiente condición de compatibilidad:

$$\int_{\omega} g \, dz_2 dz_3 = 0, \tag{1.3.57}$$

o equivalentemente, utilizando el cambio de variable (1.3.23),

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 s_3 g \, ds_3 ds_2 = 0.$$

Teniendo en cuenta la definición de  $g$  (véase (1.3.54)), obtenemos que,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_0^1 s_3 g \, ds_3 ds_2 &= \frac{\pi R}{8\rho_0\nu} \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^1}{\partial s_1} \right) + \frac{\pi R^2}{4\rho_0\nu} \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial p^1}{\partial s_1} \\
&= \frac{\pi R^2}{2\rho_0\nu} \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial p^1}{\partial s_1} + \frac{\pi R^3}{8\rho_0\nu} \frac{\partial^2 p^1}{\partial s_1^2}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, de (1.3.30) deducimos que,

$$4R^3 \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial p^1}{\partial s_1} + R^4 \frac{\partial^2 p^1}{\partial s_1^2} = 0.$$

Por tanto, se verifica la condición de compatibilidad (1.3.57) y el problema (1.3.55) tiene una única solución (salvo una función dependiente de  $t$  y  $s_1$  para la presión). Además, como  $g$  y  $\mathbf{F}$  son funciones polinómicas en la variable  $s_3$  (véanse (1.3.54) y (1.3.56)), la solución de (1.3.34) es también polinómica en  $s_3$  y podemos calcularla explícitamente (véase el Apéndice A.2).

□

**Observación 1.3.6.** *En diversas referencias (véanse [64, 98, 101, 148]) se considera un flujo estacionario en una tubería ya que se asume que los efectos del tiempo no van a ser relevantes en la solución del problema, o que dichos efectos se disiparán en tiempos grandes.*

*El desarrollo asintótico que hemos asumido (véanse (1.3.1)–(1.3.2)), ha conducido a que la velocidad esté determinada por la presión (véase el Teorema 1.3.5) y que, por tanto, la dependencia temporal de la solución del problema venga dada a través de esta.*

A la vista del desarrollo asintótico propuesto en (1.3.1)–(1.3.2), algunos de cuyos términos han sido caracterizados en el Teorema 1.3.5, la aproximación asintótica del Problema 1.2.1 que proponemos vendrá dada por las expresiones:

$$\hat{\mathbf{u}}(\varepsilon) := \mathbf{u}^0 + \varepsilon \mathbf{u}^1 + \varepsilon^2 \mathbf{u}^2, \quad (1.3.58)$$

$$\hat{p}(\varepsilon) := \frac{1}{\varepsilon^2} p^0 + \frac{1}{\varepsilon} p^1 + p^2. \quad (1.3.59)$$

## 1.4. Comportamiento de la pared de la tubería

Al inicio de este capítulo expusimos el Problema 1.1.1 definido en el dominio original, dependiente de una función radio  $R$  que depende del tiempo y del punto  $s_1$  de la línea media de la tubería curva. Por tanto, es claro que para completar el modelo propuesto (véase el Teorema 1.3.5) que hemos deducido de la aplicación del método asintótico en el Problema 1.2.1, necesitamos otro modelo que describa el movimiento de la pared (ley de pared) como consecuencia de las diferencias de presión que se produzcan en el interior de la tubería.

El ejemplo más simple sería considerar paredes rígidas. En este caso, es suficiente con considerar que

$$\frac{\partial R}{\partial t} = 0.$$

Si además, consideramos que  $R$  tampoco depende del punto  $s_1$  de la línea media (es decir, radio de la tubería constante), el modelo propuesto se reduce al obtenido en [98], a diferencia de que allí se proponía una aproximación asintótica de la solución de un orden menos, es decir, sin incluir los términos de mayor orden de la aproximación asintótica (1.3.58)–(1.3.59).

Otro ejemplo muy interesante es considerar que la pared de la tubería verifica una ley constitutiva elástica. Por ejemplo, podemos considerar el caso simple de una ley algebraica

elástica (véase el Capítulo 19, en [55]), de modo que,

$$p^0 - p_e = \frac{Eh_0}{(1 - \xi^2)R_0^2}(R - R_0), \quad (1.4.1)$$

donde  $E$  denota el módulo de Young y  $\xi$  el coeficiente de Poisson de la pared,  $h_0$  su espesor,  $R_0$  el radio de la sección transversal en reposo y  $p_e$  la presión externa. Por supuesto, existen otras posibilidades diferentes más complejas, considerando distintas leyes constitutivas elásticas o viscoelásticas (véase [54, 55]). Pospondremos a la Parte III de esta memoria la discusión más detallada de leyes más generales.

## 1.5. Algunos ejemplos numéricos

En esta sección presentaremos algunos ejemplos numéricos sencillos representativos para ilustrar el comportamiento de la solución asintótica aproximada propuesta en la sección anterior. Para ello representaremos los términos del desarrollo asintótico de la velocidad (véase el Teorema 1.3.5) en función de diferentes valores para la presión, curvatura y torsión de la línea media.

Observamos en la Figura 1.3 que la componente  $u_1^0$  representa un flujo de Poiseuille (se ha considerado  $\frac{\partial p^0}{\partial s_1} < 0$ ). Este tipo de comportamiento en el término principal del desarrollo también fue identificado en trabajos como [64, 100, 117]. En la Figura 1.4 repre-

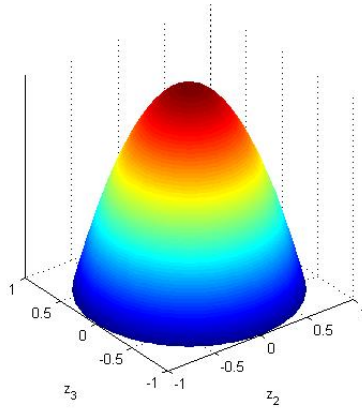


Figura 1.3: Representación del campo  $u_1^0$ .

sentamos la componente  $u_1^1$ , que será la primera corrección del término  $u_1^0$ . Como pudimos observar en su expresión obtenida en (1.3.27), es el primer término en el que se observan los efectos de la curvatura de la línea media de la tubería. Se puede verificar en la imagen, que el fluido será más rápido en el lado de la sección transversal hacia donde la normal  $\mathbf{N}$  (en cada punto de la línea media) está apuntando (se ha considerado  $\frac{\partial p^0}{\partial s_1} < 0$  y  $\frac{\partial p^1}{\partial s_1} = 0$ ).

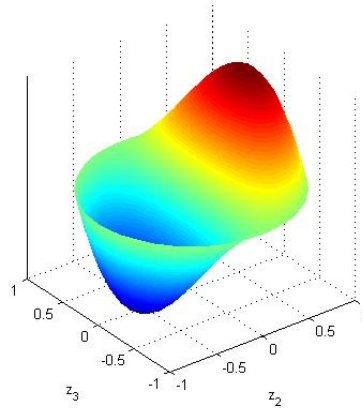


Figura 1.4: Representación del campo  $u_1^1$ .

La segunda corrección dada por el término  $u_1^2$ , tiene una dependencia más compleja de los diferentes parámetros del problema (véase (1.3.31)), pero tomando valores típicos de los mismos, observamos en la Figura 1.5 que volvemos a obtener un comportamiento similar al flujo de Poiseuille.

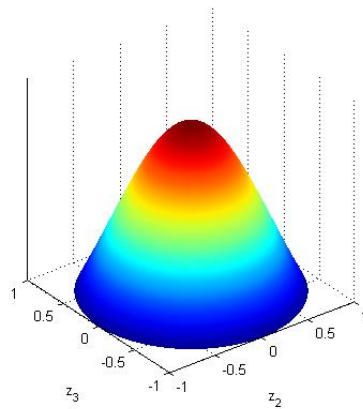


Figura 1.5: Representación del campo  $u_1^2$ .

A continuación, representaremos las componentes transversales de los términos de la velocidad identificados. En primer lugar, recordemos que en orden cero vimos en (1.3.25) que las componentes de la velocidad transversal son nulas, por lo que la velocidad axial es dominante en el orden principal. Por tanto, el primer efecto en la sección transversal vendrá dado por la primera corrección, es decir  $\mathbf{U}^1 = (u_2^1, u_3^1)$ . Estas componentes, como podemos observar en (1.3.28)–(1.3.29), serán las relacionadas con las expansiones y contracciones del fluido en las secciones transversales de la tubería. En efecto, podemos observar en la

Figura 1.6, diferentes ejemplos dependiendo de los valores de  $\frac{\partial p^0}{\partial s_1}(dp1)$ ,  $\frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2}(dp2)$  y  $\frac{\partial R}{\partial s_1}(dr)$ . La segunda corrección de la velocidad transversal  $\mathbf{U}^2 = (u_2^2, u_3^2)$ , será la responsable

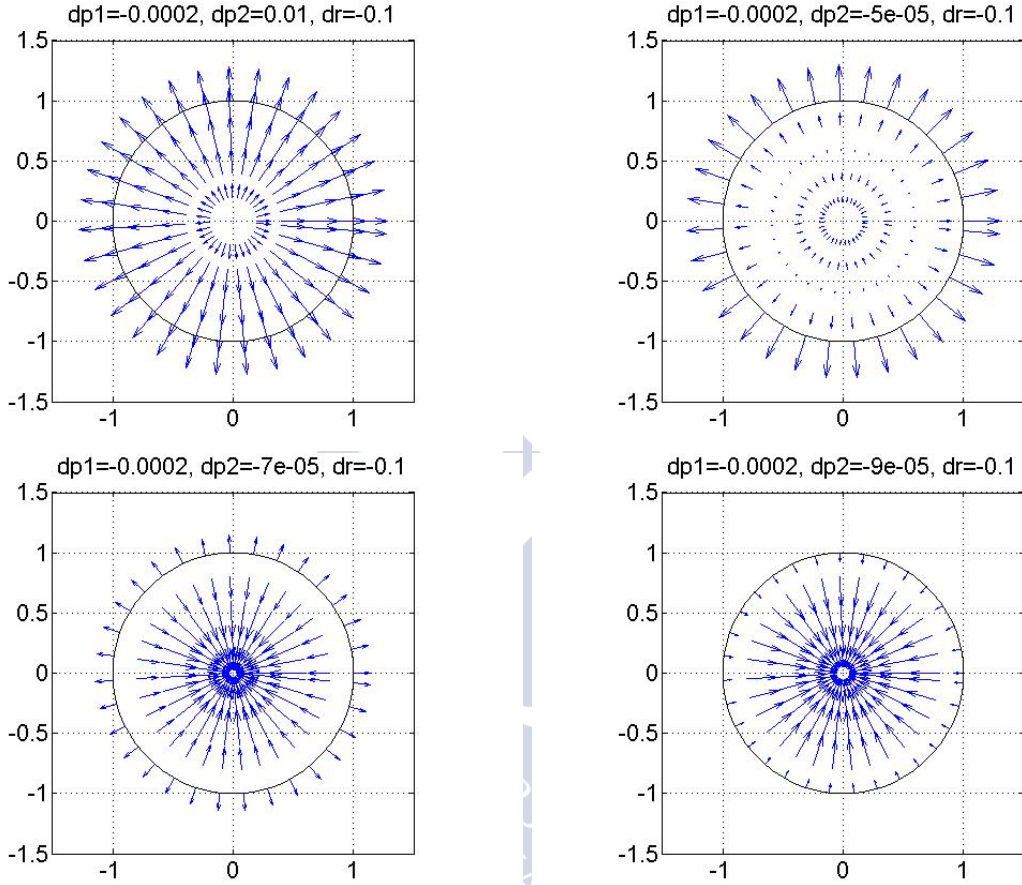


Figura 1.6: Representación del campo  $(u_2^1, u_3^1)$ .

de la recirculación del flujo transversal (o también denominado flujo secundario), como se puede comprobar en la Figura 1.7. Este comportamiento concuerda con los estudios previos donde se detecta el flujo secundario (véanse, por ejemplo, [62, 66, 76, 78, 92, 145, 147, 163, 166]). Podemos observar diferentes casos dependiendo de los valores de la curvatura ( $k$ ), su derivada ( $dk$ ) y la torsión ( $\tau$ ) de la línea media de la tubería curva.



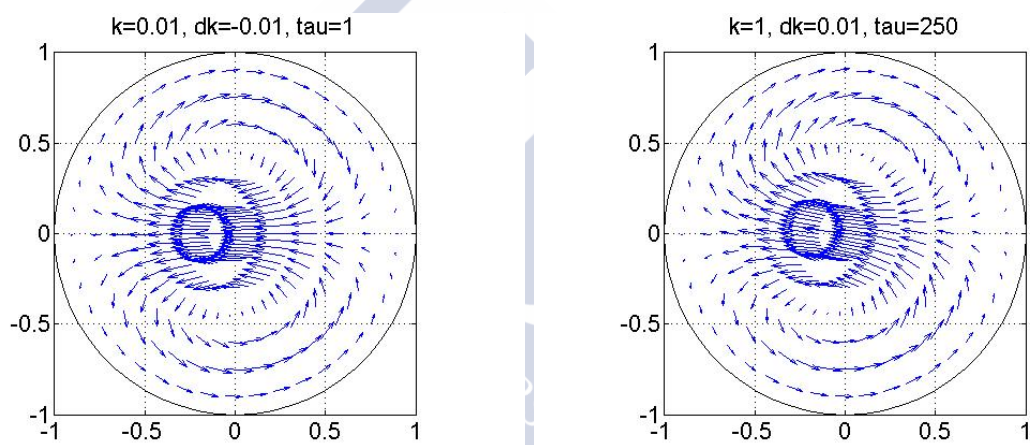


Figura 1.7: Representación del campo  $(u_2^2, u_3^2)$ .



## Capítulo 2

# Correctores de capa límite

En este capítulo nos centraremos en el estudio de lo que identificaremos como correctores de capa límite en espacio, que mejorarán la aproximación propuesta en el capítulo anterior para el flujo en una tubería curvilínea con paredes en movimiento.

En la obtención del modelo unidimensional mediante el análisis asintótico formal desarrollado principalmente en el Teorema 1.3.5, no ha sido necesario considerar el valor de las incógnitas al inicio ni al final de la tubería y tampoco ha sido utilizada la condición inicial de las mismas, a pesar de encontrarnos con un problema evolutivo. Estos hechos implican la posibilidad de que nuestra aproximación no sea adecuada en los extremos de la tubería ni en el instante inicial. En particular, estos fenómenos se conocen como capas límite en espacio y en tiempo. Como consecuencia, para asegurar unas estimaciones del error adecuadas para todo el dominio y para cada instante de tiempo es necesario considerar nuevas hipótesis sobre nuestro modelo o añadir a la aproximación asintótica (1.3.58)–(1.3.59) correctores en espacio y tiempo que solventen los problemas de capa límite y que, a su vez, no empeoren el orden de aproximación en el resto del dominio e instantes de tiempo. Debemos destacar que el orden necesario para los correctores (número de términos que necesitamos añadir en cada caso) viene determinado por el análisis de las estimaciones del error que veremos en el Capítulo 3. En este tipo de problemas, es difícil predecir *a priori* que correctores serán necesarios ni como deben presentarse sus problemas asociados sin tener en cuenta algunos cálculos iniciales para la obtención de las estimaciones del error. Por ello, este capítulo y el Capítulo 3, deben abordarse en conjunto; su división pretende tan solo facilitar la comprensión de los resultados que se exponen.

En [98], trabajo en el que nos hemos inspirado para algunos pasos del capítulo anterior, se estudian los correctores de capa límite para los extremos de la tubería. Nuevamente, seguiremos algunos resultados presentados allí para caracterizar los correctores necesarios en nuestro caso estudiando los problemas que deben verificar y, además, asegurar que no empeoran la aproximación asintótica propuesta en los puntos del interior de la tubería. Sin embargo, dado que nuestro problema es evolutivo y las paredes son flexibles, dichos problemas no se enmarcan en sistemas de Stokes clásicos como ocurre en el caso estático con paredes rígidas. Por tanto, para asegurar las propiedades necesarias de los problemas propuestos, recurriremos a métodos de punto fijo que, junto con los resultados disponibles

en la literatura para problemas en tuberías semi-infinitas (conocidos como problemas de Leray), nos asegurarán el buen comportamiento de nuestros correctores.

Con respecto a los correctores en tiempo, podemos encontrar en [114, 115] el estudio de un caso aplicado al flujo evolutivo en una red de tuberías rectas. Como se puede constatar en esos trabajos, la adición de nuevos correctores a la aproximación (a mayores de los correctores en espacio) no es un estudio trivial. Esto se debe a que si se añaden estos términos, será necesario el estudio de los conocidos como correctores de capa límite en espacio-tiempo (véase [115]). Añadir simplemente los correctores en tiempo implicaría mejorar la aproximación en el instante inicial a expensas del orden de aproximación en espacio. Es por la complejidad de lo expuesto, por lo que en [114] se considera una hipótesis adicional que permite obviar los correctores en tiempo (y, por tanto, también los correctores en espacio-tiempo). Siguiendo las ideas presentadas en ese trabajo, añadiremos en nuestro estudio algunas hipótesis que nos permitirán simplificar el modelo propuesto sin comprometer un orden de aproximación adecuado.

La estructura de este capítulo será la que sigue. En la Sección 2.1 introduciremos las condiciones de contorno e inicial del problema en el dominio original y en el dominio de referencia independiente de  $\varepsilon$ . Además, también asumiremos las hipótesis necesarias para evitar los correctores de capa límite en tiempo en nuestro problema. En la Sección 2.2 estudiaremos resultados preliminares que serán útiles para asegurar las propiedades que nos interesan de los correctores. En particular, estudiaremos la existencia y unicidad de soluciones que decaigan exponencialmente de los problemas que denominaremos de Leray modificado. Estos resultados los aplicaremos en la Sección 2.3, donde caracterizaremos los correctores de capa límite en espacio y estudiaremos el orden de aproximación de las ecuaciones de nuestro problema una vez añadidos los correctores a la aproximación asintótica. Durante el desarrollo de este capítulo denotaremos por  $C > 0$  a una constante arbitraria (probablemente dependiente del tiempo) para realizar las acotaciones oportunas.

## 2.1. Condiciones de contorno en los extremos y condición inicial

Sea  $X$  un espacio de Banach. En este capítulo utilizaremos la notación  $\|\cdot\|_X$  para denotar la norma en el espacio  $X$ . En el caso particular  $X = L^2(\cdot)$ , utilizaremos la notación  $|\cdot|_{L^2(\cdot)}$ ,  $|\cdot|_{[L^2(\cdot)]^n}$  ( $n = 3, 9$ ) según corresponda.

Empecemos este capítulo describiendo cuales serán las condiciones de contorno y la condición inicial del Problema 1.1.1. Para ello, definimos la entrada y la salida de la tubería curva como los conjuntos:

$$\begin{aligned}\Sigma_1^\varepsilon &:= \{\mathbf{x}^\varepsilon \in \partial\hat{\Omega}_t^\varepsilon; \mathbf{x}^\varepsilon = \phi^\varepsilon(0, s_2, s_3)\}, \\ \Sigma_2^\varepsilon &:= \{\mathbf{x}^\varepsilon \in \partial\hat{\Omega}_t^\varepsilon; \mathbf{x}^\varepsilon = \phi^\varepsilon(L, s_2, s_3)\},\end{aligned}$$

respectivamente, con  $s_2 \in [0, 2\pi]$ ,  $s_3 \in [0, 1]$ . Además, recordemos que los puntos de la

frontera lateral vienen dados por el conjunto,

$$\Sigma_l^\varepsilon := \{\mathbf{x}^\varepsilon \in \partial\hat{\Omega}_t^\varepsilon; \mathbf{x}^\varepsilon = \phi^\varepsilon(s_1, s_2, 1)\},$$

con  $s_1 \in [0, L]$ ,  $s_2 \in [0, 2\pi]$ .

**Observación 2.1.1.** *Al igual que el dominio original  $\hat{\Omega}_t^\varepsilon$ , las partes de la frontera  $\Sigma_1^\varepsilon$ ,  $\Sigma_2^\varepsilon$  y  $\Sigma_l^\varepsilon$ , dependen de cada instante  $t$  del periodo de observación. Omitiremos su dependencia en la notación para facilitar la lectura de los resultados que presentaremos a continuación.*

Denotaremos por  $\hat{\Omega}_0^\varepsilon$  a la configuración de referencia en el instante inicial  $t = 0$ .

Como consecuencia del desarrollo asintótico propuesto en (1.3.1)–(1.3.2), observamos que la opción más sencilla para considerar las condiciones de contorno es prescribir los valores de la velocidad. De esta forma, sean  $\mathbf{g}_1^\varepsilon \in H^1(0, T; [H^{3/2}(\Sigma_1^\varepsilon)]^3)$  y  $\mathbf{g}_2^\varepsilon \in H^1(0, T; [H^{3/2}(\Sigma_2^\varepsilon)]^3)$  los valores de la velocidad al inicio y al final de la tubería, es decir,

$$\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{g}_1^\varepsilon \text{ en } \Sigma_1^\varepsilon \text{ y } \mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{g}_2^\varepsilon \text{ en } \Sigma_2^\varepsilon, \quad (2.1.1)$$

para todo  $t \in [0, T]$ . Ahora, sea  $\mathbf{u}_0^\varepsilon \in [H^1(\hat{\Omega}_0^\varepsilon)]^3$  la condición inicial al inicio del periodo de observación, es decir,

$$\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{u}_0^\varepsilon \text{ en } \overline{\hat{\Omega}_0^\varepsilon} \text{ en } t = 0. \quad (2.1.2)$$

Asumiremos que estas condiciones sean compatibles, es decir, verifican que,

$$\mathbf{g}_1^\varepsilon = \mathbf{u}_0^\varepsilon, \text{ en } \Sigma_1^\varepsilon \text{ y } \mathbf{g}_2^\varepsilon = \mathbf{u}_0^\varepsilon, \text{ en } \Sigma_2^\varepsilon, \text{ en } t = 0.$$

Además, asumiremos también compatibilidad con la condición de contorno en la frontera lateral (1.1.5), es decir,

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1^\varepsilon &= \left( \varepsilon \frac{\partial R}{\partial t} \right) \hat{\mathbf{n}} \text{ en } \Sigma_1^\varepsilon \cap \Sigma_l^\varepsilon \text{ y } \mathbf{g}_2^\varepsilon = \left( \varepsilon \frac{\partial R}{\partial t} \right) \hat{\mathbf{n}} \text{ en } \Sigma_2^\varepsilon \cap \Sigma_l^\varepsilon, \\ \mathbf{u}_0^\varepsilon &= \left( \varepsilon \frac{\partial R}{\partial t} \right) \hat{\mathbf{n}} \text{ en } \Sigma_l^\varepsilon, \text{ en } t = 0. \end{aligned}$$

Estas condiciones de compatibilidad deben ser entendidas en el sentido de la traza. También, como el fluido es incompresible, se tiene que la condición inicial (2.1.2) verifica que,

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_0^\varepsilon = 0 \text{ en } \hat{\Omega}_0^\varepsilon \text{ en } t = 0.$$

Si ahora consideramos las ecuaciones del Problema 1.1.1 junto con las condiciones (2.1.1) y (2.1.2), obtenemos un problema bien planteado que enunciamos a continuación para futuras referencias:

**Problema 2.1.2.** Hallar  $\mathbf{u}^\varepsilon : [0, T] \times \hat{\Omega}_t^\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}^3$  y  $p^\varepsilon : [0, T] \times \hat{\Omega}_t^\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u}^\varepsilon) \mathbf{u}^\varepsilon + \frac{1}{\rho_0} \nabla p^\varepsilon - \nu \Delta \mathbf{u}^\varepsilon &= \mathbf{b}_0^\varepsilon \text{ en } \hat{\Omega}_t^\varepsilon, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon &= 0 \text{ en } \hat{\Omega}_t^\varepsilon, \\ \mathbf{u}^\varepsilon &= \left( \varepsilon \frac{\partial R}{\partial t} \right) \hat{\mathbf{n}} \text{ en } \Sigma_l^\varepsilon, \\ \mathbf{u}^\varepsilon &= \mathbf{g}_1^\varepsilon \text{ en } \Sigma_1^\varepsilon \text{ y } \mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{g}_2^\varepsilon \text{ en } \Sigma_2^\varepsilon, \\ \mathbf{u}^\varepsilon &= \mathbf{u}_0^\varepsilon \text{ en } \hat{\Omega}_0^\varepsilon. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

La demostración de existencia y unicidad de solución del Problema 2.1.2 la proponemos como trabajo futuro. Es bien conocido que la obtención de resultados de existencia y unicidad de solución de las ecuaciones de Navier-Stokes ha sido y sigue siendo uno de los problemas más complejos en la historia de la matemática aplicada (véanse [6, 60, 82, 152], por ejemplo). En las referencias citadas, los autores presentan teoremas que nos aseguran propiedades de la solución bajo ciertas hipótesis sobre el dominio de definición del problema y los datos del mismo. En esta dirección, existen numerosas referencias sobre el estudio de existencia de solución de las ecuaciones de Navier-Stokes en dominios cilíndricos, también en dominios con fronteras en movimiento y dominios delgados (véanse, por ejemplo, [26–28, 44, 120, 153]). En particular, creemos que la existencia y unicidad de solución del Problema 2.1.2, podría seguir los pasos del trabajo presentado en [2] donde se analizan las ecuaciones de Navier-Stokes en un dominio con frontera en movimiento con condiciones de contorno de presión-velocidad. A la vez, ese trabajo es una generalización del trabajo previo [91], donde se consideraba una condición de monotonía sobre la variación temporal del dominio y condiciones de contorno involucrando la presión. Estos trabajos combinados con los resultados en estructuras finas [108] (y las referencias allí disponibles) podrían ser la clave para asegurar las propiedades adecuadas para la solución del Problema 2.1.2. Dicho problema, en particular, debe verificar la condición de compatibilidad:

$$\int_{\Sigma_l^\varepsilon} \left( \varepsilon \frac{\partial R}{\partial t} \right) \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n}^\varepsilon d\Sigma^\varepsilon + \int_{\Sigma_1^\varepsilon} \mathbf{g}_1^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon d\Sigma^\varepsilon + \int_{\Sigma_2^\varepsilon} \mathbf{g}_2^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon d\Sigma^\varepsilon = 0. \quad (2.1.4)$$

Dado que la aproximación asintótica propuesta (1.3.58)–(1.3.59) está definida en el dominio de referencia independiente de  $\varepsilon$ , los correctores serán definidos de la misma forma. Por tanto, denotemos por  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  a las fronteras de entrada y salida de  $\Omega$ , independiente de  $\varepsilon$ , que vienen dadas por los conjuntos:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &:= \{\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3) \in \partial\Omega; s_1 = 0\}, \\ \Sigma_2 &:= \{\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3) \in \partial\Omega; s_1 = L\}, \end{aligned}$$

con  $s_2 \in [0, 2\pi]$ ,  $s_3 \in [0, 1]$ . Recordemos que la frontera lateral del dominio de referencia  $\Omega$ , se denotaba por  $\Sigma_l$  y venía dada por,

$$\Sigma_l := \{\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3) \in \partial\Omega; s_3 = 1\},$$

con  $s_1 \in [0, L]$ ,  $s_2 \in [0, 2\pi]$ . Entonces, ya podemos definir las condiciones de contorno (2.1.1) y la condición inicial (2.1.2) en el dominio de referencia. Consideremos unas funciones  $\mathbf{g}_\alpha(\varepsilon) = (g_{\alpha,i}(\varepsilon)) : [0, T] \times \Sigma_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $\mathbf{u}_0(\varepsilon) = (u_{0,i}(\varepsilon)) : \{0\} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tales que (véase (1.2.1))  $\mathbf{g}_\alpha^\varepsilon = g_{\alpha,i}^\varepsilon \mathbf{e}_i = g_{\alpha,k}(\varepsilon) \mathbf{v}_k(s_1)$  y  $\mathbf{u}_0^\varepsilon = u_{0,i}^\varepsilon \mathbf{e}_i = u_{0,k}(\varepsilon) \mathbf{v}_k(s_1)$ . Teniendo en cuenta el desarrollo asintótico propuesto para la velocidad (1.3.1), asumiremos que,

$$g_{\alpha,k}(\varepsilon) = g_{\alpha,k}^0 + \varepsilon g_{\alpha,k}^1 + \varepsilon^2 g_{\alpha,k}^2 + \dots, \quad (2.1.5)$$

$$u_{0,k}(\varepsilon) = u_{0,k}^0 + \varepsilon u_{0,k}^1 + \varepsilon^2 u_{0,k}^2 + \dots, \quad (2.1.6)$$

donde  $\mathbf{g}_\alpha^j = (g_{\alpha,k}^j) \in H^1(0, T; [H^{3/2}(\Sigma_\alpha)]^3)$  y  $u_{0,k}^j \in H^1(\Omega)$  ( $\alpha = 1, 2$ ,  $k = 1, 2, 3$  y  $j \in \mathbb{N}$ ).

Por un lado, se tiene que,

$$\int_{\Sigma_1^\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon d\Sigma^\varepsilon = R^2(t, 0) \int_0^{2\pi} \int_0^\varepsilon s_3^\varepsilon u_1(\varepsilon) ds_3^\varepsilon ds_2 = \varepsilon^2 R^2(t, 0) \int_0^{2\pi} \int_0^1 s_3 u_1(\varepsilon) ds_3 ds_2.$$

Por otro lado, por (2.1.1), se deduce que,

$$\int_{\Sigma_1^\varepsilon} \mathbf{g}_1^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon d\Sigma^\varepsilon = R^2(t, 0) \int_0^{2\pi} \int_0^\varepsilon s_3^\varepsilon g_{1,1}(\varepsilon) ds_3^\varepsilon ds_2 = \varepsilon^2 R^2(t, 0) \int_0^{2\pi} \int_0^1 s_3 g_{1,1}(\varepsilon) ds_3 ds_2,$$

por tanto, teniendo en cuenta (1.3.1) y (2.1.5), supondremos que:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 s_3 u_1^0 ds_3 ds_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^1 s_3 g_{1,1}^0 ds_3 ds_2, \text{ en } s_1 = 0. \quad (2.1.7)$$

Consideraremos una condición análoga en los puntos de  $\Sigma_2$ . Además, como consecuencia de la desigualdad de interpolación (véase el Capítulo 1, Sección 9.3 en [89]), (2.1.5) y la regularidad en los datos deducimos que,

$$\|\mathbf{g}_\alpha^\varepsilon\|_{[H^{1/2}(\Sigma_\alpha^\varepsilon)]^3} \leq C \|\mathbf{g}_\alpha^\varepsilon\|_{[L^2(\Sigma_\alpha^\varepsilon)]^3}^{1/2} \|\mathbf{g}_\alpha^\varepsilon\|_{[H^1(\Sigma_\alpha^\varepsilon)]^3}^{1/2} \leq C\sqrt{\varepsilon}. \quad (2.1.8)$$

Análogamente, se tiene que,

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{g}_\alpha^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{[H^{1/2}(\Sigma_\alpha^\varepsilon)]^3} \leq C\sqrt{\varepsilon}. \quad (2.1.9)$$

Con respecto a la condición inicial, obtenemos que,

$$|\mathbf{u}_0^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \leq \varepsilon |\mathbf{u}_0(\varepsilon)|_{[L^2(\Omega)]^3} \leq C\varepsilon, \quad (2.1.10)$$

$$|\nabla \mathbf{u}_0^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} \leq C |\nabla \mathbf{s} \mathbf{u}_0(\varepsilon)|_{[L^2(\Omega)]^9} \leq C. \quad (2.1.11)$$

Además, también supondremos que los términos del desarrollo asintótico de la densidad de fuerzas  $\mathbf{b}_0^\varepsilon$  (véanse (1.2.15) y (1.3.3)) verifican que

$$b_{0k}^q \in L^2(\Omega), q \in \mathbb{N}, \quad b_{0k}^0 \in W^{1,\infty}(\Omega), \quad (2.1.12)$$

entonces,

$$|\mathbf{b}_0^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \leq \varepsilon C, \quad (2.1.13)$$

donde hemos tenido en cuenta (1.1.11). Estas acotaciones serán de utilidad para obtener las estimaciones *a priori* de la solución del Problema 2.1.2 en el Capítulo 3.

**Observación 2.1.3.** *Recordemos la relación entre el término principal del flujo en una sección transversal y su área en (1.3.12)*

$$\frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 s_3 u_1^0 ds_3 ds_2 \right) = -\frac{\partial A^0}{\partial t},$$

donde  $A^0 = \pi R^2(t, s_1)$ . Si integramos esta expresión con respecto a la variable axial en el intervalo  $[0, L]$  obtenemos:

$$R^2(t, 0) \int_0^{2\pi} \int_0^1 s_3 u_1^0|_{s_1=0} ds_3 ds_2 - R^2(t, L) \int_0^{2\pi} \int_0^1 s_3 u_1^0|_{s_1=L} ds_3 ds_2 = - \int_0^L \frac{\partial A^0}{\partial t} ds_1.$$

En efecto, esta expresión revela el hecho de que la diferencia de flujo entre la entrada y la salida será proporcional a la variación en el tiempo del área transversal a lo largo de la tubería. Es evidente, que en el caso de una tubería con paredes rígidas (es decir, donde el área de la sección transversal no depende del tiempo), la ecuación de conservación de la masa nos indicaría que la diferencia del flujo de entrada y salida es nulo.

Como se puede observar en la demostración del Teorema 1.3.5 del Capítulo 1, los términos identificados del desarrollo asintótico fueron obtenidos de forma que verificasen el Problema 1.1.1. Sin embargo, las condiciones de contorno en los extremos de la tubería (2.1.1) y la condición inicial (2.1.2) no han sido necesarias para obtener la aproximación (1.3.58)–(1.3.59) por lo que estas condiciones podrían no verificarse. Además, esto implica que la aproximación (1.3.58)–(1.3.59) será óptima en el interior del dominio de definición y estrictamente después del instante inicial del periodo de observación. Por tanto, la aproximación asintótica propuesta podría no ser adecuada en los extremos de la tubería ni en el instante inicial, comprometiendo la estimación del error de forma global en el problema. Estos efectos se conocen como fenómenos de capa límite en espacio y en tiempo, los cuales son comunes en los estudios asintóticos (véanse, por ejemplo, [47, 49, 98, 99, 114, 115]).

Nuevamente, seguiremos el estudio realizado en [98] donde se estudian los correspondientes correctores de capa límite en espacio únicamente, al tratarse de un problema estacionario. En el caso evolutivo, son necesarios además los mencionados correctores de capa límite en tiempo. El inconveniente de estos últimos es que, en general, añaden términos espurios a la aproximación de la solución en el instante inicial en los extremos de la tubería. Para corregir estos términos, se pueden introducir nuevas funciones, que serán denominadas como correctores de capa límite en espacio-tiempo (véase como ejemplo [115]).

Dada la complejidad que presenta este estudio, consideraremos el caso en el que los correctores en tiempo no son necesarios (y como consecuencia, tampoco los correctores en



espacio-tiempo) siguiendo algunas ideas presentadas en [114]. Por un lado, supongamos que existe un número positivo  $t^*$  tal que para todo  $t \in [0, t^*]$  se verifica que,

$$g_{1,1}^0 = u_1^0, \quad g_{1,2}^0 = g_{1,3}^0 = 0 \text{ en } s_1 = 0, \quad (2.1.14)$$

$$g_{2,1}^0 = u_1^0, \quad g_{2,2}^0 = g_{2,3}^0 = 0 \text{ en } s_1 = L. \quad (2.1.15)$$

Estas hipótesis implican que los términos principales de las velocidades en los extremos de la tubería (véase (2.1.5)) describen un flujo de Poiseuille (véanse (1.3.24)–(1.3.25)). Por otro lado, supondremos que

$$u_{0,1}^0 = u_1^0, \quad u_{0,2}^0 = u_{0,3}^0 = 0, \text{ en } t = 0. \quad (2.1.16)$$

Esta hipótesis implica que el término principal del desarrollo asintótico de la velocidad inicial (véase (2.1.6)) describe un flujo de Poiseuille.

**Observación 2.1.4.** *Teniendo en cuenta los estudios disponibles en la literatura, estas hipótesis parecen describir adecuadamente muchos de los problemas reales que el modelo pretende representar. De nuevo, recordemos que estas hipótesis pueden ser rebajadas estudiando los correctores correspondientes en su lugar. Como hemos comentado anteriormente, aquí hemos seguido las ideas presentadas en [114] donde se realiza el análisis del flujo de un fluido viscoso en una red de tuberías rectas. En un trabajo inmediatamente posterior [115], los autores presentan el caso general, añadiendo los correctores y resultados pertinentes. Algunas de las conclusiones y teoremas de existencia, unicidad y decaimiento exponencial de los correctores serán muy útiles para abordar el caso general de nuestro problema, lo que no planteamos como trabajo futuro, si bien algunos pasos ya están avanzados.*

Antes de comenzar con la descripción de los correctores de capa límite asumiremos una condición sobre la regularidad de la función radio  $R(t, s_1)$  de la sección transversal de la tubería. En particular, supondremos que

$$R \in C^2([0, T] \times [0, L]) \quad \text{y} \quad R(t, s_1) \geq C > 0 \quad \forall s_1 \in [0, L], \forall t \in [0, T]. \quad (2.1.17)$$

Estas hipótesis serán necesarias para obtener acotaciones de algunos términos de los correctores de capa límite y, así mismo, en la obtención de las estimaciones *a priori*.

## 2.2. Resultados preliminares

En esta sección presentaremos unos resultados que serán clave para la caracterización de los correctores de capa límite en la Sección 2.3. En particular, probaremos resultados de existencia de solución en dominios no acotados, más específicamente, en bandas semi-infinitas. Además, veremos que si los datos decaen exponencialmente, también lo hará la solución en cuanto se aleja una pequeña distancia de la base del cilindro.

Este tipo de problemas se conocen en la literatura como problemas de Leray en bandas infinitas. Existen resultados de existencia y unicidad para el problema de Stokes en

dominios no acotados, cuyos primeros pasos fueron abordados exitosamente en [82]. Años después, numerosos autores dedican sus esfuerzos en obtener nuevos resultados cuyos frutos se pueden ver reflejados en [60] y en las referencias que ahí se citan (véase también, por ejemplo, [61]). En particular, en [60] se presenta un análisis detallado del problema de Leray en bandas infinitas, proporcionando la regularidad de la solución en función de los datos y el decaimiento exponencial de la misma cuando el flujo es nulo. En esta referencia también se estudian resultados similares en bandas infinitas con sección transversal no uniforme.

Los problemas que obtendremos en la Sección 2.3 para los correctores de capa límite, presentarán una estructura similar a la de los problemas de Leray. Sin embargo, debido a la presencia de la función radio  $R$ , que depende del tiempo y del punto de la línea media de la tubería curva, nos vemos obligados a realizar una serie de cambios que hacen más difícil el análisis. En particular, en esta sección estamos interesados en estudiar lo que denominaremos como problema de Leray modificado, el cual enunciaremos más adelante.

Consideremos un dominio semi-infinito tal que,

$$\begin{aligned}\Omega &:= \{\bar{\mathbf{z}} := (z_1, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^3; \mathbf{z} := (z_2, z_3) \in \omega, z_1 > 0\}, \\ \Gamma &:= \{\bar{\mathbf{z}} \in \bar{\Omega}; z_1 = 0\},\end{aligned}$$

donde  $\omega$  representa la sección transversal del cilindro. También, utilizaremos la siguiente notación,

$$\Omega^\alpha := \{\bar{\mathbf{z}} \in \Omega; z_1 > \alpha\},$$

para todo  $\alpha \geq 0$ . Así, diremos que una función  $h \in L^2(\Omega)$  decae exponencialmente cuando  $z_1 \rightarrow +\infty$  si existen unas constantes  $C_0, \lambda > 0$  tales que:

$$|h|_{L^2(\Omega^\alpha)} \leq C_0 e^{-\lambda \alpha},$$

para todo  $\alpha \geq 0$ . Esta definición se extiende análogamente a otros espacios de Banach y sus correspondientes normas. Además, consideraremos que la condición de contorno de nuestro problema viene dada por:

$$\varphi^0 = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{en } \partial\Omega \setminus \Gamma, \\ \bar{\varphi}^0 & \text{en } \Gamma, \end{cases} \quad (2.2.1)$$

donde  $\varphi^0 \in [H^{3/2}(\partial\Omega)]^3$ .

### 2.2.1. Problema de Leray

En este apartado presentaremos resultados de existencia, unicidad y decaimiento exponencial de la solución del problema de Leray. Esta última propiedad, también se conoce como el Principio de Saint-Venant y es esencial en el estudio de correctores de capa límite ya que nos asegura que la función añadida no empeorará la aproximación fuera del lugar que tiene destinado corregir. Podemos observar ejemplos en la literatura, como en



[60, 98, 114, 115], del uso de este tipo de resultados. A continuación, demostramos un teorema que asegura la existencia, unicidad y decaimiento exponencial de solución del problema de Leray.

Sea  $\mathcal{V} := [H^2(\Omega)]^3 \times H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ .

**Teorema 2.2.1.** Sean  $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^3$  y  $g \in H^1(\Omega)$  funciones tales que existen unas constantes  $\tilde{C}_0, \tilde{\lambda} > 0$  tales que

$$\|\mathbf{f}\|_{[L^2(\Omega^\alpha)]^3} + \|g\|_{H^1(\Omega^\alpha)} \leq \tilde{C}_0 e^{-\alpha \tilde{\lambda}}, \quad (2.2.2)$$

es decir, decaen exponencialmente cuando  $z_1 \rightarrow +\infty$ , y sea  $\varphi^0 \in [H^{3/2}(\partial\Omega)]^3$  dada por (2.2.1). Entonces, el problema

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{en } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = g & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u} = \varphi^0 & \text{en } \partial\Omega, \\ \lim_{|\bar{z}| \rightarrow +\infty} |\mathbf{u}| = 0, \end{cases} \quad (2.2.3)$$

tiene una única solución  $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{V}$  si y solo si, se verifica la condición de compatibilidad:

$$\int_{\Omega} g d\bar{z} = - \int_{\Gamma} \bar{\varphi}_1^0 dz. \quad (2.2.4)$$

Además, existen unas constantes  $C_0, \lambda > 0$  tales que

$$\|\mathbf{u}\|_{[H^2(\Omega^\alpha)]^3} + \|p\|_{H^1(\Omega^\alpha)/\mathbb{R}} \leq C_0 e^{-\alpha \lambda}, \quad (2.2.5)$$

para cada  $\alpha \geq 0$ , esto es, la única solución de (2.2.3) decae exponencialmente cuando  $z_1 \rightarrow +\infty$ .

**Observación 2.2.2.** La regularidad de la solución del problema 2.2.3 puede ser mejorada asumiendo mayor regularidad en los datos considerados (véase [60]).

*Demostración.* Dividiremos la demostración en dos partes.

(i) Supongamos que

$$\int_{\Omega} g d\bar{z} = \int_{\Gamma} \bar{\varphi}_1^0 dz = 0. \quad (2.2.6)$$

Entonces, se verifica (2.2.4). Además, supondremos que

$$\int_{\{z_1\} \times \omega} u_1 dz = 0 \quad \forall z_1 \geq 0. \quad (2.2.7)$$

Para comenzar con la demostración del teorema, consideremos el siguiente problema auxiliar: hallar  $\bar{\mathbf{u}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $\bar{p} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tales que verifican,

$$\begin{cases} -\Delta \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{p} = \mathbf{0} & \text{en } \Omega, \\ \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} = 0 & \text{en } \Omega, \\ \bar{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\varphi}^0 & \text{en } \partial\Omega, \\ \lim_{|\bar{\mathbf{z}}| \rightarrow +\infty} |\bar{\mathbf{u}}| = 0, \end{cases}$$

donde

$$\int_{\Gamma} \bar{\varphi}_1^0 dz = 0.$$

Este problema tiene solución única  $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) \in \mathcal{V}$  (véase Sección VI.2, [60]). Además, en la misma referencia, se asegura la existencia de unas constantes  $C_1, \lambda_1 > 0$  tales que

$$\|\bar{\mathbf{u}}\|_{[H^2(\Omega^\alpha)]^3} + \|\bar{p}\|_{H^1(\Omega^\alpha)/\mathbb{R}} \leq C_1 \|\bar{\mathbf{u}}\|_{[H^1(\Omega)]^3} e^{-\alpha\lambda_1},$$

para cada  $\alpha \geq 0$ . Sean  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}$  y  $\tilde{p} = p - \bar{p}$ . Entonces, el par  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p})$  verifica el problema,

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \tilde{p} = \mathbf{f} & \text{en } \Omega, \\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} = g & \text{en } \Omega, \\ \tilde{\mathbf{u}} = 0 & \text{en } \partial\Omega, \\ \lim_{|\tilde{\mathbf{z}}| \rightarrow +\infty} |\tilde{\mathbf{u}}| = 0. \end{cases}$$

Este problema tiene una única solución,  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}) \in \mathcal{V}$ , (véase, por ejemplo, [60, 114]) y además se verifica la estimación (véase el apéndice en [114], por ejemplo):

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{[H^2(\Omega)]^3} + \|\tilde{p}\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C \left( \|\mathbf{f}\|_{[L^2(\Omega)]^3} + \|g\|_{H^1(\Omega)} \right).$$

Como consecuencia, dado que  $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}}$ ,  $p = \tilde{p} + \bar{p}$ , deducimos que  $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{V}$  es la única solución del problema (2.2.3) y además, verifica la estimación:

$$\|\mathbf{u}\|_{[H^2(\Omega)]^3} + \|p\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C \left( \|\mathbf{f}\|_{[L^2(\Omega)]^3} + \|g\|_{H^1(\Omega)} + \|\bar{\mathbf{u}}\|_{[H^1(\Omega)]^3} \right).$$

Solo queda probar que dicha solución decae exponencialmente. Para ello sean  $\Gamma^\alpha := \{\alpha\} \times \omega$ , y

$$\boldsymbol{\varphi}_\alpha^0 = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{en } \partial\Omega^\alpha \setminus \Gamma^\alpha, \\ \bar{\varphi}_\alpha^0 = \mathbf{u}_{|z_1=\alpha} & \text{en } \Gamma^\alpha, \end{cases}$$

donde  $\varphi_\alpha^0 \in [H^{3/2}(\partial\Omega^\alpha)]^3$  (es decir,  $\bar{\varphi}_\alpha^0$  es la traza de  $\mathbf{u}$  en la sección  $\Gamma^\alpha$  del cilindro semi-infinito). Entonces, sea  $(\bar{\mathbf{u}}_\alpha, \bar{p}_\alpha) \in \mathcal{V}$  la única solución del problema:

$$\begin{cases} -\Delta \bar{\mathbf{u}}_\alpha + \nabla \bar{p}_\alpha = \mathbf{0} & \text{en } \Omega^\alpha, \\ \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_\alpha = 0 & \text{en } \Omega^\alpha \\ \bar{\mathbf{u}}_\alpha = \varphi_\alpha^0 & \text{en } \partial\Omega^\alpha, \\ \lim_{|\mathbf{z}| \rightarrow +\infty} |\bar{\mathbf{u}}_\alpha| = 0, \end{cases}$$

donde,

$$\int_{\Gamma^\alpha} \bar{u}_1 dz = \int_{\Gamma^\alpha} u_1 dz = 0,$$

se verifica por la hipótesis (2.2.7). Además, obtenemos la siguientes estimaciones (véanse [60, 114], por ejemplo):

$$\|\bar{\mathbf{u}}_\alpha\|_{[H^1(\Omega^\alpha)]^3} \leq C \|\mathbf{u}\|_{[H^{1/2}(\Gamma^\alpha)]^3}, \quad (2.2.8)$$

$$\|\bar{\mathbf{u}}_\alpha\|_{[H^2(\Omega^\beta)]^3} + \|\bar{p}_\alpha\|_{H^1(\Omega^\beta)/\mathbb{R}} \leq C \|\bar{\mathbf{u}}_\alpha\|_{[H^1(\Omega^\alpha)]^3} e^{-\alpha\lambda_1}, \quad (2.2.9)$$

para todo  $\beta \geq \alpha$ . Ahora si definimos  $\tilde{\mathbf{u}}_\alpha = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_\alpha$ ,  $\tilde{p} = p - \bar{p}_\alpha$  como la única solución del problema:

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{\mathbf{u}}_\alpha + \nabla \tilde{p}_\alpha = \mathbf{f} & \text{en } \Omega^\alpha, \\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}_\alpha = g & \text{en } \Omega^\alpha, \\ \tilde{\mathbf{u}}_\alpha = \mathbf{0} & \text{en } \partial\Omega^\alpha, \\ \lim_{|\mathbf{z}| \rightarrow +\infty} |\tilde{\mathbf{u}}_\alpha| = 0, \end{cases}$$

obtenemos la siguiente estimación (véase [114], por ejemplo),

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_\alpha\|_{[H^2(\Omega^\alpha)]^3} + \|\tilde{p}_\alpha\|_{H^1(\Omega^\alpha)/\mathbb{R}} \leq C \left( \|\mathbf{f}\|_{[L^2(\Omega^\alpha)]^3} + \|g\|_{H^1(\Omega^\alpha)} \right). \quad (2.2.10)$$

Por tanto, como  $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}_\alpha + \bar{\mathbf{u}}_\alpha$ ,  $p = \tilde{p} + \bar{p}_\alpha$  deducimos de (2.2.9), (2.2.10) y de que las funciones  $\mathbf{f}$  y  $g$  son exponencialmente decrecientes (véase (2.2.2)), la desigualdad:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{[H^2(\Omega^\alpha)]^3} + \|p\|_{H^1(\Omega^\alpha)/\mathbb{R}} &\leq C \left( \|\mathbf{f}\|_{[L^2(\Omega^\alpha)]^3} + \|g\|_{H^1(\Omega^\alpha)} + \|\bar{\mathbf{u}}_\alpha\|_{[H^1(\Omega^\alpha)]^3} e^{-\alpha\lambda_1} \right) \\ &\leq C(\tilde{C}_0 + \|\bar{\mathbf{u}}_\alpha\|_{[H^1(\Omega^\alpha)]^3}) e^{-\alpha\lambda_2}. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Dado que  $\|\mathbf{u}\|_{[H^{1/2}(\Gamma^\alpha)]^3} \leq C \|\mathbf{u}\|_{[H^1(\Omega)]^3}$  (véase, por ejemplo, [13]), entonces de (2.2.8) deducimos que  $\|\bar{\mathbf{u}}_\alpha\|_{[H^1(\Omega^\alpha)]^3} \leq C \|\mathbf{u}\|_{[H^1(\Omega)]^3}$ . Por tanto, se tiene que existe una constante  $\tilde{C} > 0$  tal que  $\|\bar{\mathbf{u}}_\alpha\|_{[H^1(\Omega^\alpha)]^3} \leq \tilde{C}$ . Así de (2.2.11) se deduce que,

$$\|\mathbf{u}\|_{[H^2(\Omega^\alpha)]^3} + \|p\|_{H^1(\Omega^\alpha)/\mathbb{R}} \leq C_0 e^{-\alpha\lambda},$$

es decir, la única solución del problema (2.2.3) decae exponencialmente.

(ii) Consideremos el problema en el caso general. A continuación, buscaremos un problema auxiliar que nos conduzca a un problema que verifique las condiciones del paso anterior.

Sea  $\Psi_0$  la única solución del problema:

$$\begin{cases} -\Delta \Psi_0 = 1 & \text{en } \omega, \\ \Psi_0 = 0 & \text{en } \partial\omega. \end{cases}$$

**Observación 2.2.3.** *Nótese que si  $\partial\omega$  es de clase  $\mathcal{C}^k$ , entonces  $\Psi_0 \in \mathcal{C}^k(\omega)$ .*

Sea,

$$k_0 := \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \Psi_0 dz,$$

donde  $|\omega|$  denota el área de la sección transversal  $\omega$ . Entonces, definimos una función  $\tilde{g} \in H^1(0, L; \mathcal{C}^k(\omega))$  dada por:

$$\tilde{g}(z_1, z_2, z_3) = \frac{\Psi_0(z_2, z_3)}{k_0 |\omega|} \int_{\omega} g(z_1, z_2, z_3) dz.$$

Como consecuencia de las propiedades de las funciones  $\Psi_0$  y  $g$ , es claro que esta función tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{cases} \tilde{g} \in H^1(0, L; \mathcal{C}^k(\omega)), \\ \tilde{g} = 0 & \text{en } \partial\omega, \\ \int_{\omega} \tilde{g}(z_1) dz = \frac{1}{k_0} \int_{\omega} \Psi_0(z_2, z_3) dz \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} g(z_1, z_2, z_3) dz \\ \quad = \int_{\omega} g(z_1) dz, \quad \forall z_1 \geq 0, \\ \exists C, \lambda > 0 \text{ tales que } \|\tilde{g}\|_{H^1(\Omega^\alpha)} \leq C e^{-\alpha\lambda}, \quad \forall \alpha \geq 0. \end{cases} \quad (2.2.12)$$

Ahora bien, definamos una función  $\hat{\mathbf{u}} = (\hat{u}_1, 0, 0)$  siendo

$$\hat{u}_1(z_1, z_2, z_3) = - \int_{z_1}^{+\infty} \tilde{g}(s, z_2, z_3) ds. \quad (2.2.13)$$

Por las propiedades (2.2.12) es fácil comprobar que se verifican las siguientes propiedades:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}} \in [H^2(\Omega)]^3 \text{ (de hecho } \hat{\mathbf{u}} \in H^2(0, L; [\mathcal{C}^k(\Omega)]^3)), \\ \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0} & \text{en } \partial\omega, \\ \int_{\Gamma^\alpha} (\hat{u}_1)|_{z_1=\alpha} dz = - \int_{\alpha}^{+\infty} \left( \int_{\omega} \tilde{g}(s, z_2, z_3) dz \right) ds = - \int_{\Omega^\alpha} g d\bar{z}, \\ \exists C, \lambda > 0 \text{ tales que } |\Delta \hat{\mathbf{u}}|_{[L^2(\Omega^\alpha)]^3} + \|\operatorname{div} \hat{\mathbf{u}}\|_{H^1(\Omega^\alpha)} \leq C e^{-\alpha\lambda}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (2.2.14)$$

Entonces, sea  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}) = (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}, p)$ . Este par, verifica el problema:

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \tilde{p} = \mathbf{f} + \Delta \hat{\mathbf{u}} & \text{en } \Omega, \\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} = g - \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}} & \text{en } \Omega, \\ \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\varphi}^0 & \text{en } \partial\Omega. \\ \lim_{|\bar{\mathbf{z}}| \rightarrow +\infty} |\tilde{\mathbf{u}}| = 0. \end{cases} \quad (2.2.15)$$

con

$$\tilde{\varphi}^0 = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{en } \partial\Omega \setminus \Gamma, \\ \tilde{\varphi}^0 - (\hat{u}_1)_{z_1=0} & \text{en } \Gamma, \end{cases}$$

donde  $\tilde{\varphi}^0 \in [H^{3/2}(\Gamma)]^3$ . Veamos que este problema verifica las condiciones del teorema y (2.2.6)–(2.2.7) del paso (i). En primer lugar, por (2.2.2) y las propiedades de  $\hat{\mathbf{u}}$  en (2.2.14), se tiene que existen unas constantes  $C, \lambda > 0$  tales que:

$$\|\mathbf{f} + \Delta \hat{\mathbf{u}}\|_{[L^2(\Omega^\alpha)]^3} + \|g - \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}}\|_{H^1(\Omega^\alpha)} \leq C e^{-\alpha\lambda},$$

para todo  $\alpha \geq 0$ . Además, por un lado se tiene que,

$$\int_{\Omega} (g - \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}}) d\bar{\mathbf{z}} = \int_{\Omega} g d\bar{\mathbf{z}} + \int_{\Gamma} (\hat{u}_1)_{|z_1=0} dz = \int_{\Omega} (g - g) d\bar{\mathbf{z}} = 0,$$

teniendo en cuenta (2.2.14)<sub>3</sub>. Por otro lado, si denotamos por  $\mathbf{n}$  al vector normal unitario en los puntos de la superficie de  $\partial\Omega$ , se tiene que,

$$\int_{\Gamma} (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}) dz = \int_{\Gamma} (\tilde{\varphi}_1^0 - (\hat{u}_1)_{|z_1=0}) dz = \int_{\Gamma} \tilde{\varphi}_1^0 dz - \int_{\Omega} g d\bar{\mathbf{z}} = 0, \quad (2.2.16)$$

utilizando (2.2.14)<sub>3</sub> y (2.2.4). Por tanto, se verifica la condición de compatibilidad del problema (2.2.15). Solo nos queda verificar que se cumplen las hipótesis consideradas en el paso (i). Acabamos de probar que se verifica (2.2.6). Ahora bien, sea  $\Omega(0, \alpha) := \{\bar{\mathbf{z}} \in \Omega; 0 < z_1 < \alpha\}$ . Teniendo en cuenta las ecuaciones del problema (2.2.15) y las propiedades (2.2.14), deducimos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^\alpha} (\tilde{u}_1)_{z_1=\alpha} dz - \int_{\Gamma} (\tilde{u}_1)_{|z_1=0} dz &= \int_{\Omega(0,\alpha)} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} d\bar{\mathbf{z}} = \int_{\Omega(0,\alpha)} (g - \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}}) d\bar{\mathbf{z}} \\ &= \int_{\Omega(0,\alpha)} g d\bar{\mathbf{z}} + \int_{\Gamma} (\hat{u}_1)_{|z_1=0} dz - \int_{\Gamma^\alpha} (\hat{u}_1)_{|z_1=\alpha} dz \\ &= \int_{\Omega(0,\alpha)} g d\bar{\mathbf{z}} - \int_{\Omega} g d\bar{\mathbf{z}} + \int_{\Omega^\alpha} g d\bar{\mathbf{z}} = 0, \end{aligned}$$

que junto con (2.2.16) se tiene que,

$$\int_{\Gamma^\alpha} (\tilde{u}_1)_{z_1=\alpha} dz = 0, \quad \forall \alpha \geq 0,$$

es decir, la hipótesis (2.2.7) también se verifica. Por tanto, aplicando al problema (2.2.15) los argumentos desarrollados en el paso (i), deducimos que el problema (2.2.15) tiene solución única y es tal que existen unas constantes  $C_0, \lambda > 0$  tales que:

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{[H^2(\Omega^\alpha)]^3} + \|\tilde{p}\|_{H^1(\Omega^\alpha)/\mathbb{R}} \leq C_0 e^{-\alpha\lambda}.$$

Por tanto, como  $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{u}}$ ,  $p = \tilde{p}$ , deducimos que,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{[H^2(\Omega^\alpha)]^3} + \|p\|_{H^1(\Omega^\alpha)/\mathbb{R}} &\leq \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{[H^2(\Omega^\alpha)]^3} + \|\tilde{p}\|_{H^1(\Omega^\alpha)/\mathbb{R}} + \|\hat{\mathbf{u}}\|_{[H^2(\Omega^\alpha)]^3} \\ &\leq C_0 e^{-\alpha\lambda} + \|\hat{\mathbf{u}}\|_{[H^2(\Omega^\alpha)]^3}, \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

que, junto a la Observación 2.2.4, nos garantiza que la única solución  $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{V}$  del problema (2.2.3)–(2.2.4) decae exponencialmente cuando  $z_1 \rightarrow +\infty$ .

Hemos completado así la demostración del teorema.  $\square$

**Observación 2.2.4.** De la definición de  $\hat{\mathbf{u}}$  (véase (2.2.13)) se deduce que sus parciales de primer y segundo orden decaen exponencialmente como consecuencia del decaimiento exponencial de la función  $\tilde{g}$  (véase (2.2.12)). Sin embargo, para poder probar (2.2.17) debemos conocer la acotación de la norma  $|\hat{\mathbf{u}}|_{[L^2(\Omega^\alpha)]^3}$ . Esto es,

$$|\hat{\mathbf{u}}|_{[L^2(\Omega^\alpha)]^3}^2 = \int_\alpha^{+\infty} \left( \int_\omega \hat{u}_1^2 dz \right) dz_1 = \int_\alpha^{+\infty} \left( \int_\omega \left( \int_{z_1}^{+\infty} \tilde{g}(\xi, z) d\xi \right)^2 dz \right) dz_1.$$

Sea  $(z_1^k)_k$  una sucesión estrictamente creciente tal que  $z_1^k \rightarrow +\infty$  cuando  $k \rightarrow +\infty$ , entonces:

$$\begin{aligned} \int_\omega \left( \int_{z_1^1}^{+\infty} \tilde{g}(\xi, \mathbf{z}) d\xi \right)^2 dz &= \int_\omega \left( \int_{z_1^1}^{z_1^2} \tilde{g}(\xi, \mathbf{z}) d\xi + \int_{z_1^2}^{+\infty} \tilde{g}(\xi, \mathbf{z}) d\xi \right)^2 dz \\ &\leq \int_\omega 2 \left( \left( \int_{z_1^1}^{z_1^2} \tilde{g}(\xi, \mathbf{z}) d\xi \right)^2 + \left( \int_{z_1^2}^{+\infty} \tilde{g}(\xi, \mathbf{z}) d\xi \right)^2 \right) dz \\ &\leq \int_\omega \left( \sum_{k=1}^{+\infty} 2^k (z_1^{k+1} - z_1^k) \int_{z_1^k}^{z_1^{k+1}} \tilde{g}^2(\xi, \mathbf{z}) d\xi \right) dz = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^k (z_1^{k+1} - z_1^k) \int_{z_1^k}^{z_1^{k+1}} \int_\omega \tilde{g}^2(\xi, \mathbf{z}) dz d\xi \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} 2^k (z_1^{k+1} - z_1^k) C^2 e^{-2\lambda z_1^k}, \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

teniendo en cuenta (2.2.12)<sub>5</sub>. Si escogemos  $(z_1^k)_k$  tal que además,

$$2^k (z_1^{k+1} - z_1^k) C^2 e^{-2\lambda z_1^k} \leq \frac{\tilde{C}}{2^k} |\tilde{g}|_{L^2(\Omega^{z_1^k})}^2, \quad (2.2.19)$$

entonces (véase (2.2.12)<sub>5</sub>),

$$|\hat{\mathbf{u}}|_{[L^2(\Omega^\alpha)]^3}^2 \leq \int_{\alpha}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\tilde{C}}{2^k} |\tilde{g}|_{L^2(\Omega^{z_1^k})}^2 dz_1 \leq C^* e^{-2\lambda\alpha},$$

con  $C^* > 0$  (que podría depender de  $\lambda$  a través de (2.2.19)), concluyendo la acotación que necesitamos. Veamos que podemos escoger una sucesión  $(z_1^k)_k$  con las propiedades utilizadas. Si escogemos la sucesión tal que

$$z_1^k \leq z_1^{k+1} \leq z_1^k + \frac{\tilde{C}}{C^2} \left( \frac{e^{\lambda z_1^k}}{2^k} \right)^2 |\tilde{g}|_{L^2(\Omega^{z_1^k})}^2, \quad (2.2.20)$$

es sencillo comprobar que se verifica (2.2.19). Finalmente, consideramos una sucesión  $(z_1^k)_k$  tal que  $z_1^k \geq k$  y tomamos  $\tilde{C}$  tal que  $\frac{\tilde{C}}{C^2} \left( \frac{e^{\lambda z_1^k}}{2^k} \right)^2 |\tilde{g}|_{L^2(\Omega^{z_1^k})}^2$  no sea demasiado pequeño y se verifique la desigualdad (2.2.20) (nótese que si  $|\tilde{g}|_{L^2(\Omega^{z_1^k})} = 0$ , entonces las desigualdades en (2.2.18) se verifican trivialmente).

### 2.2.2. Problema de Leray modificado

Como ya hemos comentado al inicio de esta sección, debido a la dependencia del dominio  $\hat{\Omega}_t^\varepsilon$  de la función  $R$ , las ecuaciones que obtendremos en los problemas de los correctores de capa límite diferirán ligeramente de la estructura de los problemas de Leray. En particular, obtendremos unas ecuaciones donde el término de la derecha (véase el Problema 2.2.5) dependerá de las incógnitas a través de sus derivadas multiplicadas por coeficientes muy pequeños (de orden  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ ). Gracias a la presencia de estos coeficientes seremos capaces de demostrar la existencia y regularidad de solución del conjunto de ecuaciones que denominaremos como problema de Leray modificado.

Si  $(\mathbf{v}, q) \in \mathcal{V}$  decae exponencialmente cuando  $z_1 \rightarrow +\infty$  (en sus respectivas normas), consideremos una función lineal  $\mathbf{f} : \mathcal{V} \rightarrow [L^2(\Omega)]^3$  tal que

$$|\mathbf{f}(\mathbf{v}, q)|_{[L^2(\Omega^\alpha)]^3} \leq C \left( \|\mathbf{v}\|_{[H^2(\Omega^\alpha)]^3} + \|q\|_{H^1(\Omega^\alpha)/\mathbb{R}} \right) \leq C e^{-\lambda\alpha}, \quad \forall \alpha \geq 0, \quad (2.2.21)$$

$$|\mathbf{f}(\mathbf{v}, q)|_{[L^2(\Omega)]^3} \leq C\varepsilon \left( \|\mathbf{v}\|_{[H^2(\Omega)]^3} + \|q\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} \right). \quad (2.2.22)$$

Además, sea  $g : [H^2(\Omega)]^3 \rightarrow H^1(\Omega)$  una función lineal y consideremos unas funciones  $\tilde{\mathbf{f}} \in [L^2(\Omega)]^3$  y  $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$  tales que:

$$\left| \tilde{\mathbf{f}} \right|_{[L^2(\Omega^\alpha)]^3} + \|\tilde{g}\|_{H^1(\Omega^\alpha)} \leq C e^{-\lambda\alpha}. \quad (2.2.23)$$

Entonces, el problema de Leray modificado es el siguiente:

**Problema 2.2.5.** Hallar  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tales que,

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}(\mathbf{u}, p) + \tilde{\mathbf{f}} & \text{en } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = g(\mathbf{u}) + \tilde{g} & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}^0 & \text{en } \partial\Omega, \\ \lim_{|\bar{\mathbf{z}}| \rightarrow +\infty} |\mathbf{u}| = 0, \end{cases} \quad (2.2.24)$$

con,

$$\boldsymbol{\varphi}^0 = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{en } \partial\Omega \setminus \Gamma, \\ \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^0 & \text{en } \Gamma, \end{cases}$$

donde  $\boldsymbol{\varphi}^0 \in [H^{3/2}(\partial\Omega)]^3$  y las funciones  $\mathbf{f}$ ,  $\tilde{\mathbf{f}}$  y  $\tilde{g}$  verifican (2.2.21)–(2.2.23).

Además del Problema 2.2.5, consideraremos que se verifica una de las dos hipótesis que enunciaremos a continuación. Estas dos hipótesis alternativas se deben a los dos tipos de problemas que abordaremos en la Sección 2.3.

**Hipótesis 2.2.6.** Supongamos que,

$$\int_{\Gamma} \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1^0 dz = 0, \quad (2.2.25)$$

y que,

$$\int_{\omega} \tilde{g} dz = 0 \quad \forall z_1 \geq 0. \quad (2.2.26)$$

Además, supondremos que la función lineal  $g$  verifica que:

(i) Si  $\mathbf{v} \in [H^2(\Omega)]^3$  decae exponencialmente cuando  $z_1 \rightarrow +\infty$ , existen  $C_0, \lambda > 0$  tales que:

$$\|g(\mathbf{v})\|_{H^1(\Omega^\alpha)} \leq C \|\mathbf{v}\|_{[H^2(\Omega^\alpha)]^3} \leq C_0 e^{-\lambda \alpha}, \quad (2.2.27)$$

$$\|g(\mathbf{v})\|_{H^1(\Omega)} \leq C \varepsilon \|\mathbf{v}\|_{[H^2(\Omega)]^3}. \quad (2.2.28)$$

(ii) Si se verifica

$$\int_{\omega} v_1 dz = 0 \quad \forall z_1 \geq 0,$$

entonces,

$$\int_{\omega} g(\mathbf{v}) dz = 0 \quad \forall z_1 \geq 0. \quad (2.2.29)$$



En el caso de que se verifique la Hipótesis 2.2.6, consideraremos el siguiente conjunto:

$$K := \{(\mathbf{v}, q) \in \mathcal{V}; \exists C_0, \lambda > 0 \text{ tales que } \|\mathbf{v}\|_{[H^2(\Omega^\alpha)]^3} + \|q\|_{H^1(\Omega^\alpha)/\mathbb{R}} \leq C_0 e^{-\lambda\alpha}, \forall \alpha \geq 0; \int_{\omega} v_1 dz = 0\}. \quad (2.2.30)$$

**Hipótesis 2.2.7.** Supongamos que  $g(\mathbf{u}) \equiv 0$ . En ese caso, asumiremos que también se verifica la siguiente condición de compatibilidad:

$$\int_{\Omega} \tilde{g} d\bar{z} = - \int_{\Gamma} \tilde{\varphi}_1^0 dz. \quad (2.2.31)$$

En el caso de que se verifique la Hipótesis 2.2.7, consideraremos el siguiente conjunto:

$$\tilde{K} := \{(\mathbf{v}, q) \in \mathcal{V}; \exists C_0, \lambda > 0 \text{ tales que } \|\mathbf{v}\|_{[H^2(\Omega^\alpha)]^3} + \|q\|_{H^1(\Omega^\alpha)/\mathbb{R}} \leq C_0 e^{-\lambda\alpha}, \forall \alpha \geq 0\}. \quad (2.2.32)$$

Para estudiar el Problema 2.2.5, consideremos el operador  $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  tal que  $(\mathbf{u}, p) = T(\mathbf{v}, q)$  es la única solución (véase el Teorema 2.2.1) del siguiente problema:

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}(\mathbf{v}, q) + \tilde{\mathbf{f}} & \text{en } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = g(\mathbf{v}) + \tilde{g} & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u} = \varphi^0 & \text{en } \partial\Omega, \\ \lim_{|\bar{z}| \rightarrow +\infty} |\mathbf{u}| = 0, & \end{cases} \quad (2.2.33)$$

donde las funciones  $\mathbf{f}$ ,  $\tilde{\mathbf{f}}$  y  $\varphi^0$  verifican las mismas condiciones que en el Problema 2.2.5 y además se verifica la Hipótesis 2.2.6, o bien la Hipótesis 2.2.7. Es claro que  $K \subset \tilde{K} \subset \mathcal{V}$  y  $K \neq \emptyset$  (véanse (2.2.30) y (2.2.32)). Además, dadas las definiciones de los espacios  $K$  y  $\tilde{K}$ , se puede comprobar que son espacios cerrados y convexos. En los siguientes teoremas probaremos que la restricción  $T : K \rightarrow K$  ( $T : \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}$ , respectivamente) es una contracción. Como consecuencia,  $T$  tiene un único punto fijo en  $K$  ( $\tilde{K}$ , respectivamente), esto es, existe un único elemento de  $K$  ( $\tilde{K}$ , respectivamente) tal que es solución del Problema 2.2.5.

**Teorema 2.2.8.** Consideremos el Problema 2.2.33 junto con la Hipótesis 2.2.6. En ese caso la restricción  $T : K \rightarrow K$  es una contracción en  $K$ . Como consecuencia, existe un único  $(\mathbf{u}^*, p^*) \in K$  tal que es solución del Problema 2.2.5. Además, existen  $C_0, \lambda > 0$  tales que

$$\|\mathbf{u}^*\|_{[H^2(\Omega^\alpha)]^3} + \|p^*\|_{H^1(\Omega^\alpha)/\mathbb{R}} \leq C_0 e^{-\lambda\alpha},$$

para cada  $\alpha \geq 0$ .

*Demostración.* Probemos que si  $(\mathbf{v}, q) \in K$  entonces  $(\mathbf{u}, p) \in K$ . Como  $(\mathbf{v}, q) \in K$  y se verifica la Hipótesis 2.2.6, se tiene (2.2.29) que junto con (2.2.25)–(2.2.26) implica que se verifica la condición de compatibilidad del problema (2.2.33). Además,  $\mathbf{f}$ ,  $\tilde{\mathbf{f}}$ ,  $g$  y  $\tilde{g}$  decaen exponencialmente cuando  $z_1 \rightarrow +\infty$  por (2.2.21), (2.2.23) y (2.2.27). Así, aplicando el Teorema 2.2.1, concluimos que  $(\mathbf{u}, p) = T(\mathbf{v}, q)$  es la única solución del problema (2.2.33) verificando (2.2.5). Ahora, sea  $\Omega(a, b) := \{\bar{\mathbf{z}} \in \Omega; a < z_1 < b\}$ , entonces

$$\int_{\omega} u_1(b) - \int_{\omega} u_1(a) = \int_{\Omega(a,b)} \operatorname{div} \mathbf{u} = \int_{\Omega(a,b)} (g(\mathbf{v}) + \tilde{g}) = \int_a^b \int_{\omega} (g(\mathbf{v}) + \tilde{g}) = 0,$$

por (2.2.26) y (2.2.29). Por tanto, como  $a$  y  $b$  son elegidos arbitrariamente y se verifica (2.2.25), deducimos que

$$\int_{\omega} u_1 dz = 0 \quad \forall z_1 \geq 0.$$

Por tanto,  $(\mathbf{u}, p) \in K$ .

Veamos ahora que  $T$  es contractiva. Para ello sean  $(\mathbf{v}_1, q_1), (\mathbf{v}_2, q_2) \in K$ ,  $(\mathbf{u}_1, p_1) = T(\mathbf{v}_1, q_1)$  y  $(\mathbf{u}_2, p_2) = T(\mathbf{v}_2, q_2)$ . Definamos  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}) = (\mathbf{u}_1, p_1) - (\mathbf{u}_2, p_2)$ , de modo que es solución del problema:

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \tilde{p} = \mathbf{f}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, q_1 - q_2) \text{ en } \Omega, \\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} = g(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \text{ en } \Omega, \\ \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \text{ en } \partial\Omega, \\ \lim_{|\bar{\mathbf{z}}| \rightarrow +\infty} |\tilde{\mathbf{u}}| = 0. \end{cases}$$

Este problema tiene solución única y además se verifica la siguiente estimación (véase [114], por ejemplo):

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{[H^2(\Omega)]^3} + \|\tilde{p}\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} &\leq C \left( \|\mathbf{f}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, q_1 - q_2)\|_{[L^2(\Omega)]^3} + \|g(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\|_{H^1(\Omega)} \right) \\ &\leq C\varepsilon \left( \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{[L^2(\Omega)]^3} + \|q_1 - q_2\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} \right), \end{aligned}$$

por (2.2.22) y (2.2.28). Por tanto, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño (recordemos que  $\varepsilon \ll 1$ ) tenemos que  $C\varepsilon < 1$ . Entonces,  $T$  es una aplicación contractiva en  $K$  y, como consecuencia del Teorema del punto fijo de Banach (véase, por ejemplo, [150]), existe un único par  $(\mathbf{u}^*, p^*) \in K$  tal que  $(\mathbf{u}^*, p^*) = T(\mathbf{u}^*, p^*)$  y es solución del Problema 2.2.5.  $\square$

**Teorema 2.2.9.** *Consideremos el Problema 2.2.33 junto con la Hipótesis 2.2.7. En ese caso la restricción  $T : \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}$  es una contracción en  $\tilde{K}$ . Como consecuencia, existe un único  $(\mathbf{u}^*, p^*) \in \tilde{K}$  tal que es solución del Problema 2.2.5. Además, existen  $C_0, \lambda > 0$  tales que*

$$\|\mathbf{u}^*\|_{[H^2(\Omega^\alpha)]^3} + \|p^*\|_{H^1(\Omega^\alpha)/\mathbb{R}} \leq C_0 e^{-\lambda\alpha},$$

para cada  $\alpha \geq 0$ .

*Demostración.* Probemos que si  $(\mathbf{v}, q) \in \tilde{K}$  entonces  $(\mathbf{u}, p) \in \tilde{K}$ . Las funciones  $\mathbf{f}$ ,  $\tilde{\mathbf{f}}$  y  $\tilde{g}$  decaen exponencialmente cuando  $z_1 \rightarrow +\infty$  por (2.2.21) y (2.2.23). Así, dado que se verifica la condición de compatibilidad por (2.2.31), aplicando el Teorema 2.2.1, concluimos que  $(\mathbf{u}, p) = T(\mathbf{v}, q)$  es la única solución del problema (2.2.33) verificando (2.2.5). Por tanto,  $(\mathbf{u}, p) \in \tilde{K}$ .

Veamos ahora que  $T$  es contractiva. Para ello sean  $(\mathbf{v}_1, q_1), (\mathbf{v}_2, q_2) \in \tilde{K}$ ,  $(\mathbf{u}_1, p_1) = T(\mathbf{v}_1, q_1)$  y  $(\mathbf{u}_2, p_2) = T(\mathbf{v}_2, q_2)$ . Definamos  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}) = (\mathbf{u}_1, p_1) - (\mathbf{u}_2, p_2)$ , de modo que es solución del problema:

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \tilde{p} = \mathbf{f}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, q_1 - q_2) \text{ en } \Omega, \\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} = 0 \text{ en } \Omega, \\ \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \text{ en } \partial\Omega, \\ \lim_{|\bar{\mathbf{z}}| \rightarrow +\infty} |\tilde{\mathbf{u}}| = 0. \end{cases}$$

Este problema tiene solución única y además se verifica la siguiente estimación (véase [114], por ejemplo):

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{[H^2(\Omega)]^3} + \|\tilde{p}\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} &\leq C \|\mathbf{f}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, q_1 - q_2)\|_{[L^2(\Omega)]^3} \\ &\leq C\varepsilon \left( \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{[L^2(\Omega)]^3} + \|q_1 - q_2\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} \right), \end{aligned}$$

por (2.2.22). Por tanto, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño (recordemos que  $\varepsilon \ll 1$ ) tenemos que  $C\varepsilon < 1$ . Entonces,  $T$  es una aplicación contractiva en  $\tilde{K}$  y, como consecuencia del Teorema del punto fijo de Banach (véase, por ejemplo, [150]), existe un único par  $(\mathbf{u}^*, p^*) \in \tilde{K}$  tal que  $(\mathbf{u}^*, p^*) = T(\mathbf{u}^*, p^*)$  y es solución del Problema 2.2.5.  $\square$

## 2.3. Corrector de capa límite en espacio

En esta sección estudiaremos los correctores de capa límite en espacio necesarios para mejorar la aproximación asintótica propuesta (1.3.58)–(1.3.59) en las vecindades de la entrada y salida de la tubería. Para ello, al igual que se realiza en el problema estacionario con paredes rígidas en [98], consideraremos funciones que dependen de una variable axial dilatada, en concreto  $z_1 := s_1/\varepsilon$ . Estudiaremos detalladamente los correctores que mejoran la aproximación al inicio de la tubería, siendo los resultados análogos para los correctores del otro extremo. De este modo, consideramos las funciones,

$$\begin{aligned} B_k \left( t, \frac{s_1}{\varepsilon}, s_2, s_3 \right) (\varepsilon) &:= B_k^0 \left( t, \frac{s_1}{\varepsilon}, s_2, s_3 \right) + \varepsilon B_k^1 \left( t, \frac{s_1}{\varepsilon}, s_2, s_3 \right) \\ &\quad + \varepsilon^2 B_k^2 \left( t, \frac{s_1}{\varepsilon}, s_2, s_3 \right), \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

$$b \left( t, \frac{s_1}{\varepsilon}, s_2, s_3 \right) (\varepsilon) := \frac{1}{\varepsilon} b^1 \left( t, \frac{s_1}{\varepsilon}, s_2, s_3 \right) + b^2 \left( t, \frac{s_1}{\varepsilon}, s_2, s_3 \right) + \varepsilon b^3 \left( t, \frac{s_1}{\varepsilon}, s_2, s_3 \right), \quad (2.3.2)$$

definidas sobre el dominio semi-infinito,

$$\Omega_L := (0, +\infty) \times \omega,$$

para cada  $t \in [0, T]$ , y tal que (véase (2.1.5)):

$$u_1^0(t, 0, s_2, s_3) \mathbf{v}_1(0) + \mathbf{B}^0(t, 0, s_2, s_3) = \mathbf{g}_1^0, \quad (2.3.3)$$

$$\mathbf{u}^1(t, 0, s_2, s_3) + \mathbf{B}^1(t, 0, s_2, s_3) = \mathbf{g}_1^1, \quad (2.3.4)$$

$$\mathbf{u}^2(t, 0, s_2, s_3) + \mathbf{B}^2(t, 0, s_2, s_3) = \mathbf{g}_1^2, \quad (2.3.5)$$

donde  $\mathbf{B}^i = (B_k^i)$ , ( $i = 0, 1, 2; k = 1, 2, 3$ ) son los correctores en espacio de la velocidad en  $s_1 = 0$ , y donde  $u_1^0$ ,  $\mathbf{u}^1$ ,  $\mathbf{u}^2$  denotan los términos del desarrollo asintótico identificados en el Teorema 1.3.5. Por su parte, las funciones  $b^j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) denotan los correctores para el término de presión en la entrada de la tubería. Definamos la variable auxiliar,

$$\tilde{z}_1 = \frac{z_1}{R(t, 0)}, \quad (2.3.6)$$

que junto con (1.3.23) define las coordenadas cartesianas locales tridimensionales  $\bar{\mathbf{z}} = (\tilde{z}_1, \mathbf{z})$ . Además, para cada  $(\mathbf{B}, b) \in \mathcal{V} = [H^2(\Omega_L)]^3 \times H^1(\Omega_L)/\mathbb{R}$ , definimos las componentes de una función  $\mathbf{G}(\mathbf{B}, b) \in [L^2(\Omega_L)]^3$  dadas por,

$$G_k(\mathbf{B}, b) := \frac{R}{\rho_0 \nu} (R - R(t, 0)) \frac{\partial b}{\partial z_1} \delta_{k1} - (R^2 - R^2(t, 0)) \frac{\partial^2 B_k}{\partial z_1^2}, \quad (2.3.7)$$

donde  $\delta_{ij}$  denota la delta de Kronecker. También definimos el conjunto,

$$\Omega_L^\alpha := \{\bar{\mathbf{z}} \in \Omega_L; \tilde{z}_1 > \alpha\},$$

para cada  $\alpha \geq 0$ . En el siguiente teorema, caracterizamos los términos de los correctores de capa límite (2.3.3)–(2.3.5), y veremos que son elementos de los conjuntos  $K$  o  $\tilde{K}$  definidos en (2.2.30) y (2.2.32), respectivamente.

**Teorema 2.3.1.** *Los correctores de capa límite para la entrada de la tubería verifican que:*

(i) *Existe un único  $(\mathbf{B}^0, b^1) \in K$  solución del problema:*

$$\begin{cases} \Delta_{\bar{\mathbf{z}}} \mathbf{B}^0 = \frac{R}{\rho_0 \nu} \nabla_{\bar{\mathbf{z}}} b^1 + \mathbf{G}(\mathbf{B}^0, b^1) \text{ en } \Omega_L, \\ \operatorname{div}_{\bar{\mathbf{z}}} \mathbf{B}^0 = (R(t, 0) - R) \frac{\partial B_1^0}{\partial z_1} \text{ en } \Omega_L, \\ \mathbf{B}^0 = \mathbf{0} \text{ en } s_3 = 1, \\ \mathbf{B}^0 = (g_{1,1}^0 - u_1^0, g_{1,2}^0, g_{1,3}^0) \text{ en } s_1 = 0. \end{cases} \quad (2.3.8)$$

*Esta solución decae exponencialmente cuando  $z_1 \rightarrow +\infty$ , es decir, para cada  $\alpha \geq 0$  existen  $C > 0$  y  $\lambda > 0$  tales que:*

$$\|\mathbf{B}^0\|_{[H^2(\Omega_L^\alpha)]^3} + \|b^1\|_{H^1(\Omega_L^\alpha)/\mathbb{R}} \leq C e^{-\lambda \alpha}.$$

(ii) Existe un único  $(\mathbf{B}^1, b^2) \in \tilde{K}$  solución del problema:

$$\begin{cases} \Delta_{\bar{\mathbf{z}}} \mathbf{B}^1 = \frac{R}{\rho_0 \nu} \nabla_{\bar{\mathbf{z}}} b^2 + \mathbf{G}(\mathbf{B}^1, b^2) - \frac{R^2}{\nu} \mathbf{F}^1(\mathbf{B}^0, b^1) & \text{en } \Omega_L, \\ \operatorname{div}_{\bar{\mathbf{z}}} \mathbf{B}^1 = f^1(\mathbf{B}^0) & \text{en } \Omega_L, \\ \mathbf{B}^1 = \mathbf{0} & \text{en } s_3 = 1, \\ \mathbf{B}^1 = \mathbf{g}_1^1 - \mathbf{u}^1 & \text{en } s_1 = 0, \end{cases} \quad (2.3.9)$$

donde,

$$\begin{aligned} F_k^1(\mathbf{B}^0, b^1) := & -B_1^0 \frac{\partial B_k^0}{\partial z_1} - \frac{1}{R} \left( B_2^0 \frac{\partial B_k^0}{\partial z_2} + B_3^0 \frac{\partial B_k^0}{\partial z_3} \right) + \nu \left( 2\kappa s_3 \cos s_2 R \frac{\partial^2 B_k^0}{\partial z_1^2} \right. \\ & + \frac{\kappa}{R s_3} \sin s_2 \frac{\partial B_k^0}{\partial s_2} - \frac{\kappa}{R} \cos s_2 \frac{\partial B_k^0}{\partial s_3} - 2\tau \frac{\partial^2 B_k^0}{\partial z_1 \partial s_2} - 2 \frac{s_3}{R} \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial^2 B_k^0}{\partial z_1 \partial s_3} \Big) \\ & + 2\nu \left( \left( \kappa \frac{\partial B_1^0}{\partial z_1} - \tau \frac{\partial B_3^0}{\partial z_1} \right) \delta_{2k} - \kappa \frac{\partial B_2^0}{\partial z_1} \delta_{1k} + \tau \frac{\partial B_2^0}{\partial z_1} \delta_{3k} \right) \\ & - \frac{1}{\rho_0} \left( \kappa s_3 \cos s_2 R \frac{\partial b^1}{\partial z_1} - \tau \frac{\partial b^1}{\partial s_2} - \frac{s_3}{R} \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial b^1}{\partial s_3} \right) \delta_{1k} \\ & + u_1^0 \frac{\partial B_k^0}{\partial z_1} + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial z_2} B_2^0 + \frac{\partial u_1^0}{\partial z_3} B_3^0 \right) \delta_{1k}, \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

$$f^1(\mathbf{B}^0) := -R \left( -\kappa B_2^0 + \kappa s_3 \cos s_2 R \frac{\partial B_1^0}{\partial z_1} - \tau \frac{\partial B_1^0}{\partial s_2} - \frac{s_3}{R} \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial B_1^0}{\partial s_3} \right). \quad (2.3.11)$$

Esta solución decae exponencialmente cuando  $z_1 \rightarrow +\infty$ , es decir, para cada  $\alpha \geq 0$  existen  $C > 0$  y  $\lambda > 0$  tales que:

$$\|\mathbf{B}^1\|_{[H^2(\Omega_L^c)]^3} + \|b^2\|_{H^1(\Omega_L^c)/\mathbb{R}} \leq C e^{-\lambda \alpha}.$$

(iii) Existe un único  $(\mathbf{B}^2, b^3) \in \tilde{K}$  solución del problema:

$$\begin{cases} \Delta_{\bar{\mathbf{z}}} \mathbf{B}^2 = \frac{R}{\rho_0 \nu} \nabla_{\bar{\mathbf{z}}} b^3 + \mathbf{G}(\mathbf{B}^2, b^3) - \frac{R^2}{\nu} \mathbf{F}^2(\mathbf{B}^0, \mathbf{B}^1, b^1, b^2) & \text{en } \Omega_L, \\ \operatorname{div}_{\bar{\mathbf{z}}} \mathbf{B}^2 = f^2(\mathbf{B}^0, \mathbf{B}^1) & \text{en } \Omega_L, \\ \mathbf{B}^2 = \mathbf{0} & \text{en } s_3 = 1, \\ \mathbf{B}^2 = \mathbf{g}_1^2 - \mathbf{u}^2 & \text{en } s_1 = 0, \end{cases} \quad (2.3.12)$$

donde,

$$\begin{aligned} F_k^2(\mathbf{B}^0, \mathbf{B}^1, b^1, b^2) := & -B_1^0 \frac{\partial B_k^0}{\partial z_1} - \frac{1}{R} \left( B_2^0 \frac{\partial B_k^0}{\partial z_2} + B_3^0 \frac{\partial B_k^0}{\partial z_3} \right) - (\kappa B_1^0 - \tau B_3^0) \delta_{2k} + \kappa B_2^0 \delta_{1k} - \tau B_2^0 \delta_{3k} \\ & - B_1^0 \left( \kappa s_3 \cos s_2 R \frac{\partial B_k^0}{\partial z_1} \frac{\partial B_k^1}{\partial z_1} - \tau \frac{\partial B_k^0}{\partial s_2} - \frac{s_3}{R} \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial B_k^0}{\partial s_3} \right) - \frac{1}{R} \left( B_2^0 \frac{\partial B_k^1}{\partial z_2} + B_3^0 \frac{\partial B_k^1}{\partial z_3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\nu\kappa s_3 \cos s_2 R \left( \left( \kappa \frac{\partial B_1^0}{\partial z_1} - \tau \frac{\partial B_3^0}{\partial z_1} \right) \delta_{2k} - \kappa \frac{\partial B_2^0}{\partial z_1} \delta_{1k} + \tau \frac{\partial B_2^0}{\partial z_1} \delta_{3k} \right) \\
& + \nu \left( 2 \frac{\partial B_k^1}{\partial z_1} - \frac{\kappa}{R} \frac{\partial B_k^1}{\partial z_2} + 2\kappa s_3 \cos s_2 R \frac{\partial^2 B_k^1}{\partial z_1^2} - 2\tau \frac{\partial^2 B_k^1}{\partial z_1 \partial s_2} \right. \\
& - 2 \frac{s_3}{R} \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial^2 B_k^1}{\partial z_1 \partial s_3} + (\kappa s_3 \cos s_2 R)^2 \frac{\partial^2 B_k^0}{\partial z_1^2} - s_3 \cos s_2 \frac{\partial B_k^0}{\partial z_2} - \tau' \frac{\partial B_k^0}{\partial s_2} \\
& + \kappa s_3 \cos s_2 R \left( \kappa s_3 \cos s_2 R \frac{\partial^2 B_k^0}{\partial z_1^2} - \frac{s_3}{R} \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial^2 B_k^0}{\partial z_1 \partial s_3} \right) + \frac{s_3}{R^2} \left( \frac{\partial R}{\partial s_1} \right)^2 \frac{\partial B_k^0}{\partial s_3} - \frac{s_3}{R} \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial B_k^0}{\partial s_3} \\
& + \kappa' s_3 \cos s_2 R \frac{\partial B_k^0}{\partial z_1} + \kappa s_3 \cos s_2 \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial B_k^0}{\partial z_1} - 2\tau \kappa s_3 \cos s_2 R \frac{\partial^2 B_k^0}{\partial z_1 \partial s_2} + \tau^2 \frac{\partial^2 B_k^0}{\partial s_2^2} \\
& - 2\kappa s_3^2 \cos s_2 \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial^2 B_k^0}{\partial z_1 \partial s_3} + 2\tau \frac{s_3}{R} \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial^2 B_k^0}{\partial s_2 \partial s_3} + \tau \kappa s_3 \sin s_2 R \frac{\partial B_k^0}{\partial z_1} + \frac{s_3^2}{R^2} \left( \frac{\partial R}{\partial s_1} \right)^2 \frac{\partial B_k^0}{\partial s_3} \\
& - \kappa s_3 \cos s_2 \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial B_k^0}{\partial z_1} \Big) + \left( \kappa \left( -\tau \frac{\partial B_1^0}{\partial s_2} + 2\kappa s_3 \cos s_2 R \frac{\partial B_1^0}{\partial z_1} - \tau \frac{\partial B_1^0}{\partial s_2} - \frac{s_3}{R} \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial B_1^0}{\partial s_3} \right) \right. \\
& - \tau \left( -\tau \frac{\partial B_3^0}{\partial s_2} + 2\kappa s_3 \cos s_2 R \frac{\partial B_3^0}{\partial z_1} - \tau \frac{\partial B_3^0}{\partial s_2} - \frac{s_3}{R} \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial B_3^0}{\partial s_3} \right) \Big) \delta_{2k} \\
& - \kappa \left( -\tau \frac{\partial B_2^0}{\partial s_2} + 2\kappa s_3 \cos s_2 R \frac{\partial B_2^0}{\partial z_1} - \tau \frac{\partial B_2^0}{\partial s_2} - \frac{s_3}{R} \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial B_2^0}{\partial s_3} \right) \delta_{1k} \\
& + \tau \left( -\tau \frac{\partial B_2^0}{\partial s_2} + 2\kappa s_3 \cos s_2 R \frac{\partial B_2^0}{\partial z_1} - \tau \frac{\partial B_2^0}{\partial s_2} - \frac{s_3}{R} \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial B_2^0}{\partial s_3} \right) \delta_{3k} + (-\kappa^2 B_1^0 - \kappa' B_2^0 + \kappa \tau B_3^0) \delta_{1k} \\
& + (\kappa' B_1^0 - (\kappa^2 + \tau^2) B_2^0 - \tau B_3^0) \delta_{2k} + (\kappa \tau B_1^0 + \tau' B_2^0 - \tau^2 B_3^0) \delta_{3k} \\
& - \frac{1}{\rho_0} \left( \kappa s_3 \cos s_2 R \frac{\partial b^2}{\partial z_1} - \tau \frac{\partial b^2}{\partial z_1} - \frac{s_3}{R} \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial b^1}{\partial s_3} + (\kappa s_3 \cos s_2 R)^2 \frac{\partial b^1}{\partial z_1} \right. \\
& \quad \left. - \tau \kappa s_3 \cos s_2 R \frac{\partial b^1}{\partial z_1} - \kappa s_3^2 \cos s_2 \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial b^1}{\partial s_3} \right) \delta_{1k} \\
& - \left( -\kappa u_1^0 B_1^0 \delta_{2k} + \frac{\partial u_1^0}{\partial s_1} B_1^0 \delta_{1k} - \frac{s_3}{R} \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial u_1^0}{\partial s_3} B_1^0 \delta_{1k} + \left( \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u_k^1}{\partial z_2} B_2^0 + \frac{\partial u_k^1}{\partial z_3} B_3^0 \right) \right. \right. \\
& + \kappa s_3 \cos s_2 R u_1^0 \frac{\partial B_k^0}{\partial z_1} + u_1^0 \frac{\partial B_k^1}{\partial z_1} - \tau u_1^0 \frac{\partial B_k^0}{\partial s_2} - \frac{s_3}{R} \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial B_k^0}{\partial s_3} + u_1^1 \frac{\partial B_k^0}{\partial z_1} \\
& + \frac{1}{R} \left( u_2^1 \frac{\partial B_k^0}{\partial z_2} + u_3^1 \frac{\partial B_k^0}{\partial z_3} \right) \Big) + u_1^0 ((\kappa B_1^0 - \tau B_3^0) \delta_{2k} - \kappa B_2^0 \delta_{1k} + \tau B_2^0 \delta_{3k}) \\
& \quad \left. + \frac{1}{R} \left( B_2^1 \frac{\partial u_1^0}{\partial z_2} + B_3^1 \frac{\partial u_1^0}{\partial z_3} \right) \delta_{1k} \right), \tag{2.3.13}
\end{aligned}$$

$$f^2(\mathbf{B}^0, \mathbf{B}^1) := -R \left( (\kappa s_3 \cos s_2 R)^2 \frac{\partial B_1^0}{\partial z_1} - \kappa^2 s_3 \cos s_2 R B_2^0 - \kappa s_3 \cos s_2 R \frac{\partial B_1^1}{\partial z_1} - \kappa B_2^1 \right)$$

$$- \tau \kappa s_3 \cos s_2 R \frac{\partial B_1^0}{\partial s_2} - \tau \frac{\partial B_1^1}{\partial s_2} - \kappa s_3 \cos s_2 \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial B_1^0}{\partial s_3} - \frac{s_3}{R} \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial B_1^1}{\partial s_3} \Bigg). \quad (2.3.14)$$

Esta solución decae exponencialmente cuando  $z_1 \rightarrow +\infty$ , es decir, para cada  $\alpha \geq 0$  existen  $C > 0$  y  $\lambda > 0$  tales que:

$$\|\mathbf{B}^2\|_{[H^2(\Omega_L^\alpha)]^3} + \|b^3\|_{H^1(\Omega_L^\alpha)/\mathbb{R}} \leq C e^{-\lambda\alpha}.$$

*Demostración.* Se puede comprobar mediante cálculos elementales que  $(\mathbf{B}^0, b^1)$ ,  $(\mathbf{B}^1, b^2)$  y  $(\mathbf{B}^2, b^3)$  verifican los problemas (2.3.8), (2.3.9) y (2.3.12), respectivamente, sustituyendo la combinación de los desarrollos asintóticos (1.3.58)–(1.3.59) y (2.3.1)–(2.3.2) en las ecuaciones escaladas del Problema 1.2.1 y agrupando los términos multiplicados por las mismas potencias de  $\varepsilon$  en cada uno de las ecuaciones (del mismo modo que se hizo en el Teorema 1.3.5). A continuación, veamos que los problemas tienen una solución verificando las propiedades que postula el teorema.

(i) Nótese que el problema (2.3.8) es equivalente a,

$$\begin{cases} \Delta_{\bar{z}} \mathbf{B}^0 = \frac{R(t, 0)}{\rho_0 \nu} \nabla_{\bar{z}} b^1 + \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{B}^0, b^1) \text{ en } \Omega_L, \\ \operatorname{div}_{\bar{z}} \mathbf{B}^0 = (R(t, 0) - R) \frac{\partial B_1^0}{\partial z_1} \text{ en } \Omega_L, \\ \mathbf{B}^0 = \mathbf{0} \text{ en } s_3 = 1, \\ \mathbf{B}^0 = (g_{1,1}^0 - u_1^0, g_{1,2}^0, g_{1,3}^0) \text{ en } s_1 = 0, \end{cases} \quad (2.3.15)$$

donde,

$$\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{B}, b) := \frac{R - R(t, 0)}{\rho_0 \nu} \nabla_{\bar{z}} b + \mathbf{G}(\mathbf{B}, b). \quad (2.3.16)$$

Por (2.1.7), se tiene que,

$$\int_{z_1=0} (g_{1,1}^0 - u_1^0) dz = 0.$$

El segundo término del segundo miembro de (2.3.15)<sub>1</sub>, se puede escribir como

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}, q) = \frac{R - R(t, 0)}{\rho_0 \nu} \nabla_{\bar{z}} q + \mathbf{G}(\mathbf{v}, q).$$

Nótese que, si  $(\mathbf{v}, q) \in \mathcal{V}$  es exponencialmente decreciente, entonces se tiene que,

$$|\mathbf{f}(\mathbf{v}, q)|_{[L^2(\Omega_L^\alpha)]^3} \leq C_0 e^{-\lambda\alpha}.$$



Además,

$$\begin{aligned} \left| \frac{R - R(t, 0)}{\rho_0 \nu} \nabla_{\bar{\mathbf{z}}} q \right|_{[L^2(\Omega_L)]^3}^2 &= \frac{\varepsilon^2}{\rho_0 \nu} \int_{\Omega_L} \left( \frac{R(t, 0) - R}{s_1} \right)^2 z_1^2 |\nabla_{\bar{\mathbf{z}}} q|^2 d\bar{z} \\ &\leq \frac{\varepsilon^2}{\rho_0 \nu} \left| \frac{\partial R}{\partial s_1} \right|_{L^\infty([0, T] \times [0, L])}^2 \left( \alpha^2 \int_{\Omega_L(0, \alpha)} |\nabla_{\bar{\mathbf{z}}} q|^2 d\bar{z} + \int_{\Omega_L^\alpha} z_1^2 |\nabla_{\bar{\mathbf{z}}} q|^2 d\bar{z} \right), \end{aligned}$$

donde  $\Omega_L(0, \alpha) := \{\bar{\mathbf{z}} \in \Omega_L; 0 \leq \tilde{z}_1 \leq \alpha\}$ . Entonces, teniendo en cuenta que  $q$  decae exponencialmente, se tiene, para  $\alpha$  suficientemente grande, que

$$\int_{\Omega_L^\alpha} z_1^2 |\nabla_{\bar{\mathbf{z}}} q|^2 d\bar{z} \leq \alpha^2 \int_{\Omega_L(0, \alpha)} |\nabla_{\bar{\mathbf{z}}} q|^2 d\bar{z},$$

y así, se deduce que

$$\left| \frac{R - R(t, 0)}{\rho_0 \nu} \nabla_{\bar{\mathbf{z}}} q \right|_{[L^2(\Omega_L)]^3}^2 \leq C \varepsilon^2 \left| \frac{\partial R}{\partial s_1} \right|_{L^\infty([0, T] \times [0, L])}^2 \|q\|_{H^1(\Omega_L)}^2 \leq C \varepsilon^2 \|q\|_{H^1(\Omega_L)}^2.$$

Aplicando razonamientos análogos, acotamos los términos de  $\mathbf{G}(\mathbf{v}, q)$  (véase (2.3.7)):

$$\begin{aligned} \left| \frac{R}{\rho_0 \nu} (R - R(t, 0)) \frac{\partial q}{\partial z_1} \right|_{L^2(\Omega_L)}^2 &= \frac{\varepsilon^2}{\rho_0 \nu} \int_{\Omega_L} \left( \frac{R(t, 0) - R}{s_1} \right)^2 z_1^2 R^2 \left| \frac{\partial q}{\partial z_1} \right|^2 d\bar{z} \\ &\leq C \varepsilon^2 \left| R \frac{\partial R}{\partial s_1} \right|_{L^\infty([0, T] \times [0, L])}^2 \|q\|_{H^1(\Omega_L)}^2 \leq C \varepsilon^2 \|q\|_{H^1(\Omega_L)}^2, \\ \left| (R^2 - R^2(t, 0)) \frac{\partial^2 v_k}{\partial z_1^2} \right|_{L^2(\Omega_L)}^2 &= \frac{\varepsilon^2}{\rho_0 \nu} \int_{\Omega_L} \left( \frac{R^2(t, 0) - R^2}{s_1} \right)^2 z_1^2 \left| \frac{\partial^2 v_k}{\partial z_1^2} \right|^2 d\bar{z} \\ &\leq C \varepsilon^2 \left| 2R \frac{\partial R}{\partial s_1} \right|_{L^\infty([0, T] \times [0, L])}^2 \|\mathbf{v}\|_{[H^2(\Omega_L)]^3}^2 \leq C \varepsilon^2 \|\mathbf{v}\|_{[H^2(\Omega_L)]^3}^2. \end{aligned}$$

En resumen,

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{v}, q)\|_{[L^2(\Omega_L)]^3} \leq C \varepsilon \left( \|\mathbf{v}\|_{[H^2(\Omega_L)]^3} + \|q\|_{H^1(\Omega_L)} \right).$$

Además, el miembro de la derecha de la ecuación de la divergencia se puede escribir como:

$$g(\mathbf{v}) = (R(t, 0) - R) \frac{\partial v_1}{\partial z_1}.$$

Entonces, si  $\mathbf{v} \in [H^2(\Omega)]^3$  es exponencialmente decreciente se tiene que,

$$\|g(\mathbf{v})\|_{H^1(\Omega_L^\alpha)} \leq C \|\mathbf{v}\|_{[H^2(\Omega_L^\alpha)]^3} \leq C e^{-\lambda \alpha},$$



para cada  $\alpha \geq 0$  y además,

$$\begin{aligned} |g(\mathbf{v})|_{L^2(\Omega_L)}^2 &= \left| (R(t, 0) - R) \frac{\partial v_1}{\partial z_1} \right|_{[L^2(\Omega_L)]^3}^2 = \varepsilon^2 \int_{\Omega_L} \left( \frac{R(t, 0) - R}{s_1} \right)^2 z_1^2 \left| \frac{\partial v_1}{\partial z_1} \right|^2 d\bar{z} \\ &\leq C \varepsilon^2 \left| \frac{\partial R}{\partial s_1} \right|_{L^\infty([0, T] \times [0, L])}^2 \|\mathbf{v}\|_{[H^1(\Omega_L)]^3}^2 \leq C \varepsilon^2 \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega_L)}^2. \end{aligned}$$

De la misma forma,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial g(\mathbf{v})}{\partial \tilde{z}_1} \right|_{L^2(\Omega_L)}^2 &= \left| -\varepsilon R(t, 0) \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial v_1}{\partial z_1} + (R(t, 0) - R) \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_1 \partial \tilde{z}_1} \right|_{[L^2(\Omega_L)]^3}^2 \\ &\leq C \left( \varepsilon \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega_L)} + \left| (R(t, 0) - R) \frac{1}{R(t, 0)} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tilde{z}_1^2} \right|_{[L^2(\Omega_L)]^3} \right)^2 \leq C \varepsilon^2 \|\mathbf{v}\|_{H^2(\Omega_L)}^2 \\ \left| \frac{\partial g(\mathbf{v})}{\partial z_2} \right|_{L^2(\Omega_L)}^2 &= \left| (R(t, 0) - R) \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_1 \partial z_2} \right|_{[L^2(\Omega_L)]^3}^2 \leq C \varepsilon^2 \|\mathbf{v}\|_{H^2(\Omega_L)}^2, \\ \left| \frac{\partial g(\mathbf{v})}{\partial z_3} \right|_{L^2(\Omega_L)}^2 &= \left| (R(t, 0) - R) \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_1 \partial z_3} \right|_{[L^2(\Omega_L)]^3}^2 \leq C \varepsilon^2 \|\mathbf{v}\|_{H^2(\Omega_L)}^2. \end{aligned}$$

En definitiva,

$$\|g(\mathbf{v})\|_{H^1(\Omega_L)} \leq C \varepsilon \|\mathbf{v}\|_{H^2(\Omega_L)}.$$

Por último, nótese que si  $\int_{\omega} v_1 dz = 0$ , entonces,

$$\int_{\omega} g(\mathbf{v}) dz = (R(t, 0) - R) \left( \frac{\partial}{\partial z_1} \int_{\omega} v_1 dz \right) = 0.$$

Por tanto, nuestro problema se puede enmarcar en la formulación del Problema 2.2.5 (con  $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{0}$  y  $\tilde{g} = 0$ ), y además se verifica la Hipótesis 2.2.6, así que aplicando el Teorema 2.2.8 concluimos la demostración del paso (i).

(ii) Nótese que el problema (2.3.9) es equivalente a,

$$\begin{cases} \Delta_{\bar{\mathbf{z}}} \mathbf{B}^1 = \frac{R(t, 0)}{\rho_0 \nu} \nabla_{\bar{\mathbf{z}}} b^2 + \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{B}^1, b^2) - \frac{R^2}{\nu} \mathbf{F}^1(\mathbf{B}^0, b^1) & \text{en } \Omega_L, \\ \operatorname{div}_{\bar{\mathbf{z}}} \mathbf{B}^1 = f^1(\mathbf{B}^0) & \text{en } \Omega_L, \\ \mathbf{B}^1 = \mathbf{0} & \text{en } s_3 = 1, \\ \mathbf{B}^1 = \mathbf{g}_1^1 - \mathbf{u}^1 & \text{en } z_1 = 0, \end{cases}$$

con  $\tilde{\mathbf{G}}$  definido como en (2.3.16). Como en el paso (i), si definimos

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}, q) = \frac{R - R(t, 0)}{\rho_0 \nu} \nabla_{\bar{\mathbf{z}}} q + \mathbf{G}(\mathbf{v}, q),$$

deducimos que, si  $(\mathbf{v}, q) \in \mathcal{V}$  es exponencialmente decreciente, entonces se tiene que,

$$\begin{aligned} |\mathbf{f}(\mathbf{v}, q)|_{[L^2(\Omega_L^\alpha)]^3} &\leq C e^{-\lambda \alpha}, \\ |\mathbf{f}(\mathbf{v}, q)|_{[L^2(\Omega_L)]^3} &\leq C \varepsilon \left( \|\mathbf{v}\|_{[H^2(\Omega_L)]^3} + \|q\|_{H^1(\Omega_L)} \right). \end{aligned}$$

Además, por el paso (i) el par  $(\mathbf{B}^0, b^1) \in \mathcal{V}$  decae exponencialmente y, por tanto,

$$\tilde{\mathbf{f}} = -\frac{R^2}{\nu} \mathbf{F}^1(\mathbf{B}^0, b^1),$$

también decae exponencialmente cuando  $z_1 \rightarrow +\infty$ , es decir, para cada  $\alpha \geq 0$  existen constantes  $C_0 > 0$  y  $\lambda > 0$  tales que:

$$|\tilde{\mathbf{f}}|_{[L^2(\Omega_L^\alpha)]^3} \leq C_0 e^{-\lambda \alpha}.$$

Lo mismo ocurre con el término de la ecuación de la divergencia  $\tilde{g} := f^1(\mathbf{B}^0)$ . Por último, si comprobamos la condición de compatibilidad de este problema, se tiene que,

$$\int_{s_1=0} (u_1^1 - g_{11}^1) dz = \int_{\Omega_L} f^1(\mathbf{B}^0) d\bar{z}. \quad (2.3.17)$$

Integrando la condición de contorno en  $\tilde{z}_1 = 0$  (es decir,  $s_1 = 0$ ), obtenemos lo siguiente (véase (1.3.27)):

$$\begin{aligned} \int_{s_1=0} u_1^1 dz &= \int_{s_1=0} \left( \frac{3R^3 \kappa s_3 \cos s_2}{16\rho_0 \nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} + \frac{R^2}{4\rho_0 \nu} \frac{\partial p^1}{\partial s_1} \right) (s_3^2 - 1) dz \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 s_3 \left( 3R^3 \kappa s_3 \cos s_2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} + \frac{R^2}{4\rho_0 \nu} \frac{\partial p^1}{\partial s_1} \right) (s_3^2 - 1) ds_2 ds_3 \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{R^2}{4\rho_0 \nu} \frac{\partial p^1}{\partial s_1} (s_3^3 - s_3) ds_2 ds_3 = -\frac{\pi R^2(t, 0)}{8\rho_0 \nu} \frac{\partial p^1}{\partial s_1}(t, 0). \end{aligned}$$

Por tanto, la condición de compatibilidad (2.3.17) se verificará escogiendo adecuadamente las condiciones de contorno del problema (1.3.30) (en particular, el valor de  $\frac{\partial p^1}{\partial s_1}$  en  $s_1 = 0$ ). Así, este problema se puede enmarcar en la formulación del Problema 2.2.5 y, además, se verifica la Hipótesis 2.2.7. Por tanto, aplicando el Teorema 2.2.9, concluimos la demostración del paso (ii).

(iii) La demostración de este paso sigue argumentos análogos a los del paso anterior. En este caso la condición de compatibilidad será,

$$\int_{s_1=0} (u_1^2 - g_{1,1}^2) dz = \int_{\Omega_L} f^2(\mathbf{B}^0, \mathbf{B}^1) d\bar{z}.$$

Por tanto, integrando  $u_1^2$  (véase véase (1.3.31)) en  $s_1 = 0$  se puede comprobar que la condición de compatibilidad se verifica si escogemos adecuadamente las condiciones de contorno del problema (1.3.33) (en particular, el valor de  $\frac{\partial p_0^2}{\partial s_1}$  en  $s_1 = 0$ ). Así, este problema se puede enmarcar en la formulación del Problema 2.2.5 y, además, se verifica la Hipótesis 2.2.7. Por tanto, aplicando el Teorema 2.2.9, concluimos la demostración del paso (iii).  $\square$

Para finalizar la construcción de los correctores espaciales en  $s_1 = 0$ , y teniendo en cuenta las hipótesis (2.1.14), tomaremos,

$$\mathbf{B}^0(t, \cdot) = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad b^1 = b^1(t) \quad \forall t \in [0, t^*]. \quad (2.3.18)$$

De la misma forma, podemos caracterizar los correctores de capa límite que nos proporcionarán una mejor aproximación en el final de la tubería curva, es decir, en  $s_1 = L$ . Para ello, consideremos las funciones,

$$\begin{aligned} H_k \left( t, \frac{s_1 - L}{\varepsilon}, s_2, s_3 \right) (\varepsilon) &:= H_k^0 \left( t, \frac{s_1 - L}{\varepsilon}, s_2, s_3 \right) + \varepsilon H_k^1 \left( t, \frac{s_1 - L}{\varepsilon}, s_2, s_3 \right) \\ &\quad + \varepsilon^2 H_k^2 \left( t, \frac{s_1 - L}{\varepsilon}, s_2, s_3 \right), \\ h \left( t, \frac{s_1 - L}{\varepsilon}, s_2, s_3 \right) (\varepsilon) &:= \frac{1}{\varepsilon} h^1 \left( t, \frac{s_1 - L}{\varepsilon}, s_2, s_3 \right) + h^2 \left( t, \frac{s_1 - L}{\varepsilon}, s_2, s_3 \right) \\ &\quad + \varepsilon h^3 \left( t, \frac{s_1 - L}{\varepsilon}, s_2, s_3 \right), \end{aligned}$$

definidas sobre el dominio semi-infinito,

$$\Omega_R := (-\infty, L) \times \omega,$$

para cada  $t \in [0, T]$ , y tales que (véase (2.1.5)):

$$\begin{aligned} u_1^0(t, L, s_2, s_3) \mathbf{v}(s_1) + \mathbf{H}^0(t, 0, s_2, s_3) &= \mathbf{g}_2^0, \\ \mathbf{u}^1(t, L, s_2, s_3) + \mathbf{H}^1(t, 0, s_2, s_3) &= \mathbf{g}_2^1, \\ \mathbf{u}^2(t, L, s_2, s_3) + \mathbf{H}^2(t, 0, s_2, s_3) &= \mathbf{g}_2^2, \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{H}^i = (H_k^i)$ , ( $i = 0, 1, 2; k = 1, 2, 3$ ) y donde  $u_1^0$ ,  $\mathbf{u}^1$ ,  $\mathbf{u}^2$  denotan los términos del desarrollo asintótico identificados en el Teorema 1.3.5. Por su parte, las funciones  $h^j$

( $j = 1, 2, 3$ ) denotan los correctores para el término de presión en la salida de la tubería. Para estos correctores, consideramos la variable auxiliar,

$$\tilde{z}_1^* = \frac{z_1}{R(t, L)}, \quad (2.3.19)$$

que junto con (1.3.23) define las coordenadas cartesianas locales tridimensionales  $\bar{\mathbf{z}}^* = (\tilde{z}_1^*, \mathbf{z})$ . Además, para cada  $(\mathbf{H}, h) \in \mathcal{V} = [H^2(\Omega_R)]^3 \times H^1(\Omega_R)/\mathbb{R}$ , definimos las componentes de una función  $\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{H}, h) \in [L^2(\Omega_R)]^3$  dadas por:

$$\bar{G}_k(\mathbf{H}, h) := \frac{R}{\rho_0 \nu} (R - R(t, L)) \frac{\partial h}{\partial z_1} \delta_{k1} - (R^2 - R^2(t, L)) \frac{\partial^2 H_k}{\partial z_1^2}.$$

También, definamos el conjunto,

$$\Omega_R^\alpha := \{\bar{\mathbf{z}} \in \Omega_R; \tilde{z}_1^* < \alpha\},$$

para cada  $\alpha \leq 0$ . Siguiendo los mismos argumentos utilizados en la demostración del Teorema 2.3.1 se demuestra el siguiente teorema.

**Teorema 2.3.2.** *Los correctores de capa límite para la salida de la tubería verifican que:*

(i) *Existe un único  $(\mathbf{H}^0, h^1) \in K$  solución del problema:*

$$\begin{cases} \Delta_{\bar{\mathbf{z}}^*} \mathbf{H}^0 = \frac{R}{\rho_0 \nu} \nabla_{\bar{\mathbf{z}}^*} h^1 + \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{H}^0, h^1) \text{ en } \Omega_R, \\ \operatorname{div}_{\bar{\mathbf{z}}^*} \mathbf{H}^0 = (R(t, L) - R) \frac{\partial H_1^0}{\partial z_1} \text{ en } \Omega_R, \\ \mathbf{H}^0 = \mathbf{0} \text{ en } s_3 = 1, \\ \mathbf{H}^0 = (g_{2,1}^0 - u_1^0, g_{2,2}^0, g_{2,3}^0) \text{ en } s_1 = L. \end{cases}$$

Esta solución decae exponencialmente cuando  $z_1 \rightarrow -\infty$ , es decir, para cada  $\alpha \leq 0$  existen  $C > 0$  y  $\lambda > 0$  tales que:

$$\|\mathbf{H}^0\|_{[H^2(\Omega_R^\alpha)]^3} + \|h^1\|_{H^1(\Omega_R^\alpha)/\mathbb{R}} \leq C e^{\lambda \alpha}.$$

(ii) *Existe un único  $(\mathbf{H}^1, h^2) \in \tilde{K}$  solución del problema:*

$$\begin{cases} \Delta_{\bar{\mathbf{z}}^*} \mathbf{H}^1 = \frac{R}{\rho_0 \nu} \nabla_{\bar{\mathbf{z}}^*} h^2 + \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{H}^1, h^2) - \frac{R^2}{\nu} \mathbf{F}^1(\mathbf{H}^0, h^1) \text{ en } \Omega_R, \\ \operatorname{div}_{\bar{\mathbf{z}}^*} \mathbf{H}^1 = f^1(\mathbf{H}^0) \text{ en } \Omega_R, \\ \mathbf{H}^1 = \mathbf{0} \text{ en } s_3 = 1, \\ \mathbf{H}^1 = \mathbf{g}_2^1 - \mathbf{u}^1 \text{ en } s_1 = L, \end{cases}$$

donde  $F_k^1(\mathbf{H}^0, h^1)$  y  $f^1(\mathbf{H}^0)$  vienen dados por las expresiones análogas de (2.3.10) y (2.3.11), respectivamente. Esta solución decae exponencialmente cuando  $z_1 \rightarrow -\infty$ , es decir, para cada  $\alpha \leq 0$  existen  $C > 0$  y  $\lambda > 0$  tales que:

$$\|\mathbf{H}^1\|_{[H^2(\Omega_R^\alpha)]^3} + \|h^2\|_{H^1(\Omega_R^\alpha)/\mathbb{R}} \leq C e^{\lambda \alpha}.$$

(iii) Existe un único  $(\mathbf{H}^2, h^3) \in \tilde{K}$  solución del problema:

$$\begin{cases} \Delta_{\bar{z}^*} \mathbf{H}^2 = \frac{R}{\rho_0 \nu} \nabla_{\bar{z}} h^3 + \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{H}^2, h^3) - \frac{R^2}{\nu} \mathbf{F}^2(\mathbf{H}^0, \mathbf{H}^1, h^1, h^2) & \text{en } \Omega_R, \\ \operatorname{div}_{\bar{z}^*} \mathbf{H}^2 = f^2(\mathbf{H}^0, \mathbf{H}^1) & \text{en } \Omega_R, \\ \mathbf{H}^2 = \mathbf{0} & \text{en } s_3 = 1, \\ \mathbf{H}^2 = \mathbf{g}_2^2 - \mathbf{u}^2 & \text{en } s_1 = L, \end{cases}$$

donde  $F_k^2(\mathbf{H}^0, \mathbf{H}^1, h^1, h^2)$  y  $f^2(\mathbf{H}^0, \mathbf{H}^1)$  vienen dados por las expresiones análogas de (2.3.13) y (2.3.14), respectivamente. Esta solución decae exponencialmente cuando  $z_1 \rightarrow -\infty$ , es decir, para cada  $\alpha \leq 0$  existen  $C > 0$  y  $\lambda > 0$  tales que:

$$\|\mathbf{H}^2\|_{[H^2(\Omega_R^\alpha)]^3} + \|h^3\|_{H^1(\Omega_R^\alpha)/\mathbb{R}} \leq C e^{\lambda \alpha}.$$

Para finalizar la construcción de los correctores en  $s_1 = L$ , y teniendo en cuenta las hipótesis (2.1.15), tomaremos,

$$\mathbf{H}^0(t, \cdot) = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad h^1 = h^1(t) \quad \forall t \in [0, t^*]. \quad (2.3.20)$$

Dado que  $\mathbf{B}^i \in [H^2(\Omega_L)]^3$  y  $\mathbf{H}^i \in [H^2(\Omega_R)]^3$  para  $i = 0, 1, 2$  (véanse los Teoremas 2.3.1 y 2.3.2, respectivamente), deducimos que,

$$\mathbf{B}^i \in [L^\infty(\Omega_L)]^3 \quad \text{y} \quad \mathbf{H}^i \in [L^\infty(\Omega_R)]^3. \quad (2.3.21)$$

**Observación 2.3.3.** Hemos visto que los correctores de la presión  $b^1, b^2, b^3$  y  $h^1, h^2, h^3$  están determinados excepto por una constante. Estas constantes serán elegidas de forma que se verifique la condición de contorno sobre la presión que consideraremos en el Capítulo 3.

Debido al carácter evolutivo del Problema 2.1.2, también será necesaria alguna información sobre las derivadas temporales de los correctores de capa límite que acabamos de introducir. Como ejemplo, mostraremos en el siguiente teorema los problemas que verifican los correctores  $\frac{\partial \mathbf{B}^i}{\partial t}$  ( $i=0,1,2$ ), siendo análogo el comportamiento para los correctores en el otro extremo de la tubería. Para cada  $(\mathbf{B}, b) \in \mathcal{V} = [H^2(\Omega_L)]^3 \times H^1(\Omega_L)/\mathbb{R}$ , definamos las componentes de una función  $\mathbf{I}(\mathbf{B}, b) \in [L^2(\Omega_L)]^3$  dadas por,

$$\begin{aligned} I_k(\mathbf{B}, b) := & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{R}{\rho_0 \nu} (R - R(t, 0)) \right) \frac{\partial b}{\partial z_1} \delta_{1k} - \frac{\partial}{\partial t} (R^2 - R^2(t, 0)) \frac{\partial^2 B_k}{\partial z_1^2} \\ & - 2R(t, 0) \frac{\partial R}{\partial t}(t, 0) \frac{\partial^2 B_k}{\partial z_1^2} + \frac{1}{\rho_0 \nu} \frac{\partial}{\partial t} (RR(t, 0)) \frac{\partial b}{\partial z_1} \delta_{1k}. \end{aligned}$$

**Teorema 2.3.4.** Las derivadas temporales de los correctores de capa límite  $\frac{\partial \mathbf{B}^i}{\partial t}$  ( $i=0,1,2$ ), verifican que:

(i) Existe un único  $\left(\frac{\partial \mathbf{B}^0}{\partial t}, \frac{\partial b^1}{\partial t}\right) \in K$  solución del problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{\bar{\mathbf{z}}} \left( \frac{\partial \mathbf{B}^0}{\partial t} \right) = \frac{R}{\rho_0 \nu} \nabla_{\bar{\mathbf{z}}} \left( \frac{\partial b^1}{\partial t} \right) + \mathbf{G} \left( \frac{\partial \mathbf{B}^0}{\partial t}, \frac{\partial b^1}{\partial t} \right) + \mathbf{I}(\mathbf{B}^0, b^1) \text{ en } \Omega_L, \\ \operatorname{div}_{\bar{\mathbf{z}}} \mathbf{B}^0 = (R(t, 0) - R) \frac{\partial}{\partial z_1} \left( \frac{\partial B_1^0}{\partial t} \right) \\ \quad - \frac{\partial R}{\partial t}(t, 0) \frac{\partial B_1^0}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial t} (R(t, 0) - R) \frac{\partial B_1^0}{\partial z_1} \text{ en } \Omega_L, \\ \frac{\partial \mathbf{B}^0}{\partial t} = \mathbf{0} \text{ en } s_3 = 1, \\ \frac{\partial \mathbf{B}^0}{\partial t} = \left( \frac{\partial g_{1,1}^0}{\partial t} - \frac{\partial u_1^0}{\partial t}, \frac{\partial g_{1,2}^0}{\partial t}, \frac{\partial g_{1,3}^0}{\partial t} \right) \text{ en } z_1 = 0. \end{array} \right. \quad (2.3.22)$$

Esta solución decae exponencialmente cuando  $z_1 \rightarrow +\infty$ , es decir, para cada  $\alpha \geq 0$  existen  $C > 0$  y  $\lambda > 0$  tales que:

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{B}^0}{\partial t} \right\|_{[H^2(\Omega_L^\alpha)]^3} + \left\| \frac{\partial b^1}{\partial t} \right\|_{H^1(\Omega_L^\alpha)/\mathbb{R}} \leq C e^{-\lambda \alpha}.$$

(ii) Existe un único  $\left(\frac{\partial \mathbf{B}^1}{\partial t}, \frac{\partial b^2}{\partial t}\right) \in \tilde{K}$  solución del problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{\bar{\mathbf{z}}} \left( \frac{\partial \mathbf{B}^1}{\partial t} \right) = \frac{R}{\rho_0 \nu} \nabla_{\bar{\mathbf{z}}} \left( \frac{\partial b^2}{\partial t} \right) + \mathbf{G} \left( \frac{\partial \mathbf{B}^1}{\partial t}, \frac{\partial b^2}{\partial t} \right) + \mathbf{I}(\mathbf{B}^1, b^2) \\ \quad - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{R^2}{\nu} \mathbf{F}^1(\mathbf{B}^0, b^1) \right) \text{ en } \Omega_L, \\ \operatorname{div}_{\bar{\mathbf{z}}} \frac{\partial \mathbf{B}^1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (f^1(\mathbf{B}^0)) - \frac{\partial R}{\partial t}(t, 0) \frac{\partial B_1^1}{\partial z_1} \text{ en } \Omega_L, \\ \frac{\partial \mathbf{B}^1}{\partial t} = \mathbf{0} \text{ en } s_3 = 1, \\ \frac{\partial \mathbf{B}^1}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{g}_1^1}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial t} \text{ en } z_1 = 0, \end{array} \right. \quad (2.3.23)$$

con  $\mathbf{F}^1$  y  $f^1$  definidos en (2.3.10) y (2.3.11), respectivamente. Esta solución decae exponencialmente cuando  $z_1 \rightarrow +\infty$ , es decir, para cada  $\alpha \geq 0$  existen  $C > 0$  y  $\lambda > 0$  tales que:

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{B}^1}{\partial t} \right\|_{[H^2(\Omega_L^\alpha)]^3} + \left\| \frac{\partial b^2}{\partial t} \right\|_{H^1(\Omega_L^\alpha)/\mathbb{R}} \leq C e^{-\lambda \alpha}.$$

(iii) Existe un único  $\left(\frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial t}, \frac{\partial b^3}{\partial t}\right) \in \tilde{K}$  solución del problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{\bar{\mathbf{z}}} \left( \frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial t} \right) = \frac{R}{\rho_0 \nu} \nabla_{\bar{\mathbf{z}}} \left( \frac{\partial b^3}{\partial t} \right) + \mathbf{G} \left( \frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial t}, \frac{\partial b^3}{\partial t} \right) + \mathbf{I}(\mathbf{B}^2, b^3) \\ \quad - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{R^2}{\nu} \mathbf{F}^2(\mathbf{B}^0, \mathbf{B}^1, b^1, b^2) \right) \text{ en } \Omega_L, \\ \operatorname{div}_{\bar{\mathbf{z}}} \frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (f^2(\mathbf{B}^0, \mathbf{B}^1)) - \frac{\partial R}{\partial t}(t, 0) \frac{\partial B_1^2}{\partial z_1} \text{ en } \Omega_L, \\ \frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial t} = \mathbf{0} \text{ en } s_3 = 1, \\ \frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{g}_1^2}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{u}^2}{\partial t} \text{ en } s_1 = 0, \end{array} \right.$$

con  $\mathbf{F}^2$  y  $f^2$  definidos en (2.3.13) y (2.3.14), respectivamente. Esta solución decae exponencialmente cuando  $z_1 \rightarrow +\infty$ , es decir, para cada  $\alpha \geq 0$  existen  $C > 0$  y  $\lambda > 0$  tales que:

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial t} \right\|_{[H^2(\Omega_L^{\alpha})]^3} + \left\| \frac{\partial b^3}{\partial t} \right\|_{H^1(\Omega_L^{\alpha})/\mathbb{R}} \leq C e^{-\lambda \alpha}.$$

*Demostración.* (i) Nótese que el problema (2.3.22) es equivalente a,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{\bar{\mathbf{z}}} \left( \frac{\partial \mathbf{B}^0}{\partial t} \right) = \frac{R(t, 0)}{\rho_0 \nu} \nabla_{\bar{\mathbf{z}}} \left( \frac{\partial b^1}{\partial t} \right) + \tilde{\mathbf{G}} \left( \frac{\partial \mathbf{B}^0}{\partial t}, \frac{\partial b^1}{\partial t} \right) + \mathbf{I}(\mathbf{B}^0, b^1) \text{ en } \Omega_L, \\ \operatorname{div}_{\bar{\mathbf{z}}} \mathbf{B}^0 = (R(t, 0) - R) \frac{\partial}{\partial z_1} \left( \frac{\partial B_1^0}{\partial t} \right) \\ \quad - \frac{\partial R}{\partial t}(t, 0) \frac{\partial B_1^0}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial t} (R(t, 0) - R) \frac{\partial B_1^0}{\partial z_1} \text{ en } \Omega_L, \\ \frac{\partial \mathbf{B}^0}{\partial t} = \mathbf{0} \text{ en } s_3 = 1, \\ \frac{\partial \mathbf{B}^0}{\partial t} = \left( \frac{\partial g_{1,1}^0}{\partial t} - \frac{\partial u_1^0}{\partial t}, \frac{\partial g_{1,2}^0}{\partial t}, \frac{\partial g_{1,3}^0}{\partial t} \right) \text{ en } s_1 = 0, \end{array} \right. \quad (2.3.24)$$

donde recordemos que (véase (2.3.16))

$$\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{B}, b) := \frac{R - R(t, 0)}{\rho_0 \nu} \nabla_{\bar{\mathbf{z}}} b + \mathbf{G}(\mathbf{B}, b). \quad (2.3.25)$$

Por (2.1.7), se tiene que,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_1=0} (g_{1,1}^0 - u_1^0) dz = 0.$$

Los dos últimos términos del segundo miembro de (2.3.24)<sub>1</sub>, pueden escribirse como:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{v}, q) &= \frac{R - R(t, 0)}{\rho_0 \nu} \nabla_{\mathbf{z}} q + \mathbf{G}(\mathbf{v}, q), \\ \tilde{\mathbf{f}} &= \mathbf{I}(\mathbf{B}^0, b^1).\end{aligned}$$

La función  $\tilde{\mathbf{f}}$  es exponencialmente decreciente como consecuencia de (i) en el Teorema 2.3.1. Nótese que, si  $(\mathbf{v}, q) \in \mathcal{V}$  es exponencialmente decreciente, se tiene que (véase la demostración de (i) en el Teorema 2.3.1, para más detalles),

$$|\mathbf{f}(\mathbf{v}, q)|_{[L^2(\Omega_L^\alpha)]^3} \leq C_0 e^{-\lambda \alpha},$$

y además,

$$|\mathbf{f}(\mathbf{v}, q)|_{[L^2(\Omega_L)]^3} \leq C\varepsilon \left( \|\mathbf{v}\|_{[H^2(\Omega_L)]^3} + \|q\|_{H^1(\Omega_L)} \right).$$

De la misma forma, los términos de la ecuación de la divergencia se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}g(\mathbf{v}) &= (R(t, 0) - R) \frac{\partial v_1}{\partial z_1}, \\ \tilde{g} &= -\frac{\partial R}{\partial t}(t, 0) \frac{\partial B_1^0}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial t} (R(t, 0) - R(t, s_1)) \frac{\partial B_1^0}{\partial z_1}.\end{aligned}$$

Por un lado, la función  $\tilde{g}$  decae exponencialmente como consecuencia de (i) del Teorema 2.3.1 y además,

$$\int_{\omega} \tilde{g} dz = 0, \quad \forall z_1 \geq 0,$$

ya que  $\mathbf{B}^0 \in K$  (véase Teorema 2.3.1 y (2.2.30)). Por otro lado, si  $\mathbf{v} \in [H^2(\Omega)]^3$  es exponencialmente decreciente se tiene que (véase el paso (ii) de la demostración del Teorema 2.3.1 para más detalles):

$$\|g(\mathbf{v})\|_{H^1(\Omega_L^\alpha)} \leq C \|\mathbf{v}\|_{[H^2(\Omega_L^\alpha)]^3} \leq C e^{-\lambda \alpha},$$

para cada  $\alpha \geq 0$  y además,

$$\|g(\mathbf{v})\|_{H^1(\Omega_L)} \leq C\varepsilon \|\mathbf{v}\|_{H^2(\Omega_L)}.$$

Por último, nótese que si  $\int_{\omega} v_1 dz = 0$ , entonces,

$$\int_{\omega} g(\mathbf{v}) dz = (R(t, 0) - R) \left( \frac{\partial}{\partial z_1} \int_{\omega} v_1 dz \right) = 0.$$

Por tanto, nuestro problema se puede enmarcar en la formulación del Problema 2.2.5 y además, se verifica la Hipótesis 2.2.6. Aplicando el Teorema 2.2.8 concluimos la demostración del paso (i).



(ii) Nótese que el problema (2.3.23) es equivalente a,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{\bar{z}} \left( \frac{\partial \mathbf{B}^1}{\partial t} \right) = \frac{R(t,0)}{\rho_0 \nu} \nabla_{\bar{z}} \left( \frac{\partial b^2}{\partial t} \right) + \tilde{\mathbf{G}} \left( \frac{\partial \mathbf{B}^1}{\partial t}, \frac{\partial b^2}{\partial t} \right) + \mathbf{I}(\mathbf{B}^1, b^2) \\ \quad - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{R^2}{\nu} \mathbf{F}^1(\mathbf{B}^0, b^1) \right) \text{ en } \Omega_L, \\ \operatorname{div}_{\bar{z}} \frac{\partial \mathbf{B}^1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (f^1(\mathbf{B}^0)) - \frac{\partial R}{\partial t}(t,0) \frac{\partial B_1^1}{\partial z_1} \text{ en } \Omega_L, \\ \frac{\partial \mathbf{B}^1}{\partial t} = \mathbf{0} \text{ en } s_3 = 1, \\ \frac{\partial \mathbf{B}^1}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{g}_1^1}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial t} \text{ en } s_1 = 0, \end{array} \right. \quad (2.3.26)$$

con  $\tilde{\mathbf{G}}$  definido como en (2.3.25). Como en el paso (i), si definimos

$$f(\mathbf{v}, q) = \frac{R - R(t,0)}{\rho_0 \nu} \nabla_{\bar{z}} q + \mathbf{G}(\mathbf{v}, q),$$

deducimos que, si  $(\mathbf{v}, q) \in \mathcal{V}$  es exponencialmente decreciente, entonces se tiene que,

$$\begin{aligned} |\mathbf{f}(\mathbf{v}, q)|_{[L^2(\Omega_L^\alpha)]^3} &\leq C_0 e^{-\lambda \alpha}, \quad \forall \alpha \geq 0, \\ |\mathbf{f}(\mathbf{v}, q)|_{[L^2(\Omega_L)]^3} &\leq C \varepsilon \left( \|\mathbf{v}\|_{[H^2(\Omega_L)]^3} + \|q\|_{H^1(\Omega_L)} \right). \end{aligned}$$

Además, por el paso (i) y el Teorema 2.3.1 se tiene que  $\left( \frac{\partial \mathbf{B}^0}{\partial t}, \frac{\partial b^1}{\partial t} \right) \in \mathcal{V}$  y  $(\mathbf{B}^1, b^2) \in \mathcal{V}$  decaen exponencialmente, por tanto,

$$\tilde{\mathbf{f}} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{R^2}{\nu} \mathbf{F}^1(\mathbf{B}^0, b^1) \right) + \mathbf{I}(\mathbf{B}^1, b^2),$$

también decae exponencialmente cuando  $z_1 \rightarrow +\infty$ , es decir, para cada  $\alpha \geq 0$  existen constantes  $C_0 > 0$  y  $\lambda > 0$  tales que,

$$|\tilde{\mathbf{f}}|_{[L^2(\Omega_L^\alpha)]^3} \leq C_0 e^{-\lambda \alpha}.$$

Lo mismo ocurre con el término de la ecuación de la divergencia  $\tilde{g} := \frac{\partial}{\partial t} (f^1(\mathbf{B}^0)) - \frac{\partial R}{\partial t}(t,0) \frac{\partial B_1^1}{\partial z_1}$ . Por último, debemos comprobar que se verifica la condición de compatibilidad:

$$\int_{s_1=0} \frac{\partial}{\partial t} (u_1^1 - g_{11}^1) dz = \int_{\Omega_L} \left( \frac{\partial}{\partial t} (f^1(\mathbf{B}^0)) - \frac{\partial R}{\partial t}(t,0) \frac{\partial B_1^1}{\partial z_1} \right) d\bar{z}. \quad (2.3.27)$$

Derivando con respecto al tiempo,

$$\int_{\Omega_L} \operatorname{div}_{\bar{\mathbf{z}}} \mathbf{B}^1 d\bar{\mathbf{z}} = \int_{\Omega_L} f^1(\mathbf{B}^0) d\bar{\mathbf{z}},$$

se tiene, tras algunos cálculos, que

$$\int_{\Omega_L} \frac{\partial R}{\partial t}(t, 0) \frac{\partial B_1^1}{\partial z_1} d\bar{\mathbf{z}} + \int_{\Omega_L} \operatorname{div}_{\bar{\mathbf{z}}} \frac{\partial \mathbf{B}^1}{\partial t} d\bar{\mathbf{z}} d\bar{\mathbf{z}} = \int_{\Omega_L} \frac{\partial}{\partial t} (f^1(\mathbf{B}^0)) d\bar{\mathbf{z}}.$$

Entonces, utilizando las condiciones de contorno de (2.3.26), se deduce (2.3.27).

Así, este problema se puede enmarcar en la formulación del Problema 2.2.5 y, además, se verifica la Hipótesis 2.2.7. Aplicando el Teorema 2.2.9 concluimos la demostración del paso (ii).

(iii) La demostración de este paso sigue argumentos análogos a los del paso anterior. Este problema se puede enmarcar en la formulación del Problema 2.2.5 y, además, se verifica la Hipótesis 2.2.7, por tanto, aplicando el Teorema 2.2.9 concluimos la demostración del paso (iii). □

Una vez caracterizados los correctores de capa límite, denotemos la nueva aproximación asintótica de nuestro problema por  $(\tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon), \tilde{p}(\varepsilon))$ , que viene dada por las siguientes expresiones (véanse (1.3.58)–(1.3.59)):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon) &:= \hat{\mathbf{u}}(\varepsilon) + \mathbf{B}(\varepsilon) + \mathbf{H}(\varepsilon) \\ &= \mathbf{u}^0 + \mathbf{B}^0 + \mathbf{H}^0 + \varepsilon (\mathbf{u}^1 + \mathbf{B}^1 + \mathbf{H}^1) + \varepsilon^2 (\mathbf{u}^2 + \mathbf{B}^2 + \mathbf{H}^2), \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\varepsilon) &:= \hat{p}(\varepsilon) + b(\varepsilon) + h(\varepsilon) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} p^0 + \frac{1}{\varepsilon} (p^1 + b^1 + h^1) + p^2 + b^2 + h^2 + \varepsilon (b^3 + h^3). \end{aligned} \quad (2.3.29)$$

**Observación 2.3.5.** Los problemas incluidos en los Teoremas 2.3.1 y 2.3.2, pueden verse como el resultado de sustituir (2.3.28)–(2.3.29) en las ecuaciones del Problema 1.2.1 junto con la versión escalada de las condiciones de contorno (2.1.1). De esa forma, utilizando los resultados obtenidos en el Teorema 1.3.5 e identificando los términos multiplicados por las potencias de  $\varepsilon$  se deducen las ecuaciones de los problemas correspondientes para cada corrector.

A continuación, veamos cual es el orden de aproximación que proporciona (2.3.28)–(2.3.29) en las ecuaciones del Problema 2.1.2. Para simplificar la exposición, incurriremos en un abuso de notación en las estimaciones que estudiaremos en lo que resta de capítulo. Así, denotaremos de la misma forma a las funciones definidas en  $\hat{\Omega}_t^\varepsilon$  y a sus correspondientes en  $\Omega$  a través de la relación (1.2.1). En primer lugar, será útil conocer el orden con respecto

a  $\varepsilon$  de las derivadas parciales que aparecen al aplicar la regla de la cadena cuando hacemos cambios de variable. Observando las expresiones (1.2.11)–(1.2.13), se deduce que,

$$\left| \frac{\partial s_1}{\partial \mathbf{x}^\varepsilon} \right| = \mathcal{O}(1), \quad \left| \frac{\partial s_2}{\partial \mathbf{x}^\varepsilon} \right| = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1}), \quad \left| \frac{\partial s_3}{\partial \mathbf{x}^\varepsilon} \right| = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1}). \quad (2.3.30)$$

Con respecto al cambio de coordenadas cartesianas locales en cada sección transversal, (1.3.23), tenemos que,

$$\left| \frac{\partial z_2}{\partial s_2} \right| = \mathcal{O}(1), \quad \left| \frac{\partial z_2}{\partial s_3} \right| = \mathcal{O}(1), \quad \left| \frac{\partial z_3}{\partial s_2} \right| = \mathcal{O}(1), \quad \left| \frac{\partial z_3}{\partial s_3} \right| = \mathcal{O}(1). \quad (2.3.31)$$

Por último, dado que para la obtención de los correctores introducíamos la variable dilatada  $z_1/\varepsilon$ , de (2.3.6) y (2.3.19) se deduce que

$$\left| \frac{\partial \tilde{z}_1}{\partial s_1} \right| = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1}), \quad \left| \frac{\partial \tilde{z}_1^*}{\partial s_1} \right| = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1}). \quad (2.3.32)$$

respectivamente. Como consecuencia de (2.3.30)–(2.3.32), la regularidad de los términos caracterizados en el Teorema 1.3.5 (teniendo en cuenta a la regularidad de  $R$  (véase (2.1.17)) y de la densidad de fuerzas (véase (2.1.12))) y la regularidad de los correctores (véase (2.3.21)), deducimos que,

$$|\tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon)|_{[L^\infty(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \leq C, \quad |\nabla \tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon)|_{[L^\infty(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} \leq \frac{C}{\varepsilon}. \quad (2.3.33)$$

Comencemos entonces el estudio del orden de aproximación en las ecuaciones del Problema 2.1.2. Por el análisis realizado en el Capítulo 1 (en particular, véase el Teorema 1.3.5) y el estudio de los correctores de capa límite (véanse los Teoremas 2.3.1 y 2.3.2), se tiene que

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon)}{\partial t} + (\nabla \tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon)) \tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon) + \frac{1}{\rho_0} \nabla \tilde{p}(\varepsilon) - \nu \Delta \tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon) = \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon \text{ en } \hat{\Omega}_t^\varepsilon, \quad (2.3.34)$$

donde  $\boldsymbol{\alpha}^\varepsilon$  verifica que

$$|\boldsymbol{\alpha}^\varepsilon|_{[L^\infty(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \leq C\varepsilon,$$

ya que sustituyendo (2.3.28)–(2.3.29) en la ecuación de conservación del momento escalada del Problema 2.1.2, se cancelan los términos de menor orden o igual que  $\mathcal{O}(1)$  (con respecto a  $\varepsilon$ ) como consecuencia de los Teoremas 1.3.5, 2.3.1 y 2.3.2. En efecto, en esos teoremas hemos identificado los términos de la ecuación de conservación del momento hasta el orden  $\varepsilon^0 = 1$ , por lo que los términos restantes que no hemos identificado serán términos de orden  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  o más pequeños. Así, utilizando (1.1.11),

$$|\boldsymbol{\alpha}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} = \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (2.3.35)$$

En segundo lugar, para la ecuación de la divergencia se deduce que (véanse los Teoremas 1.3.5, 2.3.1 y 2.3.2),

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon) = \beta^\varepsilon \text{ en } \hat{\Omega}_t^\varepsilon, \quad (2.3.36)$$

donde,

$$\begin{aligned} \beta^\varepsilon := & \frac{(R - R(t, 0))}{R} \left( \frac{\partial B_1^1}{\partial z_1} + \varepsilon \frac{\partial B_1^2}{\partial z_1} \right) + \frac{(R - R(t, L))}{R} \left( \frac{\partial H_1^1}{\partial z_1} + \varepsilon \frac{\partial H_1^2}{\partial z_1} \right) \\ & + \varepsilon^2 J(t, \mathbf{s}) + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (2.3.37)$$

La función  $J$  agrupa los términos de mayor orden asociados a la aproximación (1.3.58) y viene dada por la expresión,

$$\begin{aligned} J(t, \mathbf{s}) := & -(s_3 \kappa R \cos s_2)^2 \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial s_1} - \frac{s_3}{R} \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial u_1^0}{\partial s_3} \right) \\ & - s_3 \kappa R \cos s_2 \left( \frac{\partial u_1^1}{\partial s_1} - \kappa u_2^1 - \tau \frac{\partial u_1^1}{\partial s_2} - \frac{s_3}{R} \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial u_1^1}{\partial s_3} \right) - \frac{\partial u_1^2}{\partial s_1} + \kappa u_2^2 + \frac{s_3}{R} \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial u_1^2}{\partial s_3}. \end{aligned}$$

Analicemos el orden de los términos de (2.3.37). Por un lado, teniendo en cuenta la regularidad de  $R$  en (2.1.17), los términos caracterizados en los Teoremas 1.3.5 y (1.1.11), es sencillo verificar que,

$$|J(t, \mathbf{s})|_{L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)} \leq C\varepsilon.$$

Por otro lado, tenemos que (véanse (1.1.11), (2.3.6)),

$$|B_i^j \circ \phi^\varepsilon|_{L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)}^2 \leq C\varepsilon^2 \int_{\Omega} |B_i^j|^2 ds \leq C\varepsilon^3 \int_{\Omega_L} |B_i^j|^2 d\tilde{z}_1 ds_2 ds_3 = C\varepsilon^3 \|B_i^j\|_{L^2(\Omega_L)}^2 \leq C\varepsilon^3.$$

Análogamente para  $H_i^j$ . Además, nótese que estas acotaciones se obtienen también para las derivadas hasta orden dos correspondientes de los correctores, como consecuencia de su regularidad (véanse los Teoremas 2.3.1 y 2.3.2). Esto, junto al decaimiento exponencial de los correctores, nos proporcionan las siguientes acotaciones:

$$\begin{aligned} \left| \frac{(R - R(t, 0))}{R} \frac{\partial B_1^1}{\partial z_1} \right|_{L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)}^2 & \leq C\varepsilon^2 \int_{\Omega} \left( \frac{(R - R(t, 0))}{R} \right)^2 \left| \frac{\partial B_1^1}{\partial z_1} \right|^2 ds \\ & = C\varepsilon^2 \int_{\Omega} \left( \frac{R - R(t, 0)}{s_1} \right)^2 \frac{s_1^2}{R^2} \left| \frac{\partial B_1^1}{\partial z_1} \right|^2 ds \leq C\varepsilon^5 \left| \frac{\partial R}{\partial s_1} \right|_{L^\infty([0, T] \times [0, L])}^2 \| \mathbf{B}^0 \|_{[H^1(\Omega_L)]^3}^2 \leq C\varepsilon^5. \end{aligned}$$

Se puede observar que se pueden obtener acotaciones análogas para los demás términos de (2.3.37). Por tanto, concluimos que,

$$|\beta^\varepsilon|_{L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{5/2}). \quad (2.3.38)$$

Como veremos en el siguiente capítulo, también nos hará falta conocer el orden de la derivada temporal de (2.3.37). Como la variable temporal es independiente de  $\varepsilon$ , es suficiente estudiar el orden de las derivadas con respecto al tiempo de los términos principales de (2.3.37). Utilizando el decaimiento exponencial de la derivada temporal de los correctores estudiado en el Teorema 2.3.4, obtenemos que,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{R - R(t, 0)}{R} \right) \frac{\partial B_1^1}{\partial z_1} \right|_{L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)}^2 \\
& \leq C\varepsilon^2 \int_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial t} (R - R(t, 0)) \frac{1}{R} \frac{\partial B_1^1}{\partial z_1} - \frac{R - R(t, 0)}{R^2} \frac{\partial R}{\partial t} \frac{\partial B_1^1}{\partial z_1} \right)^2 ds \\
& \leq C\varepsilon^2 \int_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial R}{\partial t} - \frac{\partial R}{\partial t}(t, 0) \right)^2 \frac{1}{R^2} \left| \frac{\partial B_1^1}{\partial z_1} \right|^2 + (R - R(t, 0))^2 \frac{1}{R^4} \left| \frac{\partial R}{\partial t} \right|^2 \left| \frac{\partial B_1^1}{\partial z_1} \right|^2 \right) ds \\
& = C\varepsilon^2 \int_{\Omega} \left( \left( \frac{\frac{\partial R}{\partial t} - \frac{\partial R}{\partial t}(t, 0)}{s_1} \right)^2 \frac{s_1^2}{R^2} \left| \frac{\partial B_1^1}{\partial z_1} \right|^2 + \left( \frac{R - R(t, 0)}{s_1} \right)^2 \frac{s_1^2}{R^4} \left| \frac{\partial R}{\partial t} \right|^2 \left| \frac{\partial B_1^1}{\partial z_1} \right|^2 \right) ds \\
& \leq C\varepsilon^5 \left( \left| \frac{\partial^2 R}{\partial t \partial s_1} \right|_{L^\infty([0, T] \times [0, L])}^2 \| \mathbf{B}^1 \|_{[H^1(\Omega_L)]^3} + \left| \frac{\partial R}{\partial t} \frac{\partial R}{\partial s_1} \right|_{L^\infty([0, T] \times [0, L])}^2 \| \mathbf{B}^1 \|_{[H^1(\Omega_L)]^3} \right) \\
& \leq C\varepsilon^5,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(R - R(t, 0))}{R} \frac{\partial^2 B_1^1}{\partial t \partial z_1} \right|_{L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)}^2 \leq C\varepsilon^2 \int_{\Omega} \left( \frac{R - R(t, 0)}{R} \right)^2 \left| \frac{\partial^2 B_1^1}{\partial t \partial z_1} \right|^2 ds \\
& = C\varepsilon^2 \int_{\Omega} \left( \frac{R - R(t, 0)}{s_1} \right)^2 \frac{s_1^2}{R^2} \left| \frac{\partial^2 B_1^1}{\partial t \partial z_1} \right|^2 ds \leq C\varepsilon^5 \left| \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial s_1} \right|_{L^\infty([0, T] \times [0, L])}^2 \left\| \frac{\partial \mathbf{B}^0}{\partial t} \right\|_{[H^1(\Omega_L)]^3}^2 \\
& \leq C\varepsilon^5,
\end{aligned}$$

y las correspondientes acotaciones para los términos que involucran las derivadas temporales de los correctores  $H_i^j$ . Por tanto, concluimos:

$$\left| \frac{\partial \beta_\varepsilon}{\partial t} \right|_{L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{5/2}). \quad (2.3.39)$$

Sustituyendo (2.3.28)–(2.3.29) en las condiciones de contorno del Problema 2.1.2, obtenemos lo siguiente:

$$\tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon) = \left( \varepsilon \frac{\partial R}{\partial t} \right) \hat{\mathbf{n}}, \text{ en } \Sigma_l^\varepsilon, \quad \tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon) = \mathbf{g}_1^\varepsilon + \boldsymbol{\delta}_1^\varepsilon \text{ en } \Sigma_1^\varepsilon \quad \text{y} \quad \tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon) = \mathbf{g}_2^\varepsilon + \boldsymbol{\delta}_2^\varepsilon \text{ en } \Sigma_2^\varepsilon, \quad (2.3.40)$$

donde  $\boldsymbol{\delta}_1^\varepsilon$  y  $\boldsymbol{\delta}_2^\varepsilon$  vienen dados por (véase (2.1.5)),

$$\boldsymbol{\delta}_1^\varepsilon := -\varepsilon^3 \mathbf{g}_1^3 - \varepsilon^4 \mathbf{g}_1^4 + \mathcal{O}(\varepsilon^5), \quad (2.3.41)$$

$$\delta_2^\varepsilon := -\varepsilon^3 \mathbf{g}_2^3 - \varepsilon^4 \mathbf{g}_2^4 + \mathcal{O}(\varepsilon^5). \quad (2.3.42)$$

Por tanto, se deduce que  $|\delta_\alpha^\varepsilon|_{[L^\infty(\Gamma_\alpha^\varepsilon)]^3} \leq C\varepsilon^3$  (véase (2.1.5)) y así, utilizando la desigualdad de interpolación (véase el Capítulo 1, Sección 9.3 en [89]) y teniendo en cuenta (2.3.30), obtenemos que

$$\|\delta_\alpha^\varepsilon\|_{[H^{1/2}(\Sigma_\alpha^\varepsilon)]^3} \leq |\delta_\alpha^\varepsilon|_{[L^2(\Sigma_\alpha^\varepsilon)]^3}^{1/2} \|\delta_\alpha^\varepsilon\|_{[H^1(\Sigma_\alpha^\varepsilon)]^3}^{1/2} \leq C\varepsilon^{7/2},$$

es decir,

$$\|\delta_\alpha^\varepsilon\|_{[H^{1/2}(\Sigma_\alpha^\varepsilon)]^3} = \mathcal{O}(\varepsilon^{7/2}). \quad (2.3.43)$$

Además, de la misma forma considerando la derivada temporal de las expresiones (2.3.41)–(2.3.42) y teniendo en cuenta (1.1.11) y (2.3.30) se obtiene que,

$$\left\| \frac{\partial \delta_\alpha^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{[H^{1/2}(\Sigma_\alpha^\varepsilon)]^3} \leq \left| \frac{\partial \delta_\alpha^\varepsilon}{\partial t} \right|_{[L^2(\Sigma_\alpha^\varepsilon)]^3}^{1/2} \left\| \frac{\partial \delta_\alpha^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{[H^1(\Sigma_\alpha^\varepsilon)]^3}^{1/2} \leq C\varepsilon^{7/2},$$

es decir,

$$\left\| \frac{\partial \delta_\alpha^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{[H^{1/2}(\Sigma_\alpha^\varepsilon)]^3} = \mathcal{O}(\varepsilon^{7/2}). \quad (2.3.44)$$

Finalmente, la aproximación (2.3.28) nos proporciona la condición inicial,

$$\tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon) = \mathbf{u}_0^\varepsilon + \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \text{ en } t = 0, \quad (2.3.45)$$

donde (véanse (2.1.16), (2.3.18) y (2.3.20)),

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon := & \varepsilon(\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}_0^1) + \varepsilon^2(\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}_0^2) + \varepsilon(\mathbf{B}^1 + \mathbf{H}^1) \\ & + \varepsilon^2(\mathbf{B}^2 + \mathbf{H}^2) - \varepsilon^3 \mathbf{u}_0^3 - \varepsilon^4 \mathbf{u}_0^4 + \mathcal{O}(\varepsilon^5). \end{aligned} \quad (2.3.46)$$

Por tanto, se deduce que  $|\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon|_{[L^\infty(\hat{\Omega}_0^\varepsilon)]^3} \leq C\varepsilon$  y así, teniendo en cuenta (1.1.11),

$$|\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_0^\varepsilon)]^3} = \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (2.3.47)$$

También, utilizando (2.3.30)–(2.3.32), se deduce que,

$$\begin{aligned} |\nabla \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_0^\varepsilon)]^9} & \leq C |\nabla(\varepsilon(\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}_0^1) + \varepsilon(\mathbf{B}^1 + \mathbf{H}^1))|_{[L^2(\hat{\Omega}_0^\varepsilon)]^9} \\ & \leq C |\nabla_{\mathbf{s}}(\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}_0^1) + \nabla_{\bar{\mathbf{z}}} \mathbf{B}^1 + \nabla_{\bar{\mathbf{z}}}^* \mathbf{H}^1|_{[L^2(\hat{\Omega}_0^\varepsilon)]^9} \leq C\varepsilon. \end{aligned} \quad (2.3.48)$$

Además, nótese que, por construcción, el problema (2.3.34), (2.3.36), (2.3.40) y (2.3.45), verifica la condición de compatibilidad,

$$\int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \beta^\varepsilon dx^\varepsilon = \int_{\Sigma_t^\varepsilon} \left( \varepsilon \frac{\partial R}{\partial t} \right) \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n}^\varepsilon d\Sigma^\varepsilon + \int_{\Sigma_1^\varepsilon} (\mathbf{g}_1^\varepsilon + \boldsymbol{\delta}_1^\varepsilon) \cdot \mathbf{n}^\varepsilon d\Sigma^\varepsilon + \int_{\Sigma_1^\varepsilon} (\mathbf{g}_2^\varepsilon + \boldsymbol{\delta}_2^\varepsilon) \cdot \mathbf{n}^\varepsilon d\Sigma^\varepsilon,$$

que, junto con (2.1.4), implica que,

$$\int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \beta^\varepsilon dx^\varepsilon = \int_{\Sigma_1^\varepsilon} \boldsymbol{\delta}_1^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon d\Sigma^\varepsilon + \int_{\Sigma_1^\varepsilon} \boldsymbol{\delta}_2^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^\varepsilon d\Sigma^\varepsilon. \quad (2.3.49)$$

Por tanto, estamos en condiciones de abordar en el siguiente capítulo las estimaciones del error para la aproximación asintótica (2.3.28)–(2.3.29).

# Capítulo 3

## Estimaciones del error

Una de las características del método de desarrollos asintóticos (cuya teoría matemática se introduce en [88]) es que permite obtener una aproximación de un problema complejo mediante uno más sencillo. Sin embargo, es necesario justificar que la solución de ese problema más sencillo es realmente una buena aproximación del problema original. Una de las formas de justificar el correcto comportamiento del modelo aproximado es obtener estimaciones del error entre la solución original del problema y la aproximación. Este tipo de estimaciones se puede encontrar en numerosos trabajos en los que se utiliza el método de desarrollos asintóticos para el estudio de diferentes problemas (véanse, por ejemplo, [47, 49, 99, 117, 118, 120, 124]).

El objetivo de este capítulo es justificar matemáticamente la aproximación asintótica propuesta (2.3.28)–(2.3.29) (formada por la combinación de la aproximación interior obtenida en el Capítulo 1 junto con los correctores de capa límite obtenidos en el Capítulo 2). Al igual que en los capítulos anteriores, seguiremos los pasos de [98] donde se obtienen las estimaciones del error para la aproximación asintótica propuesta del flujo estacionario incompresible en una tubería curva con paredes rígidas. De esta forma, generalizaremos algunos de los resultados obtenidos en ese trabajo al caso evolutivo con paredes en movimiento. La mayor novedad que aporta esta memoria será precisamente la consideración de la condición de contorno en la frontera lateral de la tubería curva, que ya no es homogénea. Primeramente, necesitaremos desarrollar una desigualdad de tipo Poincaré para nuestro problema. Además, también estudiaremos las estimaciones correspondientes a una solución de un problema de valor en la frontera (véanse [12, 60, 82], por ejemplo). Así, estaremos en condiciones de obtener las estimaciones *a priori* de la solución del problema original y de concluir las estimaciones del error que justifican el modelo asintótico propuesto. Bajo algunas hipótesis adicionales sobre la regularidad de la solución del Problema 2.1.2, generalizaremos las estimaciones obtenidas en [98] para el caso estacionario y paredes rígidas.

Comenzaremos este capítulo introduciendo resultados preliminares en la Sección 3.1. Deduiremos una generalización de la desigualdad de Poincaré teniendo en cuenta la condición de contorno del problema original y estudiaremos acotaciones para las soluciones de una familia de problemas de valor en la frontera. En la Sección 3.2 obtendremos las



estimaciones del error entra la solución asintótica propuesta en el Capítulo 2 y la solución exacta del problema. De esta forma, justificaremos matemáticamente el modelo asintótico propuesto para el flujo en una tubería curva con paredes en movimiento. Para simplificar la exposición, el lector debe tener en cuenta las hipótesis consideradas sobre la función radio  $R$  en (2.1.17) ya que serán utilizadas en la mayor parte de las desigualdades que presentamos en este capítulo. Además, durante su desarrollo, denotaremos por  $C > 0$  a una constante arbitraria (que en algún caso podría depender del tiempo) para realizar las acotaciones oportunas.

### 3.1. Resultados preliminares

En este capítulo utilizaremos la notación introducida en el Capítulo 2 para denotar las normas en los espacios de Banach correspondientes. Empecemos introduciendo algunos resultados preliminares que serán de utilizados en la obtención de las estimaciones *a priori* y del error.

El primer resultado que presentaremos es una desigualdad de tipo Poincaré teniendo en cuenta la condición de contorno (2.1.3).

**Lema 3.1.1.** *Sea  $\varphi \in [H^1(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3$  tal que  $\varphi = \left(\varepsilon \frac{\partial R}{\partial t}\right) \hat{\mathbf{n}}$  en  $\Sigma_t^\varepsilon$ . Entonces,*

$$|\varphi|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \leq C\varepsilon |\nabla \varphi|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} + C\varepsilon^2.$$

*Si  $\varphi = \mathbf{0}$  en  $\Sigma_t^\varepsilon$  entonces,*

$$|\varphi|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \leq C\varepsilon |\nabla \varphi|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9}.$$

*Demostración.* El caso  $\varphi = \mathbf{0}$  en  $\Sigma_t^\varepsilon$  corresponde al Lema 7 en [98]. Para probar el caso no homogéneo generalizaremos los argumentos utilizados en la demostración del Lema 7 en [98].

Definamos una función  $\chi(s_1, s_2, s_3) = \varphi(x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon, x_3^\varepsilon)$  donde  $(x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon, x_3^\varepsilon) = \phi_2(s_1, s_2, s_3)$  (véase (1.1.6)) y  $\psi(s_1, s_2, s_3) = \chi(s_1, s_2, \varepsilon s_3)$ . Nótese que  $\psi \in [H^1(\Omega)]^3$  y es tal que  $\psi = \left(\varepsilon \frac{\partial R}{\partial t}\right) \hat{\mathbf{n}}$  en  $s_3 = 1$ . Se puede comprobar fácilmente que,

$$\psi(s_1, s_2, s_3) = - \int_{s_3}^1 \frac{\partial \psi}{\partial s_3}(s_1, s_2, \xi) d\xi + \left(\varepsilon \frac{\partial R}{\partial t}\right) \hat{\mathbf{n}}.$$

Por tanto, teniendo en cuenta (2.1.17), se tiene que

$$|\psi|_{[L^2(\Omega)]^3} \leq C \left( \left| \frac{\partial \psi}{\partial s_3} \right|_{[L^2(\Omega)]^3} + \varepsilon \right). \quad (3.1.1)$$



Abusando de la notación, denotaremos también por  $\hat{\mathbf{n}} = (\hat{n}_i)$  la prolongación del vector  $\hat{\mathbf{n}} = \cos s_2 \mathbf{v}_2(s_1) + \sin s_2 \mathbf{v}_3(s_1)$  tal que, para cada  $s_1 \in [0, L]$  y  $s_2 \in [0, 2\pi]$  fijados, el vector  $\hat{\mathbf{n}}$  es constante para todo  $s_3 \in (0, 1]$ . Entonces, se obtienen las siguientes igualdades (véanse (1.1.6) y (1.1.7)):

$$\frac{\partial \psi}{\partial s_3} = \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial s_3^\varepsilon} = \varepsilon \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i^\varepsilon} \frac{\partial x_i^\varepsilon}{\partial s_3^\varepsilon} = \varepsilon R \sum_{i=1}^3 \hat{n}_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i^\varepsilon}, \quad (3.1.2)$$

$$\int_{\Omega} \psi^2(s) ds = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega^\varepsilon} \chi^2(s^\varepsilon) ds^\varepsilon, \quad (3.1.3)$$

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \chi(s^\varepsilon) \sqrt{g_2} ds^\varepsilon = \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \varphi(x^\varepsilon) dx^\varepsilon, \quad (3.1.4)$$

donde,  $\sqrt{g_2} := \left( \frac{\partial \phi_2^\varepsilon}{\partial s_2^\varepsilon} \wedge \frac{\partial \phi_2^\varepsilon}{\partial s_1^\varepsilon} \right) \cdot \frac{\partial \phi_2^\varepsilon}{\partial s_3^\varepsilon}$ . Utilizando que (véanse (1.1.6), (1.1.8) y (1.1.9)),

$$\frac{\partial \phi_2^\varepsilon}{\partial s_2^\varepsilon} \wedge \frac{\partial \phi_2^\varepsilon}{\partial s_1^\varepsilon} = \frac{\partial \phi^\varepsilon}{\partial s_2} \wedge \frac{\partial \phi^\varepsilon}{\partial s_1} = s_3^\varepsilon R (1 - s_3^\varepsilon \kappa R \cos s_2) \hat{\mathbf{n}} - (s_3^\varepsilon)^2 R \frac{\partial R}{\partial s_1} \mathbf{v}_1, \quad \frac{\partial \phi_2^\varepsilon}{\partial s_3^\varepsilon} = R \hat{\mathbf{n}},$$

entonces,

$$\sqrt{g_2} = s_3^\varepsilon R^2 (1 - s_3^\varepsilon \kappa R \cos s_2) = \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (3.1.5)$$

Por un lado, teniendo en cuenta (3.1.3), (3.1.4) y (3.1.5) hallamos que.

$$\int_{\Omega} |\psi|^2 ds = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega^\varepsilon} |\chi|^2 \sqrt{g_2} \frac{1}{\sqrt{g_2}} ds^\varepsilon \geq \frac{C}{\varepsilon^2} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} |\varphi|^2 dx^\varepsilon. \quad (3.1.6)$$

Por otro lado, por (3.1.2)–(3.1.4), (2.1.17) y (3.1.5) deducimos que,

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial \psi}{\partial s_3} \right|^2 ds = \varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} \left| \frac{\partial \chi}{\partial s_3^\varepsilon} \right|^2 \sqrt{g_2} \frac{1}{\sqrt{g_2}} ds^\varepsilon \leq C \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} |\nabla \varphi|^2 dx^\varepsilon. \quad (3.1.7)$$

Por tanto, aplicando en (3.1.1) las desigualdades (3.1.6)–(3.1.7) obtenemos el resultado.  $\square$

Análogamente, obtenemos la siguiente estimación en los extremos del dominio  $\hat{\Omega}_t^\varepsilon$ :

**Lema 3.1.2.** Sea  $\varphi \in [H^1(\Sigma_\alpha^\varepsilon)]^3$  ( $\alpha = 1, 2$ ) tal que  $\varphi = \left( \varepsilon \frac{\partial R}{\partial t} \right) \hat{\mathbf{n}}$  en  $\Sigma_\alpha^\varepsilon \cap \Sigma_l^\varepsilon$ . Entonces, se verifica:

$$|\varphi|_{[L^2(\Sigma_\alpha^\varepsilon)]^3} \leq C\varepsilon |\nabla \varphi|_{[L^2(\Sigma_\alpha^\varepsilon)]^9} + C\varepsilon^2.$$

*Demostración.* La demostración sigue los mismos argumentos utilizados para probar el Lema 3.1.1.  $\square$

A continuación, presentamos una generalización del Lema 8 en [98] considerando la condición de contorno (2.1.3). En este resultado proporcionaremos una acotación de la norma en el espacio  $L^4(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)$  que utilizaremos en la deducción de las estimaciones del error.

**Lema 3.1.3.** *Sea  $\varphi \in [H^1(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3$  tal que  $\varphi = \varepsilon \frac{\partial R}{\partial t} \hat{\mathbf{n}}$  en  $\Sigma_l^\varepsilon$ . Entonces,*

$$|\varphi|_{[L^4(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \leq C \sqrt[4]{\varepsilon} \left( |\nabla \varphi|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} + \varepsilon \right).$$

*Si  $\varphi = \mathbf{0}$  en  $\Sigma_l^\varepsilon$ , entonces,*

$$|\varphi|_{[L^4(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \leq C \sqrt[4]{\varepsilon} |\nabla \varphi|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9}.$$

*Demostración.* El caso  $\varphi = \mathbf{0}$  en  $\Sigma_l^\varepsilon$  corresponde al Lema 8 en [98]. Para probar el caso no homogéneo generalizaremos los argumentos utilizados en la demostración del Lema 8 en [98].

Utilizando el Lema 3.1.1, la desigualdad de interpolación (véase el Capítulo 1, Sección 9.3 en [89]) y el embebimiento  $H^1(\hat{\Omega}_t^\varepsilon) \hookrightarrow L^6(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)$  (véase, por ejemplo, el Teorema 9.9 en [14]) tenemos que

$$|\varphi|_{[L^4(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3}^4 \leq |\varphi|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} |\varphi|_{[L^6(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3}^3 \leq C \left( \varepsilon |\nabla \varphi|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} + \varepsilon^2 \right) \|\varphi\|_{[H^1(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3}^3.$$

Aplicando nuevamente el Lema 3.1.1 se deduce que,

$$\|\varphi\|_{[H^1(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3}^3 \leq C \left( (1 + \varepsilon) |\nabla \varphi|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} + \varepsilon^2 \right)^3,$$

y así,

$$|\varphi|_{[L^4(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3}^4 \leq C \varepsilon \left( |\nabla \varphi|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} + \varepsilon \right) \left( |\nabla \varphi|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} + \varepsilon^2 \right)^3 \leq C \varepsilon \left( |\nabla \varphi|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} + \varepsilon \right)^4.$$

Aplicando la raíz cuarta a la desigualdad anterior se concluye el resultado.  $\square$

En el siguiente lema presentaremos acotaciones para soluciones de un problema de valor en la frontera definidos en el dominio  $\hat{\Omega}_t^\varepsilon$ . Este resultado es una generalización del Lema 9 en [98] considerando la condición de contorno (1.1.5).

**Lema 3.1.4.** *Sean  $F \in H^1(0, T; L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon))$ ,  $\mathbf{h}_\alpha \in H^1(0, T; [H^{1/2}(\Sigma_\alpha^\varepsilon)]^3)$  y denotemos por  $\mathbf{n}^\varepsilon$  el vector normal unitario exterior en  $\Sigma_l^\varepsilon$ . El problema,*

$$\begin{cases} \operatorname{div} \varphi = F & \text{en } \hat{\Omega}_t^\varepsilon, \\ \varphi = \left( \varepsilon \frac{\partial R}{\partial t} \right) \hat{\mathbf{n}} & \text{en } \Sigma_l^\varepsilon, \\ \varphi = \mathbf{h}_\alpha & \text{en } \Sigma_\alpha^\varepsilon, \end{cases}$$

con,

$$\int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} F = - \int_{\Sigma_1^\varepsilon} \mathbf{v}_1(0) \cdot \mathbf{h}_1 + \int_{\Sigma_2^\varepsilon} \mathbf{v}_1(L) \cdot \mathbf{h}_2 + \int_{\Sigma_l^\varepsilon} \varepsilon \frac{\partial R}{\partial t} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n}^\varepsilon,$$

tiene al menos una solución. Además, si

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_\alpha^t &:= (\mathbf{h}_\alpha \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{h}_\alpha^{nb} := \mathbf{h}_\alpha - \mathbf{h}_\alpha^t, \\ \mathbf{h}_\alpha &= \varepsilon \frac{\partial R}{\partial t} \hat{\mathbf{n}} \text{ en } \Sigma_\alpha^\varepsilon \cap \Sigma_l^\varepsilon, \end{aligned}$$

entonces, podemos escoger  $\varphi$  tal que,

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{[H^1(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} &\leq C \left( \frac{1}{\varepsilon} |F|_{L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left( \|\mathbf{h}_1^t\|_{[H^{1/2}(\Sigma_1^\varepsilon)]^3} + \|\mathbf{h}_2^t\|_{[H^{1/2}(\Sigma_2^\varepsilon)]^3} \right) \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{h}_1^{nb}\|_{[H^{1/2}(\Sigma_1^\varepsilon)]^3} + \|\mathbf{h}_2^{nb}\|_{[H^{1/2}(\Sigma_2^\varepsilon)]^3} \right) + \tilde{C}, \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

con  $\tilde{C} > 0$ , para todo  $t \in [0, T]$ . Además, se tiene que,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} &\leq C \varepsilon \left( \frac{1}{\varepsilon} \left( |F|_{L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)} + \left\| \frac{\partial F}{\partial t} \right\|_{L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)} \right) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left( \|\mathbf{h}_1^t\|_{[H^{1/2}(\Sigma_1^\varepsilon)]^3} + \left\| \frac{\partial \mathbf{h}_1^t}{\partial t} \right\|_{[H^{1/2}(\Sigma_1^\varepsilon)]^3} \right. \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{h}_2^t\|_{[H^{1/2}(\Sigma_2^\varepsilon)]^3} + \left\| \frac{\partial \mathbf{h}_2^t}{\partial t} \right\|_{[H^{1/2}(\Sigma_2^\varepsilon)]^3} \right) + \|\mathbf{h}_1^{nb}\|_{[H^{1/2}(\Sigma_1^\varepsilon)]^3} + \left\| \frac{\partial \mathbf{h}_1^{nb}}{\partial t} \right\|_{[H^{1/2}(\Sigma_1^\varepsilon)]^3} \\ &\quad \left. + \|\mathbf{h}_2^{nb}\|_{[H^{1/2}(\Sigma_2^\varepsilon)]^3} + \left\| \frac{\partial \mathbf{h}_2^{nb}}{\partial t} \right\|_{[H^{1/2}(\Sigma_2^\varepsilon)]^3} \right) + \tilde{C} \varepsilon, \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\|_{[H^1(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} &\leq C \left( \frac{1}{\varepsilon} \left( |F|_{L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)} + \left\| \frac{\partial F}{\partial t} \right\|_{L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)} \right) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left( \|\mathbf{h}_1^t\|_{[H^{1/2}(\Sigma_1^\varepsilon)]^3} + \left\| \frac{\partial \mathbf{h}_1^t}{\partial t} \right\|_{[H^{1/2}(\Sigma_1^\varepsilon)]^3} \right. \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{h}_2^t\|_{[H^{1/2}(\Sigma_2^\varepsilon)]^3} + \left\| \frac{\partial \mathbf{h}_2^t}{\partial t} \right\|_{[H^{1/2}(\Sigma_2^\varepsilon)]^3} \right) + \|\mathbf{h}_1^{nb}\|_{[H^{1/2}(\Sigma_1^\varepsilon)]^3} + \left\| \frac{\partial \mathbf{h}_1^{nb}}{\partial t} \right\|_{[H^{1/2}(\Sigma_1^\varepsilon)]^3} \\ &\quad \left. + \|\mathbf{h}_2^{nb}\|_{[H^{1/2}(\Sigma_2^\varepsilon)]^3} + \left\| \frac{\partial \mathbf{h}_2^{nb}}{\partial t} \right\|_{[H^{1/2}(\Sigma_2^\varepsilon)]^3} \right) + \tilde{C}, \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

con  $\tilde{C} > 0$ , para cada  $t \in [0, T]$ .

Si  $\varphi = \mathbf{0}$  en  $\Sigma_l^\varepsilon$ , entonces obtenemos las mismas desigualdades con  $\tilde{C} = 0$ .

*Demostración.* El caso  $\varphi = \mathbf{0}$  en  $\Sigma_l^\varepsilon$  corresponde al Lema 9 en [98]. Nos centraremos en el caso no homogéneo.

Sea  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$  tal que  $y_1 := s_1$ ,  $y_2 := \varepsilon z_2 = \varepsilon s_3 \cos s_2$  y  $y_3 := \varepsilon z_3 = \varepsilon s_3 \sin s_2$  (véase (1.3.23)). Entonces, consideremos la aplicación  $\hat{\phi} : [0, L] \times \varepsilon\omega \rightarrow \hat{\Omega}_t^\varepsilon$  (véase (1.1.7)) dada por:

$$\hat{\phi}(y_1, y_2, y_3) = \mathbf{c}(y_1) + R(y_2 \mathbf{v}_2(y_1) + y_3 \mathbf{v}_3(y_1)). \quad (3.1.11)$$

Entonces, obtenemos los elementos de la base covariante  $\mathbf{a}_i = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y_i}$ , que vienen dados por las expresiones:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (1 - y_2 \kappa R) \mathbf{v}_1(y_1) + \left( y_2 \frac{\partial R}{\partial y_1} - y_3 \tau R \right) \mathbf{v}_2(y_1) + \left( y_3 \frac{\partial R}{\partial y_1} + y_2 \tau R \right) \mathbf{v}_3(y_1), \\ \mathbf{a}_2 &= R \mathbf{v}_2(y_1), \quad \mathbf{a}_3 = R \mathbf{v}_3(y_1). \end{aligned}$$

Si ahora denotamos por  $\sqrt{\hat{g}}$  el determinante del cambio de variable de la aplicación (3.1.11), se puede comprobar que,

$$\sqrt{\hat{g}} = (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3 = R^2(1 - y_2 \kappa R). \quad (3.1.12)$$

Consideremos funciones de tipo capa límite  $\kappa_L = (\kappa_L^i)$  y  $\kappa_R = (\kappa_R^i)$  tal que son solución de los siguientes problemas definidos en cilindros semi-infinitos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \kappa_L^i}{\partial z_i} = 0 \text{ en } \Omega_L, \\ \kappa_L = \mathbf{h}_1^{nb}(\hat{\phi}(0, y_2, y_3)) - \varepsilon \frac{\partial R}{\partial t}(t, 0) \hat{\mathbf{n}} \text{ en } \Sigma_1, \\ \kappa_L = \mathbf{0} \text{ en } s_3 = 1, \end{array} \right. \quad (3.1.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \kappa_R^i}{\partial z_i} = 0 \text{ en } \Omega_R, \\ \kappa_R = \mathbf{h}_2^{nb}(\hat{\phi}(L, y_2, y_3)) - \varepsilon \frac{\partial R}{\partial t}(t, L) \hat{\mathbf{n}} \text{ en } \Sigma_2, \\ \kappa_R = \mathbf{0} \text{ en } s_3 = 1. \end{array} \right. \quad (3.1.14)$$

Aplicando las estimaciones del Teorema 2.2.1, deducimos que:

$$\kappa_L \left( \frac{L}{\varepsilon}, \mathbf{z} \right) = \kappa_R \left( -\frac{L}{\varepsilon}, \mathbf{z} \right) = \mathcal{O}(e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}}), \quad (3.1.15)$$

con  $\lambda > 0$ . Además, utilizando los resultados de [60, 114], por ejemplo, se deduce que,

$$\|\kappa_L\|_{[H^1(\Omega_L)]^3} \leq C \|\mathbf{h}_1^{nb}\|_{[H^{1/2}(\Sigma_1)]^3} + \tilde{C}\varepsilon, \quad (3.1.16)$$

$$\|\kappa_R\|_{[H^1(\Omega_R)]^3} \leq C \|\mathbf{h}_2^{nb}\|_{[H^{1/2}(\Sigma_2)]^3} + \tilde{C}\varepsilon. \quad (3.1.17)$$

Ahora, consideremos una función  $\mathbf{Z} : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  solución del problema,

$$\begin{cases} \sum_{\alpha=2}^3 \frac{\partial Z^\alpha}{\partial z_\alpha} + \frac{\partial Z^1}{\partial s_1} = f \text{ en } \Omega, \\ \mathbf{Z} = \mathbf{H}_l \text{ en } \Sigma_l, \\ \mathbf{Z} = \mathbf{H}_\alpha \text{ en } \Sigma_\alpha, \end{cases} \quad (3.1.18)$$

donde,

$$\begin{aligned} f(s_1, z_2, z_3) &= F(\hat{\phi}(y_1, y_2, y_3)), \\ H_1^1(0, z_2, z_3) \mathbf{a}_1 &= \sqrt{\hat{g}} \left( \mathbf{h}_1^t(\hat{\phi}(0, y_2, y_3)) - \boldsymbol{\kappa}_R \left( -\frac{L}{\varepsilon}, \mathbf{z} \right) \right), & H_1^\alpha \mathbf{a}_\alpha &= \sqrt{\hat{g}} \frac{\partial R}{\partial t}(t, 0) \hat{\mathbf{n}} \\ H_2^1(L, z_2, z_3) \mathbf{a}_1 &= \sqrt{\hat{g}} \left( \mathbf{h}_2^t(\hat{\phi}(L, y_2, y_3)) - \boldsymbol{\kappa}_L \left( \frac{L}{\varepsilon}, \mathbf{z} \right) \right), & H_2^\alpha \mathbf{a}_\alpha &= \sqrt{\hat{g}} \frac{\partial R}{\partial t}(t, L) \hat{\mathbf{n}} \\ H_l^1 \mathbf{a}_1 &= \mathbf{0}, & H_l^\alpha \mathbf{a}_\alpha &= \sqrt{\hat{g}} \frac{\partial R}{\partial t} \hat{\mathbf{n}}. \end{aligned}$$

Entonces, aplicando estimaciones estándar de problemas de valor en la frontera (véanse, por ejemplo, [12, 82]) se tiene que,

$$\|\mathbf{Z}\|_{[H^1(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \leq C \left( \frac{1}{\varepsilon} |f|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{H}_1\|_{[H^{1/2}(\Sigma_1)]^3} + \|\mathbf{H}_2\|_{[H^{1/2}(\Sigma_2)]^3} + \tilde{C} \right). \quad (3.1.19)$$

Por un lado, teniendo en cuenta (2.1.17) y (3.1.12), obtenemos que,

$$\|\mathbf{H}_1\|_{[H^{1/2}(\Sigma_1)]^3} \leq \|H_1^1 \mathbf{a}_1\|_{[H^{1/2}(\Sigma_1)]^3} + \tilde{C}. \quad (3.1.20)$$

Por otro lado, aplicando la desigualdad de interpolación (véase el Capítulo 1, Sección 9.3 en [89]), el Lema 3.1.2 y (3.1.15) deducimos que,

$$\begin{aligned} \|H_1^1 \mathbf{a}_1\|_{[H^{1/2}(\Sigma_1)]^3} &\leq C \left( \varepsilon^{-1} \|\mathbf{h}_1^t\|_{[L^2(\Sigma_1^\varepsilon)]^3} \right)^{1/2} \left( \|\nabla \mathbf{y} \mathbf{h}_1^t\|_{[L^2(\Sigma_1^\varepsilon)]^3} + \varepsilon \right)^{1/2} + K e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}} \\ &\leq C \varepsilon^{-1/2} \|\mathbf{h}_1^t\|_{[H^1(\Sigma_1^\varepsilon)]^3} + K e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}} + C \\ &\leq C \varepsilon^{-1/2} \|\mathbf{h}_1^t\|_{[H^{1/2}(\Sigma_1^\varepsilon)]^3} + K e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}} + C, \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

donde  $K > 0$  solo depende de  $\|\mathbf{h}_\alpha^{nb}\|_{[H^{1/2}(\Sigma_\alpha^\varepsilon)]^3}$ . Análogamente se obtiene la acotación para  $\|\mathbf{H}_2\|_{[H^{1/2}(\Sigma_2)]^3}$ . Entonces, (3.1.19) nos conduce a,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Z}\|_{[H^1(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} &\leq C \left( \frac{1}{\varepsilon} |F|_{L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left( \|\mathbf{h}_1^t\|_{[H^{1/2}(\Sigma_1^\varepsilon)]^3} + \|\mathbf{h}_2^t\|_{[H^{1/2}(\Sigma_2^\varepsilon)]^3} \right) + \tilde{C} \right) \\ &\quad + K e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

De esta forma, definiendo  $\kappa^i(z_1, \mathbf{z}) = \kappa_L^i(z_1, \mathbf{z}) + \kappa_R^i\left(z_1 - \frac{L}{\varepsilon}, \mathbf{z}\right)$ , podemos elegir  $\varphi$  como,

$$\varphi(\mathbf{x}^\varepsilon) = \sum_{\alpha=2}^3 \left( \frac{\varepsilon}{\sqrt{g}} Z^\alpha + \kappa^\alpha \right) \mathbf{a}_\alpha(\mathbf{y}) + \left( \frac{1}{\sqrt{g}} Z^1 + \kappa^1 \right) \mathbf{a}_1(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x}^\varepsilon = \hat{\phi}(\mathbf{y}), \quad (3.1.23)$$

de donde concluimos (3.1.8) utilizando (3.1.16)–(3.1.17) y (3.1.22). Si ahora derivamos con respecto al tiempo (3.1.23), obtenemos que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{x}^\varepsilon) &= \sum_{\alpha=2}^3 \left( \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\sqrt{g}} \right) Z^\alpha \mathbf{a}_\alpha(\mathbf{y}) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial t} (Z^\alpha \mathbf{a}_\alpha(\mathbf{y})) + \frac{\partial}{\partial t} (\kappa^\alpha \mathbf{a}_\alpha(\mathbf{y})) \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\sqrt{g}} \right) Z^1 \mathbf{a}_1(\mathbf{y}) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial t} (Z^1 \mathbf{a}_1(\mathbf{y})) + \frac{\partial}{\partial t} (\kappa^1 \mathbf{a}_1(\mathbf{y})), \quad \mathbf{x}^\varepsilon = \hat{\phi}(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

Entonces, dado que el dominio  $\Omega$  no depende del tiempo, podemos tomar la derivada temporal del problema (3.1.18),

$$\begin{cases} \sum_{\alpha=2}^3 \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \left( \frac{\partial Z^\alpha}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial s_1} \left( \frac{\partial Z^1}{\partial t} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} \text{ en } \Omega, \\ \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{H}_l}{\partial t} \text{ en } \Sigma_l, \\ \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{H}_\alpha}{\partial t} \text{ en } \Sigma_\alpha, \end{cases}$$

donde,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(s_1, z_2, z_3) &= \frac{\partial F}{\partial t}(\hat{\phi}(y_1, y_2, y_3)), \\ \frac{\partial}{\partial t} (H_1^1(0, z_2, z_3) \mathbf{a}_1) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \sqrt{\hat{g}} \left( \mathbf{h}_1^t(\hat{\phi}(0, y_2, y_3)) - \kappa_R \left( -\frac{L}{\varepsilon}, \mathbf{z} \right) \right) \right), \\ \frac{\partial}{\partial t} (H_1^\alpha \mathbf{a}_\alpha) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \sqrt{\hat{g}} \frac{\partial R}{\partial t}(t, 0) \right) \hat{\mathbf{n}} \\ \frac{\partial}{\partial t} (H_2^1(L, z_2, z_3) \mathbf{a}_1) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \sqrt{\hat{g}} \left( \mathbf{h}_2^t(\hat{\phi}(L, y_2, y_3)) - \kappa_L \left( \frac{L}{\varepsilon}, \mathbf{z} \right) \right) \right), \\ \frac{\partial}{\partial t} (H_2^\alpha \mathbf{a}_\alpha) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \sqrt{\hat{g}} \frac{\partial R}{\partial t}(t, L) \right) \hat{\mathbf{n}} \\ \frac{\partial}{\partial t} (H_l^1 \mathbf{a}_1) &= \mathbf{0}, \quad \frac{\partial}{\partial t} (H_l^\alpha \mathbf{a}_\alpha) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \sqrt{\hat{g}} \frac{\partial R}{\partial t} \right) \hat{\mathbf{n}}. \end{aligned}$$

Utilizando los resultados de [12] (o también [116], por ejemplo) y el mismo razonamiento aplicado en (3.1.20)–(3.1.21), deducimos que,

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} \right\|_{[H^1(\Omega)]^3} \leq C \left( \frac{1}{\varepsilon} \left\| \frac{\partial F}{\partial t} \right\|_{L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left( \left\| \mathbf{h}_1^t \right\|_{[H^{1/2}(\Sigma_1^\varepsilon)]^3} + \left\| \frac{\partial \mathbf{h}_1^t}{\partial t} \right\|_{[H^{1/2}(\Sigma_1^\varepsilon)]^3} \right) \right)$$

$$+ \left\| \mathbf{h}_2^t \right\|_{[H^{1/2}(\Sigma_2^\varepsilon)]^3} + \left\| \frac{\partial \mathbf{h}_2^t}{\partial t} \right\|_{[H^{1/2}(\Sigma_2^\varepsilon)]^3} \Big) + \tilde{C} \Big) + \tilde{K} e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}}, \quad (3.1.25)$$

donde  $\tilde{K} > 0$  depende de  $\left\| \mathbf{h}_\alpha^{nb} \right\|_{[H^{1/2}(\Sigma_\alpha^\varepsilon)]^3}$  y  $\left\| \frac{\partial \mathbf{h}_\alpha^{nb}}{\partial t} \right\|_{[H^{1/2}(\Sigma_\alpha^\varepsilon)]^3}$ . Derivando con respecto al tiempo los problemas (3.1.13)–(3.1.14) y aplicando nuevamente el Teorema 2.2.1 y las acotaciones de [60, 114], por ejemplo, obtenemos que,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\kappa}_L}{\partial t} \left( \frac{L}{\varepsilon}, \mathbf{z} \right) = \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}_R}{\partial t} \left( -\frac{L}{\varepsilon}, \mathbf{z} \right) = \mathcal{O}(e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}}), \quad (3.1.26)$$

$$\left\| \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}_L}{\partial t} \right\|_{[H^1(\Omega_L)]^3} \leq C \left\| \frac{\partial \mathbf{h}_1^{nb}}{\partial t} \right\|_{[H^{1/2}(\Sigma_1)]^3} + \tilde{C}\varepsilon, \quad (3.1.27)$$

$$\left\| \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}_R}{\partial t} \right\|_{[H^1(\Omega_R)]^3} \leq C \left\| \frac{\partial \mathbf{h}_2^{nb}}{\partial t} \right\|_{[H^{1/2}(\Sigma_2)]^3} + \tilde{C}\varepsilon, \quad (3.1.28)$$

con  $\lambda > 0$ . Por último, teniendo en cuenta que  $\left| \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \right) \right| = \mathcal{O}(1)$ ,  $\left| \frac{\partial}{\partial s_q} \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \right) \right) \right| = \mathcal{O}(1)$  ( $q = 1, 2, 3$ ) con respecto a  $\varepsilon$  (véase (3.1.12)), deducimos de (3.1.24) las acotaciones:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} &\leq C\varepsilon \left( \left| \mathbf{Z} \right|_{[L^2(\Omega)]^3} + \left| \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} \right|_{[L^2(\Omega)]^3} + \left| \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}}{\partial t} \right|_{[L^2(\Omega)]^3} \right), \\ \left| \nabla \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} &\leq C \left( \left\| \mathbf{Z} \right\|_{[H^1(\Omega)]^3} + \left\| \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} \right\|_{[H^1(\Omega)]^3} + \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}}{\partial t} \right\|_{[H^1(\Omega)]^3} \right). \end{aligned}$$

Así, utilizando (3.1.22), (3.1.25), (3.1.27) y (3.1.28) se concluyen (3.1.9) y (3.1.10).  $\square$

Como el dominio de definición del Problema 2.1.2 depende del tiempo, no podemos extraer las derivadas temporales de los integrandos. Por ello, en el último lema de esta sección obtenemos una relación que será de gran utilidad en el cálculo de las estimaciones que necesitamos.

**Lema 3.1.5.** *Sea  $F \in L^2(0, T; L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon))$ . Entonces, se verifica la siguiente igualdad,*

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} F dx^\varepsilon = \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{\partial F}{\partial t} dx^\varepsilon + \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{3}{R} \frac{\partial R}{\partial t} F dx^\varepsilon - \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{1}{1 - \varepsilon s_3 \kappa R \cos s_2} \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} F dx^\varepsilon.$$

*Demostración.* Admitimos un cierto abuso de notación para simplificar la exposición del resultado, denotando por de la misma forma a la función  $F$  definida en el dominio  $\hat{\Omega}_t^\varepsilon$  y a la correspondiente definida en  $\Omega$ . Por el Teorema del cambio de variable y (1.1.11), se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} F dx^\varepsilon = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} F \varepsilon^2 s_3 R^2 (1 - \varepsilon s_3 \kappa R \cos s_2) ds.$$

Como el dominio  $\Omega$  es independiente de la variable temporal, podemos introducir la derivada con respecto al tiempo y aplicar la regla de la derivada del producto para obtener:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} F \varepsilon^2 s_3 R^2 (1 - \varepsilon s_3 \kappa R \cos s_2) ds &= \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial t} \varepsilon^2 s_3 R^2 (1 - \varepsilon s_3 \kappa R \cos s_2) ds \\ &+ \int_{\Omega} 2F \left( \varepsilon^2 s_3 R \frac{\partial R}{\partial t} (1 - \varepsilon s_3 \kappa R \cos s_2) \right) ds + \int_{\Omega} F \left( \varepsilon^2 s_3 R^2 \left( -\varepsilon s_3 \kappa \frac{\partial R}{\partial t} \cos s_2 \right) \right) ds. \end{aligned}$$

Ahora, aplicando nuevamente el Teorema del cambio de variable y teniendo en cuenta (1.1.11), deducimos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} F dx^\varepsilon = \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{\partial F}{\partial t} dx^\varepsilon + \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{2}{R} \frac{\partial R}{\partial t} F dx^\varepsilon - \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{\varepsilon s_3 \kappa \cos s_2}{1 - \varepsilon s_3 \kappa R \cos s_2} \frac{\partial R}{\partial t} F dx^\varepsilon.$$

Operando las simplificaciones oportunas concluimos la demostración.  $\square$

## 3.2. Estimaciones del error

En esta sección presentaremos el resultado principal de este capítulo, es decir, la deducción de las estimaciones del error que justifican matemáticamente la aproximación asintótica propuesta (2.3.28)–(2.3.29). Comenzaremos estudiando acotaciones *a priori* de la solución del Problema 2.1.2.

Consideremos una función test  $\mathbf{a}$  tal que es solución del siguiente problema:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{a} = 0 \text{ en } \hat{\Omega}_t^\varepsilon, \\ \mathbf{a} = \varepsilon \frac{\partial R}{\partial t} \hat{\mathbf{n}} \text{ en } \Sigma_l^\varepsilon, \\ \mathbf{a} = \mathbf{g}_\alpha^\varepsilon \text{ en } \Sigma_\alpha^\varepsilon. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Nótese que la condición de compatibilidad es precisamente la correspondiente a nuestro problema original (véase (2.1.4)). Entonces, aplicando el Lema 3.1.4 y teniendo en cuenta (2.1.8) deducimos que,

$$\|\mathbf{a}\|_{[H^1(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} \left( |\mathbf{g}_1^\varepsilon|_{[H^{1/2}(\Sigma_1^\varepsilon)]^3} + |\mathbf{g}_2^\varepsilon|_{[H^{1/2}(\Sigma_2^\varepsilon)]^3} \right) + \tilde{C} \leq C \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.2.2)$$

Por las estimaciones del mismo Lema 3.1.4, (2.1.8) y (2.1.9), se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} &\leq \frac{C\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \left( |\mathbf{g}_1^\varepsilon|_{[H^{1/2}(\Sigma_1^\varepsilon)]^3} + \left| \frac{\partial \mathbf{g}_1^\varepsilon}{\partial t} \right|_{[H^{1/2}(\Sigma_1^\varepsilon)]^3} \right. \\ &\quad \left. + |\mathbf{g}_2^\varepsilon|_{[H^{1/2}(\Sigma_2^\varepsilon)]^3} + \left| \frac{\partial \mathbf{g}_2^\varepsilon}{\partial t} \right|_{[H^{1/2}(\Sigma_2^\varepsilon)]^3} \right) + \tilde{C}\varepsilon \leq C\varepsilon \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3.2.3)$$



$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \right\|_{[H^1(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} &\leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} \left( |\mathbf{g}_1^\varepsilon|_{[H^{1/2}(\Sigma_1^\varepsilon)]^3} + \left| \frac{\partial \mathbf{g}_1^\varepsilon}{\partial t} \right|_{[H^{1/2}(\Sigma_1^\varepsilon)]^3} \right. \\ &\quad \left. + |\mathbf{g}_2^\varepsilon|_{[H^{1/2}(\Sigma_2^\varepsilon)]^3} + \left| \frac{\partial \mathbf{g}_2^\varepsilon}{\partial t} \right|_{[H^{1/2}(\Sigma_2^\varepsilon)]^3} \right) + \tilde{C} \leq C \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

En lo que sigue, asumiremos que se verifica la condición:

$$\int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} p^\varepsilon dx^\varepsilon = 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

**Observación 3.2.1.** *Esto es posible dado que la existencia de solución del Problema 2.1.2 (que hemos asumido en el Capítulo 2) determina de forma única al par  $(\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon)$  excepto de una constante para la presión.*

Entonces, sea  $\mathbf{b}$  una función tal que:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{b} = p^\varepsilon \text{ en } \hat{\Omega}_t^\varepsilon, \\ \mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ en } \partial \hat{\Omega}_t^\varepsilon. \end{cases} \quad (3.2.5)$$

Aplicando el Lema 3.1.4, se tiene que

$$\|\mathbf{b}\|_{[H^1(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \leq \frac{C}{\varepsilon} |p^\varepsilon|_{L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)} \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.2.6)$$

**Teorema 3.2.2.** *Sean  $\mathbf{b}_0^\varepsilon$  definido como en (2.1.12),  $\mathbf{g}_\alpha^\varepsilon \in H^1(0, T; [H^{3/2}(\Sigma_\alpha^\varepsilon)]^3)$  y  $\mathbf{u}_0^\varepsilon \in [H^1(\hat{\Omega}_0^\varepsilon)]^3$ . Sea  $(\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon)$  la solución del Problema 2.1.2. Entonces, existe una constante  $C > 0$ , independiente de  $\varepsilon$ , tal que,*

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{L^2(0, T; [L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3)} \leq C\varepsilon, \quad (3.2.7)$$

$$\|\nabla \mathbf{u}^\varepsilon\|_{L^2(0, T; [L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9)} \leq C. \quad (3.2.8)$$

*Demostración.* Consideremos una función  $\mathbf{a}$  solución del problema (3.2.1), multipliquemos escalarmente la ecuación (1.1.3) por  $(\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{a})$  e integremos sobre el dominio  $\hat{\Omega}_t^\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \cdot (\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{a}) dx^\varepsilon + \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla \mathbf{u}^\varepsilon) \mathbf{u}^\varepsilon \cdot (\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{a}) dx^\varepsilon + \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{1}{\rho_0} \nabla p^\varepsilon \cdot (\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{a}) dx^\varepsilon \\ - \nu \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \Delta \mathbf{u}^\varepsilon \cdot (\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{a}) dx^\varepsilon = \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \mathbf{b}_0^\varepsilon \cdot (\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{a}) dx^\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

A continuación, estudiaremos la estimación de cada uno de los términos incluidos en esta ecuación. En primer lugar, nótese que el tercer término se anula debido a la fórmula de Green y el hecho de que la divergencia del campo  $\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{a}$  es cero. Ahora, observando el primer término de la ecuación (3.2.9) es sencillo verificar que,

$$\int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \cdot (\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{a}) dx^\varepsilon = \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{u}^\varepsilon|^2 dx^\varepsilon - \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \mathbf{a} dx^\varepsilon.$$

Por un lado, aplicando el Lema 3.1.5 al primer término del segundo miembro de esta igualdad, deducimos que,

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{u}^\varepsilon|^2 dx^\varepsilon &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} |\mathbf{u}^\varepsilon|^2 dx^\varepsilon - \frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{3}{R} \frac{\partial R}{\partial t} |\mathbf{u}^\varepsilon|^2 dx^\varepsilon \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{1}{1 - \varepsilon s_3 \kappa R \cos s_2} \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} |\mathbf{u}^\varepsilon|^2 dx^\varepsilon, \end{aligned}$$

donde teniendo en cuenta el Lema 3.1.1,

$$-\frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{3}{R} \frac{\partial R}{\partial t} |\mathbf{u}^\varepsilon|^2 dx^\varepsilon + \frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{1}{1 - \varepsilon s_3 \kappa R \cos s_2} \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} |\mathbf{u}^\varepsilon|^2 dx^\varepsilon \leq C \left( \varepsilon^2 |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9}^2 + \varepsilon^4 \right).$$

Por otro lado, del segundo término del miembro de la derecha podemos deducir, aplicando nuevamente el Lema 3.1.5, que

$$\begin{aligned} - \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \mathbf{a} dx^\varepsilon &= - \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{\partial (\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{a})}{\partial t} dx^\varepsilon + \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} dx^\varepsilon \\ &= - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{a} dx^\varepsilon + \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{3}{R} \frac{\partial R}{\partial t} (\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{a}) dx^\varepsilon - \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{1}{1 - \varepsilon s_3 \kappa R \cos s_2} \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} (\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{a}) dx^\varepsilon \\ &+ \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} dx^\varepsilon, \end{aligned}$$

de donde aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, (3.2.2)–(3.2.3) y el Lema 3.1.1, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{3}{R} \frac{\partial R}{\partial t} (\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{a}) dx^\varepsilon - \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{1}{1 - \varepsilon s_3 \kappa R \cos s_2} \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} (\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{a}) dx^\varepsilon \\ + \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} dx^\varepsilon \leq C \left( \varepsilon^2 |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9}^2 + \varepsilon^3 \right). \end{aligned}$$

Del segundo término de la ecuación (3.2.9), teniendo en cuenta que  $\operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon = 0$ , aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, el Lema 3.1.3 y (3.2.2), deducimos:

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla \mathbf{u}^\varepsilon) \mathbf{u}^\varepsilon \cdot (\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{a}) dx^\varepsilon &= \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla (\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{a})) \mathbf{u}^\varepsilon \cdot (\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{a}) dx^\varepsilon + \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla \mathbf{a}) \mathbf{u}^\varepsilon (\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{a}) dx^\varepsilon \\ &= \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla \mathbf{a}) \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{u}^\varepsilon dx^\varepsilon - \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla \mathbf{a}) \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{a} dx^\varepsilon \leq |\nabla \mathbf{a}|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} |\mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^4(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} |\mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^4(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \\ &+ |\nabla \mathbf{a}|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} |\mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^4(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} |\mathbf{a}|_{[L^4(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \leq C \sqrt{\varepsilon} \left( |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9}^2 + \varepsilon^2 + |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} + \varepsilon \right). \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de Green al cuarto término de (3.2.9) se obtiene:

$$- \nu \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \Delta \mathbf{u}^\varepsilon \cdot (\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{a}) dx^\varepsilon = \nu \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla \mathbf{u}^\varepsilon) \cdot \nabla (\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{a}) dx^\varepsilon$$

$$= \nu \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|^2 dx^\varepsilon - \nu \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla \mathbf{u}^\varepsilon) \cdot (\nabla \mathbf{a}) dx^\varepsilon.$$

Además, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (3.2.2),

$$-\nu \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla \mathbf{u}^\varepsilon) \cdot (\nabla \mathbf{a}) dx^\varepsilon \leq \nu C |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9}.$$

Por último, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, (3.2.2), el Lema 3.1.1 y (2.1.13) al término del segundo miembro de la ecuación (3.2.9), hallamos que

$$\int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \mathbf{b}_0^\varepsilon \cdot (\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{a}) dx^\varepsilon \leq |\mathbf{b}_0^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \left( |\mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} + |\mathbf{a}|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \right) \leq C\varepsilon \left( \varepsilon |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} + \varepsilon^2 + \varepsilon \right).$$

Por tanto, combinando todas las acotaciones desarrolladas en esta demostración hasta ahora con la ecuación (3.2.9), deducimos lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} |\mathbf{u}^\varepsilon|^2 dx^\varepsilon - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{a} dx^\varepsilon + \nu |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9}^2 \\ & \leq C\varepsilon^2 |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9}^2 + C\varepsilon^2 |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} + C\sqrt{\varepsilon} |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9}^2 + C\sqrt{\varepsilon} |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} \\ & \quad + C\nu |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} + C\varepsilon^{3/2}. \end{aligned}$$

Agrupando los términos correspondientes, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño (recordemos que  $\varepsilon \ll 1$ ) podemos afirmar que  $\lambda := \nu - C\varepsilon^2 - C\sqrt{\varepsilon}$  es estrictamente positivo. Así, deducimos que,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} |\mathbf{u}^\varepsilon|^2 dx^\varepsilon - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{a} dx^\varepsilon + \lambda |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9}^2 \leq C\nu |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} + C\varepsilon^{3/2}.$$

Nótese que podemos considerar que las constantes introducidas en las ecuaciones no dependen de la variable temporal gracias a la regularidad asumida en los datos (densidad de fuerzas (2.1.12), condiciones de contorno (2.1.1) y (2.1.17)). Así, integrando con respecto al tiempo obtenemos que,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |\mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3}^2 - \frac{1}{2} |\mathbf{u}_0^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_0^\varepsilon)]^3}^2 - \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{a} dx^\varepsilon + \int_{\hat{\Omega}_0^\varepsilon} \mathbf{u}_0^\varepsilon \cdot \mathbf{a}|_{t=0} dx^\varepsilon \\ & + \lambda \int_0^t |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9}^2 dt \leq C\nu \int_0^t |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} dt + C\varepsilon^{3/2}, \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

para cada  $t \in [0, T]$ . Por un lado, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que,

$$\int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{a} dx^\varepsilon \leq |\mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} |\mathbf{a}|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3},$$

Por otro lado, es sencillo verificar que,

$$\frac{1}{2} |\mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3}^2 - |\mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} |\mathbf{a}|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |\mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} - \frac{1}{\sqrt{2}} |\mathbf{a}|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \right)^2 - \frac{1}{2} |\mathbf{a}|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3}^2.$$

Entonces, teniendo en cuenta (2.1.10), deducimos de (3.2.10) que

$$\lambda \int_0^t |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9}^2 dt \leq \frac{C}{2} \varepsilon^2 + C \varepsilon^2 + C \nu \int_0^t |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} dt + C \varepsilon^{3/2}.$$

Tomando  $t = T$  y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\|\nabla \mathbf{u}^\varepsilon\|_{L^2(0,T;[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9)}^2 \leq C \|\nabla \mathbf{u}^\varepsilon\|_{L^2(0,T;[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9)} + C \varepsilon^{3/2},$$

que es equivalente a

$$\left( \|\nabla \mathbf{u}^\varepsilon\|_{L^2(0,T;[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9)} - \frac{C}{2} \right)^2 \leq \frac{C^2}{4} + C \varepsilon^{3/2},$$

y así, se tiene

$$\|\nabla \mathbf{u}^\varepsilon\|_{L^2(0,T;[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9)} \leq C.$$

Además, como consecuencia del Lema 3.1.1, concluimos que,

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{L^2(0,T;[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3)} \leq C \varepsilon.$$

□

**Teorema 3.2.3.** *Asumiendo las hipótesis del Teorema 3.2.2, supongamos que la solución del Problema 2.1.2 es suficientemente regular de tal forma que se verifica:*

$$\|(\nabla \mathbf{u}^\varepsilon) \mathbf{u}^\varepsilon\|_{L^2(0,T;[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3)} \leq C. \quad (3.2.11)$$

Entonces, existe una constante  $C > 0$  tal que,

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3)} \leq C, \quad (3.2.12)$$

$$\|p^\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon))} \leq \frac{C}{\varepsilon}. \quad (3.2.13)$$

**Observación 3.2.4.** *La hipótesis (3.2.11) es equivalente a asumir mayor regularidad para la solución del Problema 2.1.2. Por ejemplo, si  $\mathbf{u}^\varepsilon \in L^2(0,T;[L^\infty(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3)$  (acotada por una constante independiente de  $\varepsilon$ ), entonces por (3.2.8) deducimos (3.2.11).*

*Demostración.* Consideremos una función  $\mathbf{a}$  solución del problema (3.2.1), multipliquemos escalarmente la ecuación (1.1.3) por  $\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{a})$  e integremos sobre el dominio  $\hat{\Omega}_t^\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{a}) dx^\varepsilon + \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla \mathbf{u}^\varepsilon) \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{a}) dx^\varepsilon + \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{1}{\rho_0} \nabla p^\varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{a}) dx^\varepsilon \\ - \nu \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \Delta \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{a}) dx^\varepsilon = \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \mathbf{b}_0^\varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{a}) dx^\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

A continuación, estudiaremos las estimaciones de cada uno de los términos incluidos en esta ecuación. En primer lugar, nótese que el tercer término se anula debido a la fórmula de Green y el hecho de que la divergencia de  $\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{a})$  es cero. Del primer término de la ecuación (3.2.14) se tiene

$$\int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{a}) dx^\varepsilon = \left| \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \right|_{L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)}^2 - \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} dx^\varepsilon,$$

donde, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y utilizando (3.2.3), deducimos que,

$$- \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} dx^\varepsilon \leq C_\varepsilon \left| \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3}.$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz al segundo término de la ecuación (3.2.14) obtenemos que,

$$\int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla \mathbf{u}^\varepsilon) \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{a}) dx^\varepsilon \leq |(\nabla \mathbf{u}^\varepsilon) \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \left| \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{a}) \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3}.$$

Entonces, utilizando (3.2.3) tenemos,

$$\int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla \mathbf{u}^\varepsilon) \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{a}) dx^\varepsilon \leq C |(\nabla \mathbf{u}^\varepsilon) \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \left( \left| \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} + \varepsilon \right).$$

Consideremos el cuarto término de la igualdad (3.2.14). Utilizando la fórmula de Green, se tiene que

$$\begin{aligned} - \nu \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \Delta \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{a}) dx^\varepsilon &= \nu \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \nabla \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla \left( \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{a}) \right) dx^\varepsilon \\ &= \frac{\nu}{2} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} (|\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|^2) dx^\varepsilon - \nu \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \nabla \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla \left( \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \right) dx^\varepsilon. \end{aligned}$$

Por un lado, por el Lema 3.1.5,

$$\int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} (|\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|^2) dx^\varepsilon = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|^2 dx^\varepsilon - \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{3}{R} \frac{\partial R}{\partial t} |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|^2 dx^\varepsilon$$

$$+ \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{1}{1 - \varepsilon s_3 \kappa R \cos s_2} \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|^2 dx^\varepsilon,$$

donde,

$$- \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{3}{R} \frac{\partial R}{\partial t} |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|^2 dx^\varepsilon + \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{1}{1 - \varepsilon s_3 \kappa R \cos s_2} \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|^2 dx^\varepsilon \leq C |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9}^2.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la acotación (3.2.4) obtenemos que

$$-\nu \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \nabla \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla \left( \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \right) dx^\varepsilon \leq C |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9}.$$

Por último, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, (2.1.13) y (3.2.3) al término del miembro de la derecha de (3.2.14), nos conduce a

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \mathbf{b}_0^\varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{a}) dx^\varepsilon &\leq |\mathbf{b}_0^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \left( \left| \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} + \left| \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \right) \\ &\leq C\varepsilon \left| \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} + C\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Por tanto, combinando todas las acotaciones deducidas de los términos de la ecuación (3.2.14) obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3}^2 + \frac{\nu}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|^2 dx^\varepsilon &\leq C |(\nabla \mathbf{u}^\varepsilon) \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \left( \left| \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} + \varepsilon \right) + C \left| \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \\ &\quad + C |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} + C\varepsilon |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9}^2 + C\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Integramos con respecto a la variable temporal y utilizamos (3.2.8), para hallar que

$$\begin{aligned} &\int_0^t \left| \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3}^2 dt + \frac{\nu}{2} |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9}^2 - \frac{\nu}{2} |\nabla \mathbf{u}_0^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9}^2 \\ &\leq C \int_0^t |(\nabla \mathbf{u}^\varepsilon) \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \left( \left| \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} + \varepsilon \right) dt + C\varepsilon \int_0^t \left| \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} dt \\ &\quad + \int_0^t |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} dt + C\varepsilon^2. \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, (3.2.8) y (2.1.11), se deduce

$$\int_0^t \left| \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3}^2 dt \leq C \int_0^t |(\nabla \mathbf{u}^\varepsilon) \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \left( \left| \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} + \varepsilon \right) dt$$

$$+ C_\varepsilon \int_0^t \left\| \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} dt + C.$$

Tomando  $t = T$ , aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (3.2.11) concluimos que,

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3)}^2 \leq C \left\| \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3)} + C,$$

la cual es equivalente a,

$$\left( \left\| \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3)} - \frac{C}{2} \right)^2 \leq C + \frac{C^2}{4},$$

y así,

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3)} \leq C.$$

Ahora, consideremos una función  $\mathbf{b}$  solución del problema (3.2.5), multipliquemos escalarmente por la ecuación (1.1.3) e integremos sobre el dominio  $\hat{\Omega}_t^\varepsilon$ . Entonces, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \mathbf{b} dx^\varepsilon + \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla \mathbf{u}^\varepsilon) \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{b} dx^\varepsilon + \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{1}{\rho_0} \nabla p^\varepsilon \cdot \mathbf{b} dx^\varepsilon \\ - \nu \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \Delta \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{b} dx^\varepsilon = \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \mathbf{b}_0^\varepsilon \cdot \mathbf{b} dx^\varepsilon. \end{aligned}$$

Utilizando la fórmula de Green y la desigualdad de Cauchy-Schwarz nos conduce a,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0} |p^\varepsilon|_{L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)}^2 &= \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \mathbf{b} dx^\varepsilon + \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla \mathbf{u}^\varepsilon) \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{b} dx^\varepsilon + \nu \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \nabla \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{b} dx^\varepsilon - \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \mathbf{b}_0^\varepsilon \cdot \mathbf{b} dx^\varepsilon, \\ &\leq C \left\| \frac{\partial \mathbf{u}^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \|\mathbf{b}\|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} + C \|\nabla \mathbf{u}^\varepsilon\|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} \|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{[L^4(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \|\mathbf{b}\|_{[L^4(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \\ &\quad + C\nu \|\nabla \mathbf{u}^\varepsilon\|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} \|\nabla \mathbf{b}\|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} + \|\mathbf{b}_0^\varepsilon\|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \|\mathbf{b}\|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3}. \end{aligned}$$

Ahora integrando sobre  $[0, T]$ , utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, Lema 3.1.3 y las acotaciones (3.2.6), (3.2.8), (3.2.12) concluimos que,

$$\|p^\varepsilon\|_{L^2(0,T;[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3)}^2 \leq \frac{C}{\varepsilon} \|p^\varepsilon\|_{L^2(0,T;[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3)},$$

por tanto,

$$\|p^\varepsilon\|_{L^2(0,T;[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3)} \leq \frac{C}{\varepsilon},$$

completando la demostración del teorema.  $\square$

**Observación 3.2.5.** Nótese que de (3.2.15) y utilizando (3.2.8), (3.2.12), se puede probar que,

$$|\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} \leq C,$$

para todo  $t \in [0, T]$  y, por el Lema 3.1.1,

$$|\mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \leq C\varepsilon,$$

para todo  $t \in [0, T]$ .

Una vez que hemos obtenido las estimaciones *a priori* de las incógnitas, estamos en condiciones de presentar estimaciones del error entre la aproximación asintótica (2.3.28)–(2.3.29) y la solución exacta  $(\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon)$  del Problema 2.1.2. Denotemos a estos errores como,

$$\mathbf{R}^\varepsilon := \mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon), \quad r^\varepsilon := p^\varepsilon - \tilde{p}(\varepsilon).$$

De nuevo, cometeremos un abuso de notación, al denotar de la misma forma a las funciones definidas en el dominio  $\hat{\Omega}_t^\varepsilon$  correspondientes a la aproximación asintótica (2.3.28)–(2.3.29), que está definida en  $\Omega$

Sustituyendo en las ecuaciones del Problema 2.1.2 y teniendo en cuenta las ecuaciones verificadas por la aproximación (2.3.34), (2.3.36), (2.3.40) y (2.3.45), obtenemos que,

$$\frac{\partial \mathbf{R}^\varepsilon}{\partial t} + (\nabla \mathbf{R}^\varepsilon) \mathbf{u}^\varepsilon + \frac{1}{\rho_0} \nabla r^\varepsilon - \nu \Delta \mathbf{R}^\varepsilon - (\nabla \tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon)) \mathbf{R}^\varepsilon = -\boldsymbol{\alpha}^\varepsilon \text{ en } \hat{\Omega}_t^\varepsilon, \quad (3.2.16)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{R}^\varepsilon = -\beta^\varepsilon \text{ en } \hat{\Omega}_t^\varepsilon, \quad (3.2.17)$$

con las condiciones de contorno,

$$\mathbf{R}^\varepsilon = \mathbf{0} \text{ en } \Sigma_l^\varepsilon, \quad \mathbf{R}^\varepsilon = -\boldsymbol{\delta}_1^\varepsilon \text{ en } \Sigma_1^\varepsilon \text{ y } \mathbf{R}^\varepsilon = -\boldsymbol{\delta}_2^\varepsilon \text{ en } \Sigma_2^\varepsilon,$$

y en el instante inicial,

$$\mathbf{R}^\varepsilon =: \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \text{ en } \hat{\Omega}_0^\varepsilon.$$

Nótese, que por (2.3.47) y (2.3.48) se tiene que,

$$|\mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_0^\varepsilon)]^3} = |\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_0^\varepsilon)]^3} \leq C\varepsilon^2, \quad (3.2.18)$$

$$|\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_0^\varepsilon)]^9} = |\nabla \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_0^\varepsilon)]^9} \leq C\varepsilon. \quad (3.2.19)$$

Procedamos entonces a construir los problemas de las funciones test que utilizaremos en los siguientes teoremas. Sea una función  $\mathbf{c}$  solución del problema:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{c} = -\beta^\varepsilon \text{ en } \hat{\Omega}_t^\varepsilon, \\ \mathbf{c} = \mathbf{0} \text{ en } \Sigma_l^\varepsilon, \\ \mathbf{c} = -\boldsymbol{\delta}_\alpha^\varepsilon \text{ en } \Sigma_\alpha^\varepsilon. \end{cases} \quad (3.2.20)$$



Nótese que la condición de compatibilidad de este problema se verifica ya que coincide con (2.3.49). Entonces, podemos aplicar el Lema 3.1.4 que, por un lado, teniendo en cuenta (2.3.38) y (2.3.43) implica que

$$\|\mathbf{c}\|_{[H^1(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \leq C \left( \frac{1}{\varepsilon} |\beta^\varepsilon|_{L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left( |\delta_1^\varepsilon|_{[H^{1/2}(\Sigma_1^\varepsilon)]^3} + |\delta_2^\varepsilon|_{[H^{1/2}(\Sigma_2^\varepsilon)]^3} \right) \right) \leq C\varepsilon^{3/2}. \quad (3.2.21)$$

Por otro lado, por (2.3.39), (2.3.43) y (2.3.44), se tiene que,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} \right\|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} &\leq C\varepsilon \left( \frac{1}{\varepsilon} \left\| \frac{\partial \beta^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left( |\delta_1^\varepsilon|_{[H^{1/2}(\Sigma_1^\varepsilon)]^3} + \left\| \frac{\partial \delta_1^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{[H^{1/2}(\Sigma_1^\varepsilon)]^3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + |\delta_2^\varepsilon|_{[H^{1/2}(\Sigma_2^\varepsilon)]^3} + \left\| \frac{\partial \delta_2^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{[H^{1/2}(\Sigma_2^\varepsilon)]^3} \right) \right) \leq C\varepsilon^{5/2}. \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} \right\|_{[H^1(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} &\leq C \left( \frac{1}{\varepsilon} \left\| \frac{\partial \beta^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left( |\delta_1^\varepsilon|_{[H^{1/2}(\Sigma_1^\varepsilon)]^3} + \left\| \frac{\partial \delta_1^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{[H^{1/2}(\Sigma_1^\varepsilon)]^3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + |\delta_2^\varepsilon|_{[H^{1/2}(\Sigma_2^\varepsilon)]^3} + \left\| \frac{\partial \delta_2^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{[H^{1/2}(\Sigma_2^\varepsilon)]^3} \right) \right) \leq C\varepsilon^{3/2}. \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

Además, consideremos una función  $\mathbf{d}$  solución del siguiente problema,

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{d} = r^\varepsilon & \text{en } \hat{\Omega}_t^\varepsilon, \\ \mathbf{d} = \mathbf{0} & \text{en } \partial \hat{\Omega}_t^\varepsilon, \end{cases} \quad (3.2.24)$$

por tanto, como consecuencia del Lema 3.1.4, se tiene que,

$$\|\mathbf{d}\|_{[H^1(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \leq \frac{C}{\varepsilon} |r^\varepsilon|_{L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)}. \quad (3.2.25)$$

**Observación 3.2.6.** Para poder aplicar el Lema 3.1.4 al problema (3.2.24), debe verificarse la condición de compatibilidad que viene dada por,

$$\int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} r^\varepsilon dx^\varepsilon = 0.$$

Para que esta igualdad se verifique ajustaremos las constantes de los correctores de la presión caracterizados en el Capítulo 2 de la forma que se anunciaba en la Observación 2.3.3.

**Teorema 3.2.7.** Asumiendo las hipótesis del Teorema 3.2.2, se verifican las siguientes acotaciones:

$$\|\mathbf{R}^\varepsilon\|_{L^2(0,T;[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3)} \leq C\varepsilon^{5/2}, \quad (3.2.26)$$

$$\|\nabla \mathbf{R}^\varepsilon\|_{L^2(0,T;[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9)} \leq C\varepsilon^{3/2}. \quad (3.2.27)$$

*Demostración.* Consideremos una función  $\mathbf{c}$  solución del problema (3.2.20), multipliquemos escalarmente la ecuación (3.2.16) por  $(\mathbf{R}^\varepsilon - \mathbf{c})$  e integremos sobre el dominio  $\hat{\Omega}_t^\varepsilon$ . De esta forma obtenemos que,

$$\begin{aligned} & \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{R}^\varepsilon}{\partial t} \cdot (\mathbf{R}^\varepsilon - \mathbf{c}) dx^\varepsilon + \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla \mathbf{R}^\varepsilon) \mathbf{u}^\varepsilon \cdot (\mathbf{R}^\varepsilon - \mathbf{c}) dx^\varepsilon + \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{1}{\rho_0} \nabla r^\varepsilon \cdot (\mathbf{R}^\varepsilon - \mathbf{c}) dx^\varepsilon \\ & - \nu \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \Delta \mathbf{R}^\varepsilon \cdot (\mathbf{R}^\varepsilon - \mathbf{c}) dx^\varepsilon - \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla \tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon)) \mathbf{R}^\varepsilon \cdot (\mathbf{R}^\varepsilon - \mathbf{c}) dx^\varepsilon \\ & = - \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon \cdot (\mathbf{R}^\varepsilon - \mathbf{c}) dx^\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

A continuación, estudiaremos las estimaciones de cada uno de los términos incluidos en esta ecuación. En primer lugar, nótese que el tercer término de la ecuación se anula debido a la fórmula de Green y el hecho de que la divergencia del campo  $\mathbf{R}^\varepsilon - \mathbf{c}$  es igual a cero. Del primer término de la ecuación (3.2.28) es sencillo ver que,

$$\int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{R}^\varepsilon}{\partial t} \cdot (\mathbf{R}^\varepsilon - \mathbf{c}) dx^\varepsilon = \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{R}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \mathbf{R}^\varepsilon dx^\varepsilon - \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{R}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \mathbf{c} dx^\varepsilon. \quad (3.2.29)$$

Por un lado, aplicando el Lema 3.1.5 al primer término del segundo miembro de (3.2.29), se deduce que,

$$\begin{aligned} & \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{R}^\varepsilon|^2 dx^\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} |\mathbf{R}^\varepsilon|^2 dx^\varepsilon - \frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{3}{R} \frac{\partial R}{\partial t} |\mathbf{R}^\varepsilon|^2 dx^\varepsilon \\ & + \frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{1}{1 - \varepsilon s_3 \kappa R \cos s_2} \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} |\mathbf{R}^\varepsilon|^2 dx^\varepsilon, \end{aligned}$$

donde aplicando el Lema 3.1.1, se tiene que

$$-\frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{3}{R} \frac{\partial R}{\partial t} |\mathbf{R}^\varepsilon|^2 dx^\varepsilon + \frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{1}{1 - \varepsilon s_3 \kappa R \cos s_2} \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} |\mathbf{R}^\varepsilon|^2 dx^\varepsilon \leq C \varepsilon^2 |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9}^2.$$

Por otro lado, aplicando el Lema 3.1.5 al segundo término del segundo miembro de la ecuación (3.2.29), tenemos que

$$\begin{aligned} & - \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{R}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \mathbf{c} dx^\varepsilon = - \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{\partial (\mathbf{R}^\varepsilon \cdot \mathbf{c})}{\partial t} dx^\varepsilon + \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \mathbf{R}^\varepsilon \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} dx^\varepsilon \\ & = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \mathbf{R}^\varepsilon \cdot \mathbf{c} dx^\varepsilon + \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{3}{R} \frac{\partial R}{\partial t} (\mathbf{R}^\varepsilon \cdot \mathbf{c}) dx^\varepsilon - \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{1}{1 - \varepsilon s_3 \kappa R \cos s_2} \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} (\mathbf{R}^\varepsilon \cdot \mathbf{c}) dx^\varepsilon \\ & + \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \mathbf{R}^\varepsilon \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} dx^\varepsilon, \end{aligned}$$

donde, utilizando el Lema 3.1.1 y (3.2.21)–(3.2.22),

$$\int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{3}{R} \frac{\partial R}{\partial t} (\mathbf{R}^\varepsilon \cdot \mathbf{c}) dx^\varepsilon - \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{1}{1 - \varepsilon s_3 \kappa R \cos s_2} \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} (\mathbf{R}^\varepsilon \cdot \mathbf{c}) dx^\varepsilon + \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \mathbf{R}^\varepsilon \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} dx^\varepsilon$$

$$\begin{aligned}
&\leq C\varepsilon^2 |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} |\nabla \mathbf{c}|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} + C\varepsilon |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} \left| \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \\
&\leq C\varepsilon^{7/2} |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9}.
\end{aligned}$$

Volviendo a la ecuación (3.2.28), tomamos el segundo término y teniendo en cuenta que  $\operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon = 0$ , aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, el Lema 3.1.3 y (3.2.21), deducimos que

$$\begin{aligned}
\int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla \mathbf{R}^\varepsilon) \mathbf{u}^\varepsilon \cdot (\mathbf{R}^\varepsilon - \mathbf{c}) dx^\varepsilon &= \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla (\mathbf{R}^\varepsilon - \mathbf{c})) \mathbf{u}^\varepsilon \cdot (\mathbf{R}^\varepsilon - \mathbf{c}) dx^\varepsilon + \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla \mathbf{c}) \mathbf{u}^\varepsilon \cdot (\mathbf{R}^\varepsilon - \mathbf{c}) dx^\varepsilon \\
&= \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla \mathbf{c}) \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{R}^\varepsilon dx^\varepsilon - \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla \mathbf{c}) \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{c} dx^\varepsilon \leq |\nabla \mathbf{c}|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} |\mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^4(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} |\mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^4(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \\
&\quad + |\nabla \mathbf{c}|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} |\mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^4(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} |\mathbf{c}|_{[L^4(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \\
&\leq C\varepsilon^2 \left( |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} + \varepsilon \right) |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} + C\varepsilon^{7/2} \left( |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} + \varepsilon \right).
\end{aligned}$$

Del cuarto término de la ecuación (3.2.28) podemos deducir aplicando la Fórmula de Green que

$$\begin{aligned}
-\nu \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \Delta \mathbf{R}^\varepsilon \cdot (\mathbf{R}^\varepsilon - \mathbf{c}) dx^\varepsilon &= \nu \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla \mathbf{R}^\varepsilon) \cdot \nabla (\mathbf{R}^\varepsilon - \mathbf{c}) dx^\varepsilon \\
&= \nu \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|^2 dx^\varepsilon - \nu \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla \mathbf{R}^\varepsilon) \cdot (\nabla \mathbf{c}) dx^\varepsilon,
\end{aligned}$$

donde, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (3.2.21), se tiene

$$-\nu \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla \mathbf{R}^\varepsilon) \cdot (\nabla \mathbf{c}) dx^\varepsilon \leq \nu |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} |\nabla \mathbf{c}|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} \leq C\varepsilon^{3/2} |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9}.$$

Si ahora estudiamos el último término del miembro de la izquierda de la ecuación (3.2.28) y aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la acotación  $|\nabla \tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon)|_{[L^\infty(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} \leq \frac{C}{\varepsilon}$  (véase (2.3.33)), (3.2.21) y el Lema 3.1.1, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla \tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon)) \mathbf{R}^\varepsilon \cdot (\mathbf{R}^\varepsilon - \mathbf{c}) dx^\varepsilon &\leq C |\nabla \tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon)|_{[L^\infty(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} |\mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3}^2 \\
&\quad + C |\nabla \tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon)|_{[L^\infty(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} |\mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} |\mathbf{c}|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \\
&\leq C\varepsilon |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9}^2 + C\varepsilon^{5/2} |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9}.
\end{aligned}$$

Por último, teniendo en cuenta la desigualdad de Cauchy-Schwarz, (2.3.35), (3.2.21) y el Lema 3.1.1 en el término del segundo miembro de (3.2.28), obtenemos que

$$-\int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon \cdot (\mathbf{R}^\varepsilon - \mathbf{c}) dx^\varepsilon = -\int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon \cdot \mathbf{R} dx^\varepsilon + \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon \cdot \mathbf{c} dx^\varepsilon$$

$$\leq C\varepsilon^3 |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} + C\varepsilon^{9/2}.$$

Por tanto, combinando las acotaciones de los términos de la ecuación (3.2.28) deducidas en esta demostración nos conduce a,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} |\mathbf{R}^\varepsilon|^2 dx^\varepsilon - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \mathbf{R}^\varepsilon \cdot \mathbf{c} dx^\varepsilon + \nu |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9}^2 \\ & \leq C\nu\varepsilon^{3/2} |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} + \varepsilon^2 |\nabla \mathbf{u}|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} \\ & \quad + C\varepsilon |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9}^2 + C\varepsilon^{7/2} |\nabla \mathbf{u}|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} + C\varepsilon^{9/2}. \end{aligned}$$

Agrupando los términos correspondientes, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño (recordemos que  $\varepsilon \ll 1$ ) podemos afirmar que  $\lambda := \nu - C\varepsilon$  es estrictamente positivo. Integrando con respecto al tiempo, deducimos que,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |\mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3}^2 - \frac{1}{2} |\mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_0^\varepsilon)]^3}^2 - \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \mathbf{R}^\varepsilon \cdot \mathbf{c} dx^\varepsilon + \int_{\hat{\Omega}_0^\varepsilon} \mathbf{R}^\varepsilon \cdot \mathbf{c}|_{t=0} dx^\varepsilon + \lambda \int_0^t |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9}^2 dt \\ & \leq \int_0^t \left( C\varepsilon^{3/2} |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} + C\varepsilon^2 |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} \right. \\ & \quad \left. + C\varepsilon^{7/2} |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} \right) dt + C\varepsilon^{9/2}. \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

Por un lado, se tiene que,

$$- |\mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} |\mathbf{c}|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \leq - \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \mathbf{R}^\varepsilon \cdot \mathbf{c} dx^\varepsilon,$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Por otro lado, se puede comprobar que,

$$\frac{1}{2} |\mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3}^2 - |\mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} |\mathbf{c}|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |\mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} - \frac{1}{\sqrt{2}} |\mathbf{c}|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \right)^2 - \frac{1}{2} |\mathbf{c}|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3}^2.$$

Entonces, la expresión (3.2.30) nos conduce a,

$$\begin{aligned} & \lambda \int_0^t |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9}^2 dt \leq \int_0^t \left( C\nu\varepsilon^{3/2} |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} + \varepsilon^2 |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} \right. \\ & \quad \left. + C\varepsilon^{7/2} |\nabla \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} \right) dt + |\mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_0^\varepsilon)]^3} |\mathbf{c}|_{[L^2(\hat{\Omega}_0^\varepsilon)]^3} + \frac{1}{2} |\mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_0^\varepsilon)]^3}^2 \\ & \quad + \frac{1}{2} |\mathbf{c}|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3}^2 + C\varepsilon^{9/2}. \end{aligned}$$

Tomamos  $t = T$ . Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, (3.2.18), (3.2.8) y (3.2.21), deducimos que,

$$\|\nabla \mathbf{R}^\varepsilon\|_{L^2(0,T;[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9)}^2 \leq C\varepsilon^{3/2} \|\nabla \mathbf{R}^\varepsilon\|_{L^2(0,T;[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9)} + C\varepsilon^{7/2},$$

que es equivalente a,

$$\left( \|\nabla \mathbf{R}^\varepsilon\|_{L^2(0,T;[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9)} - \frac{C}{2}\varepsilon^{3/2} \right)^2 \leq \frac{C^2}{4}\varepsilon^3 + C\varepsilon^{7/2}$$

y así, concluimos

$$\|\nabla \mathbf{R}^\varepsilon\|_{L^2(0,T;[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9)} \leq C\varepsilon^{3/2}.$$

Como consecuencia del Lema 3.1.1 se deduce que,

$$\|\mathbf{R}^\varepsilon\|_{L^2(0,T;[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3)} \leq C\varepsilon^{5/2}.$$

□

**Teorema 3.2.8.** *Asumamos las hipótesis del Teorema 3.2.3y que, además, se verifica:*

$$\|(\nabla \mathbf{R}^\varepsilon) \mathbf{u}^\varepsilon\|_{L^2(0,T;[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3)} \leq C\varepsilon^{3/2}. \quad (3.2.31)$$

*Entonces, se verifican las siguientes acotaciones:*

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{R}^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3)} \leq C\varepsilon, \quad (3.2.32)$$

$$\|\mathbf{r}^\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon))} \leq C\sqrt{\varepsilon}. \quad (3.2.33)$$

**Observación 3.2.9.** *Nuevamente, la hipótesis (3.2.31) es equivalente a admitir mayor regularidad para la solución del problema (3.2.16)–(3.2.17) (véase la Observación 3.2.4). Por ejemplo, si  $\mathbf{u}^\varepsilon \in L^2(0,T;L^\infty(\hat{\Omega}_t^\varepsilon))$  (acotada por una constante independiente de  $\varepsilon$ ) entonces por (3.2.27) deducimos (3.2.31).*

*Demostración.* Consideremos una función  $\mathbf{c}$  solución del problema (3.2.20), multipliquemos escalarmente la ecuación (3.2.16) por  $\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{R}^\varepsilon - \mathbf{c})$  e integremos sobre el dominio  $\hat{\Omega}_t^\varepsilon$ . De esta forma, eliminando el término de la presión como resultado de aplicar la fórmula de Green, obtenemos que,

$$\begin{aligned} & \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{R}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{R}^\varepsilon - \mathbf{c}) dx^\varepsilon + \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla \mathbf{R}^\varepsilon) \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{R}^\varepsilon - \mathbf{c}) dx^\varepsilon - \nu \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \Delta \mathbf{R}^\varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{R}^\varepsilon - \mathbf{c}) dx^\varepsilon \\ & - \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \nabla \tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon) \mathbf{R}^\varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{R}^\varepsilon - \mathbf{c}) dx^\varepsilon = - \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{R}^\varepsilon - \mathbf{c}) dx^\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

Como en los teoremas anteriores, estudiaremos cada término por separado. Del primer término de (3.2.34), deducimos que,

$$\int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{R}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{R}^\varepsilon - \mathbf{c}) dx^\varepsilon = \left| \frac{\partial \mathbf{R}^\varepsilon}{\partial t} \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3}^2 - \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{R}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} dx^\varepsilon,$$

donde, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y utilizando (3.2.22),

$$-\int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{R}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} dx^\varepsilon \leq \left| \frac{\partial \mathbf{R}^\varepsilon}{\partial t} \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \left| \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \leq C\varepsilon^{5/2} \left| \frac{\partial \mathbf{R}^\varepsilon}{\partial t} \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3}.$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (3.2.22), al segundo término de la ecuación (3.2.34), hallamos que,

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla \mathbf{R}^\varepsilon) \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{R}^\varepsilon - \mathbf{c}) dx^\varepsilon &\leq C |(\nabla \mathbf{R}^\varepsilon) \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \left| \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{R}^\varepsilon - \mathbf{c}) \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \\ &\leq C |(\nabla \mathbf{R}^\varepsilon) \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \left( \left| \frac{\partial \mathbf{R}^\varepsilon}{\partial t} \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} + \varepsilon^{5/2} \right). \end{aligned}$$

Del tercer término de la ecuación (3.2.34), aplicando la fórmula de Green, deducimos que

$$\begin{aligned} -\nu \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \Delta \mathbf{R}^\varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{R}^\varepsilon - \mathbf{c}) dx^\varepsilon &= \nu \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla \mathbf{R}^\varepsilon) \cdot \nabla \left( \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{R}^\varepsilon - \mathbf{c}) \right) dx^\varepsilon \\ &= \frac{\nu}{2} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} (|\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|^2) dx^\varepsilon - \nu \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla \mathbf{R}^\varepsilon) \cdot \left( \nabla \left( \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} \right) \right) dx^\varepsilon. \end{aligned}$$

Por un lado, por el Lema 3.1.5,

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} (|\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|^2) dx^\varepsilon &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|^2 dx^\varepsilon - \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{3}{R} \frac{\partial R}{\partial t} |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|^2 dx^\varepsilon \\ &\quad - \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{1}{1 - \varepsilon s_3 \kappa R \cos s_2} \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|^2 dx^\varepsilon, \end{aligned}$$

donde,

$$-\int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{3}{R} \frac{\partial R}{\partial t} |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|^2 dx^\varepsilon - \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{1}{1 - \varepsilon s_3 \kappa R \cos s_2} \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|^2 dx^\varepsilon \leq C |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9}^2.$$

Por otro lado, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (3.2.23), se tiene que

$$-\nu \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla \mathbf{R}^\varepsilon) \cdot \left( \nabla \left( \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} \right) \right) dx^\varepsilon \leq C\varepsilon^{3/2} |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9}.$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, (2.3.33), Lema 3.1.1 y (3.2.22) al cuarto término de (3.2.34), se tiene

$$\int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla \tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon)) \mathbf{R}^\varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{R}^\varepsilon - \mathbf{c}) dx^\varepsilon \leq |\nabla \tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon)|_{[L^\infty(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} |\mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \left| \frac{\partial \mathbf{R}^\varepsilon}{\partial t} \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3}$$

$$\begin{aligned}
& + |\nabla \tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon)|_{[L^\infty(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} |\mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \left| \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \\
& \leq C |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} \left| \frac{\partial \mathbf{R}^\varepsilon}{\partial t} \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} + C \varepsilon^{5/2} |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9}.
\end{aligned}$$

Por último, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (3.2.22), deducimos del término del segundo miembro de (3.2.34) que,

$$\begin{aligned}
& - \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{R}^\varepsilon - \mathbf{c}) dx^\varepsilon \leq |\boldsymbol{\alpha}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \left( \left| \frac{\partial \mathbf{R}^\varepsilon}{\partial t} \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} + \left| \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \right) \\
& \leq C \varepsilon^2 \left| \frac{\partial \mathbf{R}^\varepsilon}{\partial t} \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} + C \varepsilon^{9/2}.
\end{aligned}$$

Combinando las acotaciones deducidas en esta demostración de los términos de la ecuación (3.2.34), obtenemos que,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\partial \mathbf{R}^\varepsilon}{\partial t} \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3}^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left( |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9}^2 \right) \leq C |(\nabla \mathbf{R}^\varepsilon) \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \left( \left| \frac{\partial \mathbf{R}^\varepsilon}{\partial t} \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} + \varepsilon^{5/2} \right) \\
& + C \varepsilon^{5/2} |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} + C |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} \left| \frac{\partial \mathbf{R}^\varepsilon}{\partial t} \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} + C \varepsilon^2 \left| \frac{\partial \mathbf{R}^\varepsilon}{\partial t} \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \\
& + C |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9}^2 + C \varepsilon^{9/2}.
\end{aligned}$$

Integrando sobre  $[0, T]$ , aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y teniendo en cuenta (3.2.19), (3.2.26), (3.2.27) y (3.2.31), nos conduce a,

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{R}^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; [L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3)}^2 \leq C \varepsilon^{3/2} \left\| \frac{\partial \mathbf{R}^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; [L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3)} + C \varepsilon^2,$$

que es equivalente a,

$$\left( \left\| \frac{\partial \mathbf{R}^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; [L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3)} - \frac{C}{2} \varepsilon^{3/2} \right)^2 \leq \frac{C^2}{4} \varepsilon^3 + C \varepsilon^2$$

y así, concluimos que,

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{R}^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; [L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3)} \leq C \varepsilon.$$

Solo queda estudiar la estimación del error del término de la presión. Para esto, multipliquemos escalarmente la ecuación (3.2.16) por una función  $\mathbf{d}$  solución del problema (3.2.24), para obtener que

$$\int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{R}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \mathbf{d} dx^\varepsilon + \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla \mathbf{R}^\varepsilon) \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{d} dx^\varepsilon - \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla \tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon)) \mathbf{R}^\varepsilon \cdot \mathbf{d} dx^\varepsilon$$

$$+ \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{1}{\rho_0} \nabla r^\varepsilon \cdot \mathbf{d} \, dx^\varepsilon - \nu \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \Delta \mathbf{R}^\varepsilon \cdot \mathbf{d} \, dx^\varepsilon = - \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon \cdot \mathbf{d} \, dx^\varepsilon.$$

Por tanto, aplicando la fórmula de Green, la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (2.3.33) se deduce que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0} |r^\varepsilon|_{L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)}^2 &= \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{R}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \mathbf{d} \, dx^\varepsilon + \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla \mathbf{R}^\varepsilon) \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{d} \, dx^\varepsilon - \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} (\nabla \tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon)) \mathbf{R}^\varepsilon \cdot \mathbf{d} \, dx^\varepsilon \\ &\quad - \nu \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \Delta \mathbf{R}^\varepsilon \cdot \mathbf{d} \, dx^\varepsilon + \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} \boldsymbol{\alpha}^\varepsilon \cdot \mathbf{d} \, dx^\varepsilon \\ &\leq \left| \frac{\partial \mathbf{R}^\varepsilon}{\partial t} \right|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} |\mathbf{d}|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} + |(\nabla \mathbf{R}^\varepsilon) \mathbf{u}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} |\mathbf{d}|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} \\ &\quad + \varepsilon^{-1} |\mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} |\mathbf{d}|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} + \nu |\nabla \mathbf{R}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} |\nabla \mathbf{d}|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^9} \\ &\quad + |\boldsymbol{\alpha}^\varepsilon|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3} |\mathbf{d}|_{[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3}. \end{aligned}$$

Ahora integrando sobre  $[0, T]$ , aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y utilizando (3.2.25), (3.2.26) y (3.2.32), deducimos que

$$\|r^\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon))}^2 \leq C\sqrt{\varepsilon} \|r^\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon))},$$

y así,

$$\|r^\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon))} \leq C\sqrt{\varepsilon},$$

completando la demostración del teorema.  $\square$

Dado que el dominio  $\hat{\Omega}_t^\varepsilon$  depende del parámetro  $\varepsilon$  es necesario realizar una comparación entre las estimaciones del error que acabamos de obtener y el volumen del dominio. Con este fin, concluimos la justificación matemática de la aproximación asintótica propuesta (2.3.28)–(2.3.29) para el Problema 2.1.2 con el siguiente corolario donde también presentamos estimaciones del error relativo. Denotemos al volumen del dominio  $\hat{\Omega}_t^\varepsilon$  como sigue,

$$|\hat{\Omega}_t^\varepsilon| := \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} dx^\varepsilon.$$

**Corolario 3.2.10.** *Asumiendo las hipótesis del Teorema 3.2.2, obtenemos:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{|\hat{\Omega}_t^\varepsilon|}} \|\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon)\|_{L^2(0,T;[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3)} &\leq C\varepsilon\sqrt{\varepsilon}, \\ \frac{\|\mathbf{u}^\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon)\|_{L^2(0,T;[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3)}}{\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{L^2(0,T;[L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon)]^3)}} &\leq C\varepsilon\sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$



Si además, asumimos las hipótesis del Teorema 3.2.3, se deducen:

$$\frac{1}{\sqrt{|\hat{\Omega}_t^\varepsilon|}} \|p^\varepsilon - \tilde{p}(\varepsilon)\|_{L^2(0,T;L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon))} \leq C\varepsilon^{-1/2},$$

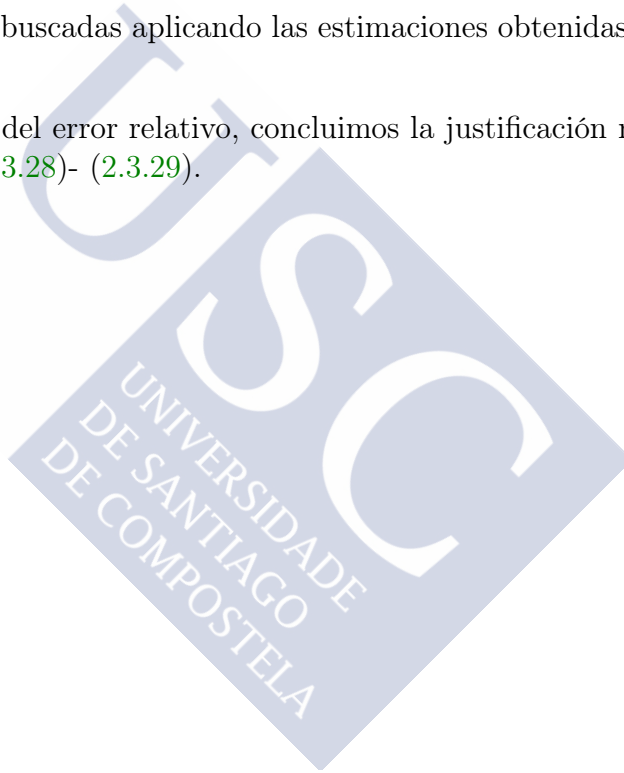
$$\frac{\|p^\varepsilon - \tilde{p}(\varepsilon)\|_{L^2(0,T;L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon))}}{\|p^\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\hat{\Omega}_t^\varepsilon))}} \leq C\varepsilon^{5/2}.$$

*Demostración.* Teniendo en cuenta que,

$$|\hat{\Omega}_t^\varepsilon| = \int_{\hat{\Omega}_t^\varepsilon} dx^\varepsilon \leq \varepsilon^2 \int_{\Omega} ds \leq C\varepsilon^2,$$

concluimos las acotaciones buscadas aplicando las estimaciones obtenidas en los Teoremas 3.2.2, 3.2.3, 3.2.7 y 3.2.8.  $\square$

Con estas estimaciones del error relativo, concluimos la justificación matemática de la aproximación asintótica (2.3.28)- (2.3.29).





## Parte II

# Análisis asintótico de láminas viscoelásticas

UNIVERSIDADE  
DE SANTIAGO  
DE COMPOSTELA



## Introducción a la Parte II

En mecánica de sólidos, la obtención de modelos para vigas, barras, placas y láminas se basa en hipótesis *a priori* en los campos de desplazamientos y/o de tensiones que, sustituyéndolas en las ecuaciones tridimensionales de equilibrio y constitutiva, conducen a útiles simplificaciones. Sin embargo, desde el punto de vista constitutivo y geométrico, es necesario justificar la validez de la mayoría de los modelos obtenidos de esta forma.

Con este objetivo, en 1973 se publica en [88] la primera referencia a los métodos asintóticos para abordar problemas que dependan de un parámetro pequeño, como por ejemplo sucede en problemas de vigas, placas y láminas. En efecto, años después se obtienen en [31, 45] los primeros resultados aplicados para justificar la teoría de la flexión de placas elásticas. Menos de un lustro más tarde, se presenta una justificación del modelo de Bernoulli-Navier para la flexión y elongación de barras finas en [5] y, posteriormente, el caso no lineal en [39]. Será una década más tarde en [74], cuando se presenten y analicen las estimaciones del error correspondientes de los términos de orden superior del desarrollo asintótico de las incógnitas escaladas para estos modelos de barras. Otro de los trabajos pioneros donde se utiliza el método de los desarrollos asintóticos se encuentra en [159], donde los autores presentan una justificación de un modelo unidimensional para vigas elásticas. La teoría de este tipo de estructuras, también se ha visto beneficiada en [155–158] por el uso del método asintótico con la aportación de resultados matemáticos que justifican los modelos clásicos de Saint-Venant, Timoshenko y Vlassov. En los siguientes años, podemos encontrar un completo estudio asintótico para problemas con vigas de perfil fino en [134], incluyendo resultados de convergencia que justifican los modelos obtenidos. También se aplica el método de los desarrollos asintóticos para la ecuación de Poisson con aplicaciones a vigas en [135], para vigas no simétricas en [1], vigas no lineales en [52] y vigas anisótropas en [51]. Durante la última década, con trabajos como en [75, 141, 162], se evidencia también la utilidad del método asintótico para estudiar modelos límites para problemas de contacto con vigas elásticas.

Con respecto a la teoría de placas, los primeros resultados aplicados del análisis asintótico se presentan en [31], donde el autor muestra una justificación de las ecuaciones bidimensionales para modelos de placas. Casi dos décadas después, se publica en [29] una detallada revisión para los modelos elásticos de placas, junto con su justificación matemática utilizando los métodos asintóticos. Años más tarde, como en [50], también se realizan estudios asintóticos para placas anisótropas piezoeléctricas.

Como consecuencia natural, los estudios asintóticos de placas elásticas dieron paso

al análisis asintótico de láminas elásticas. En [36] y en [33], se obtienen resultados de existencia y unicidad de solución de las ecuaciones de una lámina membrana elíptica y se justifican los modelos obtenidos mediante resultados de convergencia. Ese mismo año, los autores obtienen en [34, 35] los correspondientes resultados para justificar las ecuaciones bidimensionales para lo que se denominan láminas flexurales elásticas y láminas de Koiter. Pocos años más tarde, y apoyándose en resultados obtenidos en estos trabajos, aparecen los modelos dinámicos correspondientes en [85–87], donde además se justifican las ecuaciones dinámicas para las láminas membranas, flexurales y de Koiter. Con objeto de dar una visión completa del análisis asintótico de láminas (lineales y no lineales), se publica en [30] un exhaustivo y detallado estudio donde se justifican los modelos conocidos como membranas elípticas, membranas generalizadas y láminas flexurales. Además, se presenta una descripción detallada del procedimiento asintótico que conduce a los correspondientes conjuntos de ecuaciones bidimensionales.

A pesar de la extensa literatura que podemos encontrar al respecto de láminas en las últimas décadas, existen numerosos problemas abiertos y en estudio actualmente, además del que tiene por objeto esta parte de la memoria. Por ejemplo, en [136], el autor identifica el problema del obstáculo y lo justifica como el problema límite de una familia de problemas de contacto unilateral para láminas elípticas elásticas. En [137], se puede consultar el análisis asintótico formal de problemas de contacto de láminas elásticas donde se identifican los diferentes conjuntos de ecuaciones bidimensionales.

Como se ha comentado en la introducción principal de este trabajo, necesitaremos considerar una ley constitutiva apropiada para el material del que está formada la lámina, que dé como resultado un modelo que sea capaz de predecir los desplazamientos en los problemas aplicados de nuestro interés, como el mencionado de las paredes de los vasos sanguíneos, entre otros. Este ejemplo del área de la biomedicina, es solo uno de los numerosos problemas reales que han hecho necesaria la introducción de modelos que puedan tener en cuenta efectos como la memoria y el endurecimiento. Precisamente, una característica de los modelos en viscoelasticidad (véase [48, 83, 127]) es la presencia de un término de memoria en la ley constitutiva que tiene en cuenta las deformaciones previas producidas en el cuerpo. Este término puede ser de tipo memoria corta, representado por una derivada temporal, o de memoria larga, representado por una integral en tiempo. Los trabajos publicados [69–71, 77, 106, 138] y las referencias disponibles en ellos, son una muestra de la variedad de problemas en los que la viscoelasticidad juega un papel importante.

Actualmente, la literatura disponible acerca de modelos de placas viscoelásticas es mucho más extensa que la correspondiente para láminas. Por ejemplo, podemos encontrar en [7] modelos con memoria corta representados por un sistema integro-diferencial y ecuaciones parabólicas que describen grandes desviaciones en placas viscoelásticas. Por otro lado, en [109] se considera un término de memoria larga en el estudio del comportamiento asintótico de la solución para un problema de una placa de tipo von Kármán cuando la variable temporal tiende a infinito. También, en [8], los autores estudian los efectos de grandes desviaciones en placas finas considerando tanto el caso de memoria larga como el de memoria corta. Años más tarde, también podemos encontrar en [9, 11], estudios de problemas de contacto para placas de von Kármán.

En el caso de las láminas viscoelásticas, existe un conjunto de resultados limitado. En [56–58], apoyándose en los resultados presentes en la teoría asintótica de las láminas elásticas, se utiliza el análisis asintótico para estudiar una familia de láminas de un material con una ley constitutiva que presenta un término de memoria larga y, además, se justifican con resultados de convergencia las ecuaciones límite de membranas, láminas flexurales y de Koiter. Más recientemente, en [10] los autores han presentado un modelo para un problema dinámico de contacto donde se considera un material de tipo memoria corta (Kelvin-Voigt).

En esta parte, estudiaremos mediante métodos asintóticos el problema de las deformaciones producidas en láminas viscoelásticas de tipo Kelvin-Voigt (véanse, por ejemplo, [48, 83, 144]) bajo la acción de fuerzas externas. Como veremos, el estudio asintótico de este tipo de problemas da lugar a extensos cálculos y recargadas notaciones. Es por ello por lo que en esta memoria estudiaremos previamente el caso cuasiestático para presentar posteriormente, de una forma más resumida, la generalización al caso dinámico. Siguiendo el estudio realizado en [30] para el caso elástico, presentamos el análisis asintótico de una familia de láminas viscoelásticas formadas de un material cuya ley constitutiva presenta un término de memoria corta (Kelvin-Voigt), representado por una derivada con respecto al tiempo, del cual deduciremos modelos límite bidimensionales (láminas membrana, generalizadas y flexurales) que presentarán, de forma natural, un término de memoria larga representado por una integral en la variable temporal. De forma análoga al caso elástico, dependiendo del orden de las fuerzas aplicadas, la geometría de la superficie media de la lámina y de la parte de la frontera donde se considere la condición de contorno de fijación, clasificaremos los modelos bidimensionales obtenidos en tres grupos que se denominan membranas elípticas, membranas generalizadas y láminas flexurales viscoelásticas. Demostraremos la existencia y unicidad de solución de los problemas presentados y comentaremos su interpretación física. A continuación, justificaremos matemáticamente los modelos obtenidos mediante teoremas de convergencia para cada uno de los casos. Finalmente, consideraremos el problema dinámico correspondiente y, apoyándonos en los resultados obtenidos en el caso cuasiestático, deduciremos las ecuaciones del problema dinámico de una membrana viscoelástica. También, presentaremos los resultados necesarios para asegurar la existencia y unicidad de los problemas introducidos.

Veremos en el presente estudio que algunos de los resultados utilizados en el caso elástico se extenderán al caso viscoelástico directamente o mediante alguna modificación que detallaremos. Una de las mayores diferencias con respecto a dichos trabajos previos en elasticidad, consiste en la dependencia de la variable temporal, que dará lugar a ecuaciones diferenciales ordinarias que tendremos que resolver para obtener la aproximación de orden cero de la solución. Otra de las grandes diferencias surgirá en la justificación matemática de nuestros modelos, pues mostraremos la convergencia de las incógnitas escaladas en los espacios de Bochner-Sobolev correspondientes con el objetivo de aportar resultados robustos al conocimiento de láminas viscoelásticas actual.





## Capítulo 4

# Análisis asintótico formal de láminas viscoelásticas

Consideremos una familia de láminas viscoelásticas con un espesor de  $2\varepsilon$  (donde  $\varepsilon$  denota un parámetro pequeño), ancladas a lo largo de una parte de su cara lateral y todas teniendo la misma superficie media  $S$ . Supondremos que el cuerpo está formado por un material viscoelástico de memoria corta, en concreto un material de Kelvin-Voigt (véase [48, 83]). El objetivo principal de este capítulo es estudiar el comportamiento límite de los problemas tridimensionales y sus correspondientes soluciones cuando  $\varepsilon$  tiende a cero.

Siguiendo la notación y estilo de [30], denotaremos los desplazamientos de las láminas tridimensionales por  $\mathbf{u}^\varepsilon = (u_i^\varepsilon)$ . Una vez presentado el problema físico y su formulación variacional en coordenadas cartesianas, escribiremos el problema en coordenadas curvilíneas, que nos facilitarán el estudio a realizar. Después, para utilizar el método asintótico, obtendremos el problema escalado correspondiente, definido en un dominio de referencia independiente de  $\varepsilon$ . A continuación, asumiremos la existencia de un desarrollo asintótico (en potencias de  $\varepsilon$ ) para el campo de desplazamientos,  $\mathbf{u}(\varepsilon) = (u_i(\varepsilon))$ . Una vez sustituida dicha expansión asintótica en las ecuaciones del problema escalado, identificaremos los términos multiplicados por las mismas potencias de  $\varepsilon$ , lo que nos permitirá caracterizar los términos del desarrollo asintótico propuesto. En particular, identificaremos el término de orden cero (término principal del desarrollo) como la solución de un problema límite bidimensional escalado. Además, por un lado, si la densidad de fuerzas volumétricas aplicadas es de orden  $\mathcal{O}(1)$  con respecto a  $\varepsilon$  y la densidad de tracciones superficiales es de orden  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ , el límite del campo  $\mathbf{u}(\varepsilon)$  es la solución de un sistema de ecuaciones variacionales bidimensional denominado problema de la membrana viscoelástica. Por otra parte, si la densidad de fuerzas volumétricas es de orden  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  y la densidad de tracciones superficiales es de orden  $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ , el límite del campo  $\mathbf{u}(\varepsilon)$  es la solución de un sistema diferente de ecuaciones variacionales bidimensional denominado problema de la lámina flexural viscoelástica.

En ambos casos, a través del análisis asintótico del modelo tridimensional de memoria corta, obtendremos en el límite un modelo bidimensional que presenta un término de memoria larga representado por una integral temporal.

Comenzaremos el capítulo describiendo, en la Sección 4.1, el problema mecánico en

el dominio de referencia original y su formulación variacional en coordenadas cartesianas. Además, debido a la geometría particular que configura una lámina, obtendremos la formulación variacional en coordenadas curvilíneas. En la Sección 4.2 usaremos una aplicación proyección a un dominio de referencia independiente de  $\varepsilon$  para escribir el problema escalado correspondiente. En este punto introduciremos las incógnitas y las fuerzas escaladas y las hipótesis sobre los coeficientes. A continuación, en la Sección 4.3, mostraremos resultados técnicos que serán necesarios en lo que sigue de esta parte del estudio. Además incluiremos resultados teóricos que demuestran la existencia y unicidad de solución de los problemas presentes en este y en próximos capítulos. En la Sección 4.4 mostraremos el análisis asintótico formal que da lugar a la formulación de las ecuaciones variacionales bidimensionales de las láminas viscoelásticas. Como hemos comentado anteriormente, veremos como, a pesar de haber considerado un modelo tridimensional de una lámina viscoelástica con memoria corta, representada por una derivada temporal, el análisis asintótico conduce de forma natural a modelos bidimensionales que presentan un término de memoria larga, representada por una integral en tiempo, que tiene en cuenta todas las deformaciones previas del cuerpo.

## 4.1. Problema tridimensional de una lámina viscoelástica

Denotemos por  $\mathbb{S}^d$ , donde  $d = 2, 3$  en la práctica, el espacio de tensores simétricos de segundo orden sobre  $\mathbb{R}^d$ , mientras que “ $\cdot$ ” representa el producto interior y  $|\cdot|$  la norma usual en  $\mathbb{S}^d$  y  $\mathbb{R}^d$ . Al igual que en la parte anterior de esta memoria, en lo que sigue, a no ser que se indique lo contrario explícitamente, utilizaremos la convención de suma en índices repetidos. Además, los índices latinos  $i, j, k, l, \dots$ , tomarán sus valores en el conjunto  $\{1, 2, 3\}$ , mientras que los índices griegos  $\alpha, \beta, \sigma, \tau, \dots$ , lo harán en el conjunto  $\{1, 2\}$ . También utilizaremos la notación estándar para los espacios de Lebesgue y Sobolev. De la misma forma, para una función dependiente del tiempo, por ejemplo  $u$ , denotaremos con  $\dot{u}$  a su derivada primera con respecto a la variable temporal. Recordamos que “ $\rightarrow$ ” denota convergencia fuerte, mientras que “ $\rightharpoonup$ ” denota convergencia débil.

Sea  $\Omega^*$  un dominio de  $\mathbb{R}^3$ , con frontera Lipschitz-continua  $\Gamma^* = \partial\Omega^*$ . Sea  $\mathbf{x}^* = (x_i^*)$  un punto genérico de su adherencia  $\bar{\Omega}^*$  y denotemos con  $\partial_i^*$  la derivada parcial con respecto a  $x_i^*$ . Denotemos por  $d\mathbf{x}^*$  el elemento de volumen en  $\Omega^*$ ,  $d\Gamma^*$  el elemento de área y  $\mathbf{n}^*$  el vector normal exterior unitario sobre  $\Gamma^*$ . Finalmente, sean  $\Gamma_0^*$  y  $\Gamma_1^*$  subconjuntos de  $\Gamma^*$  tales que  $\Gamma_0^*$  es de medida no nula y  $\Gamma_0^* \cap \Gamma_1^* = \emptyset$ .

El dominio  $\Omega^*$  denota la región ocupada por el cuerpo deformable en ausencia de fuerzas aplicadas. Asumiremos que el cuerpo está hecho de un material viscoelástico de tipo Kelvin-Voigt, que sea homogéneo e isótropo, de tal forma que está caracterizado por sus coeficientes de Lamé  $\lambda \geq 0, \mu > 0$  y dos coeficientes de viscosidad,  $\theta \geq 0, \rho \geq 0$  (véanse, por ejemplo, [48, 83, 144]).

Sea  $T > 0$  el periodo de tiempo de observación. Bajo los efectos de las fuerzas aplicadas, el cuerpo se deforma, y denotamos por  $u_i^* : [0, T] \times \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}^3$  las componentes cartesianas del

campo de desplazamientos, de tal forma que podemos definirlo como  $\mathbf{u}^* := u_i^* \mathbf{e}^i : [0, T] \times \bar{\Omega}^* \rightarrow \mathbb{R}^3$ , donde  $\{\mathbf{e}^i\}$  denota la base euclídea canónica en  $\mathbb{R}^3$ . Además, consideraremos que el campo de desplazamientos se anula en el conjunto  $\Gamma_0^*$ . Por tanto, el campo de desplazamientos  $\mathbf{u}^* = (u_i^*) : [0, T] \times \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}^3$  es solución del siguiente problema físico tridimensional en coordenadas cartesianas:

**Problema 4.1.1.** *Hallar  $\mathbf{u}^* = (u_i^*) : [0, T] \times \bar{\Omega}^* \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que,*

$$-\partial_j^* \sigma^{ij,*}(\mathbf{u}^*) = f^{i,*} \text{ en } \Omega^*, \quad (4.1.1)$$

$$u_i^* = 0 \text{ en } \Gamma_0^*, \quad (4.1.2)$$

$$\sigma^{ij,*}(\mathbf{u}^*) n_j^* = h^{i,*} \text{ en } \Gamma_1^*, \quad (4.1.3)$$

$$\mathbf{u}^*(0, \cdot) = \mathbf{u}_0^* \text{ en } \Omega^*, \quad (4.1.4)$$

donde las funciones

$$\sigma^{ij,*}(\mathbf{u}^*) := A^{ijkl,*} e_{kl}^*(\mathbf{u}^*) + B^{ijkl,*} e_{kl}^*(\dot{\mathbf{u}}^*), \quad (4.1.5)$$

son las componentes del campo tensorial de tensiones linealizado, mientras que las funciones

$$A^{ijkl,*} := \lambda \delta^{ij} \delta^{kl} + \mu (\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk}),$$

$$B^{ijkl,*} := \theta \delta^{ij} \delta^{kl} + \frac{\rho}{2} (\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk}),$$

son las componentes de los tensores de cuarto orden de elasticidad y viscosidad, respectivamente, y

$$e_{ij}^*(\mathbf{u}^*) := \frac{1}{2} (\partial_j^* u_i^* + \partial_i^* u_j^*),$$

designa las componentes del campo tensorial de deformaciones linealizado asociado al campo de desplazamientos  $\mathbf{u}^*$  del conjunto  $\bar{\Omega}^*$ .

Procedamos ahora a describir las ecuaciones del Problema 4.1.1. La expresión (4.1.1) es la ecuación de equilibrio, donde  $f^{i,*}$  son las componentes de la densidad de fuerzas volumétricas. La igualdad (4.1.2) es la condición de tipo Dirichlet de fijación, (4.1.3) la condición de tipo Neumann, donde  $h^{i,*}$  son las componentes de la densidad de fuerzas de superficie. La relación (4.1.4) es la condición inicial, donde  $\mathbf{u}_0^*$  denota el campo de desplazamientos inicial. Nótese que, para mayor brevedad notacional, omitiremos la dependencia explícita de las diversas funciones con respecto a las variables espaciales y temporal cuando no haya ambigüedad.

Definamos el espacio de las soluciones admisibles,

$$V(\Omega^*) = \{\mathbf{v}^* = (v_i^*) \in [H^1(\Omega^*)]^3; \mathbf{v}^* = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_0^*\}. \quad (4.1.6)$$

Por tanto, asumiendo suficiente regularidad, la incógnita  $\mathbf{u}^* = (u_i^*)$  verifica el siguiente problema variacional en coordenadas cartesianas:

**Problema 4.1.2.** Hallar  $\mathbf{u}^* = (u_i^*) : [0, T] \times \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^*(t, \cdot) &\in V(\Omega^*) \quad \forall t \in [0, T], \\ \int_{\Omega^*} A^{ijkl,*} e_{kl}^*(\mathbf{u}^*) e_{ij}^*(\mathbf{v}^*) dx^* &+ \int_{\Omega^*} B^{ijkl,*} e_{kl}^*(\mathbf{u}^*) e_{ij}^*(\mathbf{v}^*) dx^* \\ &= \int_{\Omega^*} f^{i,*} v_i^* dx^* + \int_{\Gamma_1^*} h^{i,*} v_i^* d\Gamma^* \quad \forall \mathbf{v}^* \in V(\Omega^*), \text{ c.p.d. en } (0, T), \\ \mathbf{u}^*(0, \cdot) &= \mathbf{u}_0^*(\cdot). \end{aligned}$$

**Observación 4.1.3.** Utilizando la definición de las componentes de las tensiones linealizadas en (4.1.5), podemos escribir la ecuación variacional del Problema 4.1.2 en forma más compacta:

$$\int_{\Omega^*} \sigma^{ij,*}(\mathbf{u}^*) e_{ij}^*(\mathbf{v}^*) dx^* = \int_{\Omega^*} f^{i,*} v_i^* dx^* + \int_{\Gamma_1^*} h^{i,*} v_i^* d\Gamma^* \quad \forall \mathbf{v}^* \in V(\Omega^*), \text{ c.p.d. en } (0, T).$$

Esta ecuación constituye el principio de los trabajos virtuales en coordenadas cartesianas.

Consideremos ahora que  $\Omega^*$  representa una lámina viscoelástica de espesor  $2\varepsilon$ , donde  $\varepsilon$  denota un parámetro pequeño adimensional. En este caso, será útil expresar las ecuaciones del Problema 4.1.2 en coordenadas curvilíneas. Sea  $\omega$  un dominio de  $\mathbb{R}^2$ , con una frontera Lipschitz-continua  $\gamma = \partial\omega$ . Sea  $\mathbf{y} = (y_\alpha)$  un punto genérico de su adherencia  $\bar{\omega}$  y denotemos por  $\partial_\alpha$  la derivada parcial con respecto a  $y_\alpha$ .

Sea  $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^2(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$  una aplicación inyectiva tal que los dos vectores  $\mathbf{a}_\alpha(\mathbf{y}) := \partial_\alpha \boldsymbol{\theta}(\mathbf{y})$  sean linealmente independientes. Estos vectores forman la base covariante del plano tangente a la superficie  $S := \boldsymbol{\theta}(\bar{\omega})$  en el punto  $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^*$ . Además, consideraremos los dos vectores  $\mathbf{a}^\alpha(\mathbf{y})$  del mismo plano tangente definidos por las relaciones  $\mathbf{a}^\alpha(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{a}_\beta(\mathbf{y}) = \delta_\beta^\alpha$ , que constituyen la base contravariante. Definimos el vector normal unitario a  $S$  en el punto  $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^*$  como

$$\mathbf{a}_3(\mathbf{y}) = \mathbf{a}^3(\mathbf{y}) := \frac{\mathbf{a}_1(\mathbf{y}) \wedge \mathbf{a}_2(\mathbf{y})}{|\mathbf{a}_1(\mathbf{y}) \wedge \mathbf{a}_2(\mathbf{y})|}, \quad (4.1.7)$$

donde  $\wedge$  denota el producto vectorial en  $\mathbb{R}^3$ .

Definimos la primera forma fundamental, dada por el tensor métrico, en componentes covariantes y contravariantes, respectivamente, por

$$a_{\alpha\beta} := \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta, \quad a^{\alpha\beta} := \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta, \quad (4.1.8)$$

la segunda forma fundamental, dada por el tensor de curvatura, en componentes covariantes o mixtas, respectivamente, por

$$b_{\alpha\beta} := \mathbf{a}^3 \cdot \partial_\beta \mathbf{a}_\alpha, \quad b_\alpha^\beta := a^{\beta\sigma} b_{\sigma\alpha},$$

y los símbolos de Christoffel de la superficie  $S$  por

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma := \mathbf{a}^\sigma \cdot \partial_\beta \mathbf{a}_\alpha.$$

El elemento de área sobre  $S$  es  $\sqrt{a}dy = dy^*$  donde

$$a := \det(a_{\alpha\beta}). \quad (4.1.9)$$

Sea  $\gamma_0$  un subconjunto de  $\gamma$  de medida no nula. Para cada  $\varepsilon > 0$ , definimos el dominio tridimensional  $\Omega^\varepsilon := \omega \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  y denotamos su frontera por  $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega^\varepsilon$ . También definimos las siguientes partes de la frontera:

$$\Gamma_+^\varepsilon := \omega \times \{\varepsilon\}, \quad \Gamma_-^\varepsilon := \omega \times \{-\varepsilon\}, \quad \Gamma_0^\varepsilon := \gamma_0 \times [-\varepsilon, \varepsilon].$$

Sea  $\mathbf{x}^\varepsilon = (x_i^\varepsilon)$  un punto genérico de  $\bar{\Omega}^\varepsilon$  y denotemos por  $\partial_i^\varepsilon$  la derivada parcial con respecto a  $x_i^\varepsilon$ . Nótese que  $x_\alpha^\varepsilon = y_\alpha$  y  $\partial_\alpha^\varepsilon = \partial_\alpha$ . Sea  $\Theta : \bar{\Omega}^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$  la aplicación definida por

$$\Theta(\mathbf{x}^\varepsilon) := \boldsymbol{\theta}(\mathbf{y}) + x_3^\varepsilon \mathbf{a}_3(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}^\varepsilon = (\mathbf{y}, x_3^\varepsilon) = (y_1, y_2, x_3^\varepsilon) \in \bar{\Omega}^\varepsilon. \quad (4.1.10)$$

El siguiente teorema (véase Teorema 3.1-1, [30]) muestra que, si la aplicación inyectiva  $\boldsymbol{\theta} : \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  es suficientemente regular, la aplicación  $\Theta : \bar{\Omega}^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$  también es inyectiva para un  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño.

**Teorema 4.1.4.** *Sea  $\omega$  un dominio en  $\mathbb{R}^2$ . Sea  $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^2(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$  una aplicación inyectiva tal que los dos vectores  $\mathbf{a}_\alpha = \partial_\alpha \boldsymbol{\theta}$  son linealmente independientes en todos los puntos de  $\bar{\omega}$  y sea  $\mathbf{a}_3$  el vector definido en (4.1.7). Entonces, existe un  $\varepsilon_0 > 0$  tal que para todo  $\varepsilon_1$ ,  $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$  la aplicación  $\Theta : \bar{\Omega}_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por*

$$\Theta(\mathbf{y}, x_3) := \boldsymbol{\theta}(\mathbf{y}) + x_3 \mathbf{a}_3(\mathbf{y}) \quad \forall (\mathbf{y}, x_3) \in \bar{\Omega}_1, \quad \text{donde } \Omega_1 := \omega \times (-\varepsilon_1, \varepsilon_1),$$

*es un  $\mathcal{C}^1$ -difeomorfismo de  $\bar{\Omega}_1$  en  $\Theta(\bar{\Omega}_1)$  y  $\det(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3) > 0$  en  $\bar{\Omega}_1$ , siendo  $\mathbf{g}_i := \partial_i \Theta$ .*

En consecuencia, para cada  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , el conjunto  $\Theta(\bar{\Omega}^\varepsilon) = \bar{\Omega}^*$  se puede considerar como la configuración de referencia de una lámina viscoelástica, con superficie media  $S = \boldsymbol{\theta}(\bar{\omega})$  y espesor  $2\varepsilon > 0$  (véase la Figura 4.1). Además, para  $\varepsilon > 0$ ,  $\mathbf{g}_i^\varepsilon(\mathbf{x}^\varepsilon) := \partial_i^\varepsilon \Theta(\mathbf{x}^\varepsilon)$  son linealmente independientes y la aplicación  $\Theta : \bar{\Omega}^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$  es inyectiva para todo  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , como consecuencia de la inyectividad de la aplicación  $\boldsymbol{\theta}$ . Por tanto, los tres vectores  $\mathbf{g}_i^\varepsilon(\mathbf{x}^\varepsilon)$  forman la base covariante del espacio tangente en el punto  $\mathbf{x}^* = \Theta(\mathbf{x}^\varepsilon)$  y  $\mathbf{g}^{i,\varepsilon}(\mathbf{x}^\varepsilon)$  definidos por las relaciones  $\mathbf{g}^{i,\varepsilon} \cdot \mathbf{g}_j^\varepsilon = \delta_j^i$  forman la base contravariante en el punto  $\mathbf{x}^* = \Theta(\mathbf{x}^\varepsilon)$ . Definimos el tensor métrico, en componentes covariantes y contravariantes, respectivamente, por

$$g_{ij}^\varepsilon := \mathbf{g}_i^\varepsilon \cdot \mathbf{g}_j^\varepsilon, \quad g^{ij,\varepsilon} := \mathbf{g}^{i,\varepsilon} \cdot \mathbf{g}^{j,\varepsilon}, \quad (4.1.11)$$

y los símbolos de Christoffel por

$$\Gamma_{ij}^{p,\varepsilon} := \mathbf{g}^{p,\varepsilon} \cdot \partial_i^\varepsilon \mathbf{g}_j^\varepsilon. \quad (4.1.12)$$

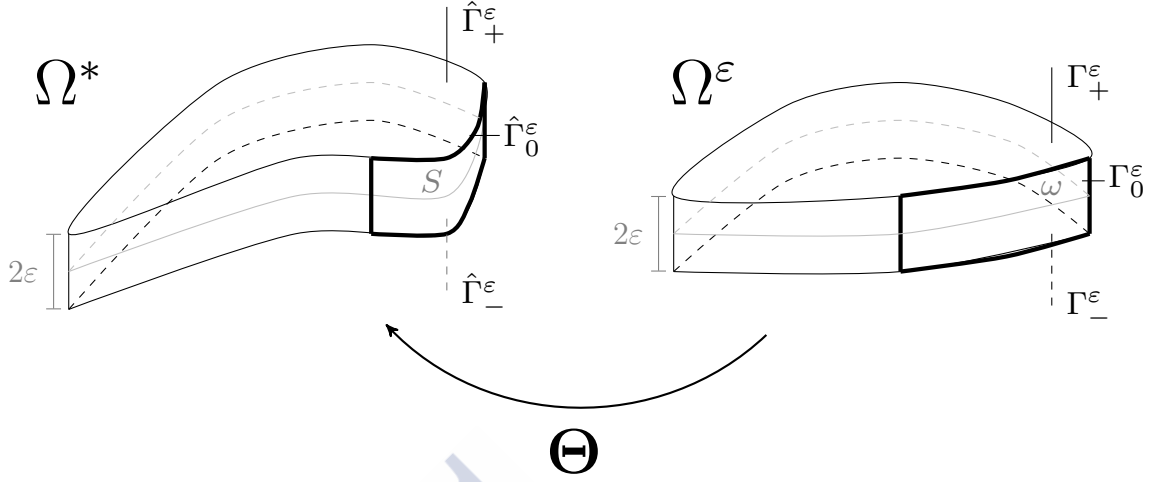


Figura 4.1: Transformación  $\Theta$  entre el dominio en coordenadas curvilíneas  $\Omega^\varepsilon$  y el dominio original  $\Omega^*$ .

El elemento de volumen en el conjunto  $\Theta(\bar{\Omega}^\varepsilon) = \bar{\Omega}^*$  es  $\sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon = dx^*$  y el elemento de superficie en  $\Theta(\Gamma^\varepsilon) = \Gamma^*$  es  $\sqrt{g^\varepsilon} d\Gamma^\varepsilon = d\Gamma^*$  donde

$$g^\varepsilon := \det(g_{ij}^\varepsilon). \quad (4.1.13)$$

Por tanto, para un campo  $\mathbf{v}^*$  definido en  $\Theta(\bar{\Omega}^\varepsilon) = \bar{\Omega}^*$ , definimos sus coordenadas curvilíneas covariantes por

$$\mathbf{v}^*(\mathbf{x}^*) = v_i^*(\mathbf{x}^*) \mathbf{e}^i =: v_i^\varepsilon(\mathbf{x}^\varepsilon) \mathbf{g}^i(\mathbf{x}^\varepsilon), \text{ con } \mathbf{x}^* = \Theta(\mathbf{x}^\varepsilon). \quad (4.1.14)$$

En concreto, denotamos por  $u_i^\varepsilon : [0, T] \times \bar{\Omega}^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$  las componentes covariantes el campo de desplazamientos, esto es  $\hat{\mathbf{u}}^\varepsilon := u_i^\varepsilon \mathbf{g}^{i,\varepsilon} : [0, T] \times \bar{\Omega}^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Por simplicidad, definimos el campo vectorial  $\mathbf{u}^\varepsilon = (u_i^\varepsilon) : [0, T] \times \Omega^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$  al cual nos referiremos como vector de las incógnitas o vector solución.

Recordemos que hemos asumido que la lámina está sometida a una condición de contorno de fijación; en particular que los desplazamientos se anulan en  $\Theta(\Gamma_0^\varepsilon) = \Gamma_0^*$ , esto es, una parte de la frontera lateral de la lámina.

El espacio de las soluciones admisibles se define ahora como,

$$V(\Omega^\varepsilon) = \{\mathbf{v}^\varepsilon = (v_i^\varepsilon) \in [H^1(\Omega^\varepsilon)]^3; \mathbf{v}^\varepsilon = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_0^\varepsilon\}. \quad (4.1.15)$$

Se trata de un espacio de Hilbert con el producto interior inducido de  $[H^1(\Omega^\varepsilon)]^3$ . La norma correspondiente se denota por  $\|\cdot\|_{1,\Omega^\varepsilon}$ .

Por tanto, ahora podemos reescribir el Problema 4.1.2 en coordenadas curvilíneas (véase [30] para más detalle). Entonces, el campo  $\mathbf{u}^\varepsilon = (u_i^\varepsilon)$  verifica el siguiente problema variacional para una lámina viscoelástica tridimensional en coordenadas curvilíneas:



**Problema 4.1.5.** Hallar  $\mathbf{u}^\varepsilon = (u_i^\varepsilon) : [0, T] \times \Omega^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\varepsilon(t, \cdot) &\in V(\Omega^\varepsilon) \quad \forall t \in [0, T], \\ \int_{\Omega^\varepsilon} A^{ijkl, \varepsilon} e_{k||l}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) e_{i||j}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) \sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon &+ \int_{\Omega^\varepsilon} B^{ijkl, \varepsilon} e_{k||l}^\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon) e_{i||j}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) \sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon \\ &= \int_{\Omega^\varepsilon} f^{i, \varepsilon} v_i^\varepsilon \sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon + \int_{\Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon} h^{i, \varepsilon} v_i^\varepsilon \sqrt{g^\varepsilon} d\Gamma^\varepsilon \quad \forall \mathbf{v}^\varepsilon \in V(\Omega^\varepsilon), \text{ c.p.d. en } (0, T), \\ \mathbf{u}^\varepsilon(0, \cdot) &= \mathbf{u}_0^\varepsilon(\cdot), \end{aligned}$$

donde las funciones

$$A^{ijkl, \varepsilon} := \lambda^\varepsilon g^{ij, \varepsilon} g^{kl, \varepsilon} + \mu^\varepsilon (g^{ik, \varepsilon} g^{jl, \varepsilon} + g^{il, \varepsilon} g^{jk, \varepsilon}), \quad (4.1.16)$$

$$B^{ijkl, \varepsilon} := \theta^\varepsilon g^{ij, \varepsilon} g^{kl, \varepsilon} + \frac{\rho^\varepsilon}{2} (g^{ik, \varepsilon} g^{jl, \varepsilon} + g^{il, \varepsilon} g^{jk, \varepsilon}), \quad (4.1.17)$$

son las componentes contravariantes de los tensores de cuarto orden de elasticidad y viscosidad, respectivamente. Supondremos que los coeficientes de Lamé y los coeficientes de viscosidad son independientes de  $\varepsilon$ , es decir, que existen unas constantes  $\lambda, \theta, \rho \geq 0$ , y  $\mu > 0$  (independientes de  $\varepsilon$ ) tales que

$$\lambda^\varepsilon = \lambda, \quad \mu^\varepsilon = \mu, \quad (4.1.18)$$

$$\theta^\varepsilon = \theta, \quad \rho^\varepsilon = \rho. \quad (4.1.19)$$

Los términos

$$e_{i||j}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) := \frac{1}{2} (u_{i||j}^\varepsilon + u_{j||i}^\varepsilon) = \frac{1}{2} (\partial_j^\varepsilon u_i^\varepsilon + \partial_i^\varepsilon u_j^\varepsilon) - \Gamma_{ij}^{p, \varepsilon} u_p^\varepsilon, \quad (4.1.20)$$

designan las componentes covariantes del tensor de deformaciones linealizado asociado con el campo de desplazamientos  $\hat{\mathbf{u}}^\varepsilon$  del conjunto  $\Theta(\bar{\Omega}^\varepsilon)$ . Además,  $f^{i, \varepsilon}$  denotan las componentes contravariantes de la densidad de fuerzas volumétricas,  $h^{i, \varepsilon}$  denotan las componentes contravariantes de la densidad de fuerzas de superficie y  $\mathbf{u}_0^\varepsilon$  denota la condición inicial (de esta forma, la condición inicial para el campo de desplazamientos será  $\hat{\mathbf{u}}^\varepsilon(0) = \hat{\mathbf{u}}_0^\varepsilon := (u_0^\varepsilon)_i \mathbf{g}^{i, \varepsilon}$ ). También podemos definir las componentes contravariantes del tensor de tensiones linealizado como

$$\sigma^{ij, \varepsilon}(\mathbf{u}^\varepsilon) := A^{ijkl, \varepsilon} e_{k||l}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) + B^{ijkl, \varepsilon} e_{k||l}^\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon). \quad (4.1.21)$$

La demostración de existencia y unicidad de solución del Problema 4.1.5 para un  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño se proporciona en la Sección 4.3 (véase el Teorema 4.3.11). Si asumimos que dicha solución es suficientemente regular, podemos demostrar que también verificará el problema de valor en la frontera que sigue a continuación.

**Teorema 4.1.6.** Asumamos las hipótesis consideradas en el Teorema 4.1.4. Si la solución  $\mathbf{u}^\varepsilon = (u_i^\varepsilon)$  del Problema variacional 4.1.5 es suficientemente regular, entonces también

verifica el siguiente problema de valor en la frontera en coordenadas curvilíneas: hallar  $\mathbf{u}^\varepsilon = (u_i^\varepsilon) : [0, T] \times \Omega^\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tal que,

$$-\sigma_{||j}^{ij,\varepsilon}(\mathbf{u}^\varepsilon) = f^{i,\varepsilon} \text{ en } \Omega^\varepsilon, \quad (4.1.22)$$

$$\begin{aligned} u_i^\varepsilon &= 0 \text{ en } \Gamma_0^\varepsilon, \\ \sigma^{ij,\varepsilon}(\mathbf{u}^\varepsilon)n_j^\varepsilon &= h^{i,\varepsilon} \text{ en } \Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon, \\ \mathbf{u}^\varepsilon(0, \cdot) &= \mathbf{u}_0^\varepsilon \text{ en } \Omega^\varepsilon, \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

donde las funciones

$$\sigma_{||k}^{ij,\varepsilon}(\mathbf{u}^\varepsilon) := \partial_k^\varepsilon \sigma^{ij,\varepsilon}(\mathbf{u}^\varepsilon) + \Gamma_{pk}^{i,\varepsilon} \sigma^{pj,\varepsilon}(\mathbf{u}^\varepsilon) + \Gamma_{kq}^{j,\varepsilon} \sigma^{iq,\varepsilon}(\mathbf{u}^\varepsilon), \quad (4.1.24)$$

denotan las derivadas covariantes de primer orden de las componentes del tensor de tensiones.

Para obtener esta conclusión, se pueden seguir los mismos argumentos utilizados por el caso elástico (véase el Teorema 1.6-1, [30]) teniendo en cuenta la definición de las componentes del tensor de tensiones linealizado en (4.1.21).

Para finalizar esta sección nótese que, como consecuencia de la definición de  $\Theta$  en (4.1.10), se verifican las siguientes relaciones,

$$\Gamma_{\alpha 3}^{3,\varepsilon} = \Gamma_{33}^{p,\varepsilon} = 0 \text{ en } \bar{\Omega}^\varepsilon, \quad (4.1.25)$$

$$A^{\alpha\beta\sigma 3,\varepsilon} = A^{\alpha 333,\varepsilon} = B^{\alpha\beta\sigma 3,\varepsilon} = B^{\alpha 333,\varepsilon} = 0 \text{ en } \bar{\Omega}^\varepsilon. \quad (4.1.26)$$

## 4.2. Problema escalado de una lámina viscoelástica

Por conveniencia, consideremos un dominio de referencia independiente del parámetro pequeño  $\varepsilon$ . Por tanto, definimos el dominio tridimensional  $\Omega := \omega \times (-1, 1)$ . También definimos las siguientes partes de la frontera, que se denota por  $\Gamma := \partial\Omega$ :

$$\Gamma_+ := \omega \times \{1\}, \quad \Gamma_- := \omega \times \{-1\}, \quad \Gamma_0 := \gamma_0 \times [-1, 1].$$

Sea  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  un punto genérico de  $\bar{\Omega}$  y denotemos por  $\partial_i$  la derivada parcial con respecto a  $x_i$ . Además, definamos la siguiente aplicación proyección (véase la Figura 4.2):

$$\pi^\varepsilon : \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \bar{\Omega} \longrightarrow \pi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\varepsilon = (x_i^\varepsilon) = (x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon, x_3^\varepsilon) = (x_1, x_2, \varepsilon x_3) \in \bar{\Omega}^\varepsilon,$$

y así,  $\partial_\alpha^\varepsilon = \partial_\alpha$  y  $\partial_3^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \partial_3$ . Consideremos el vector de las incógnitas escalado  $\mathbf{u}(\varepsilon) = (u_i(\varepsilon)) : [0, T] \times \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^3$  y los campos vectoriales escalados  $\mathbf{v} = (v_i) : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^3$  definidos como

$$u_i^\varepsilon(t, \mathbf{x}^\varepsilon) =: u_i(\varepsilon)(t, \mathbf{x}) \text{ y } v_i^\varepsilon(\mathbf{x}^\varepsilon) =: v_i(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}^\varepsilon = \pi^\varepsilon(\mathbf{x}) \in \bar{\Omega}^\varepsilon, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.2.1)$$

Recordemos que, por hipótesis, los coeficientes de Lamé y de viscosidad son independientes de  $\varepsilon$  (véanse (4.1.18)–(4.1.19)). Además, asociemos las funciones  $\Gamma_{ij}^{p,\varepsilon}, g^\varepsilon, A^{ijkl,\varepsilon}, B^{ijkl,\varepsilon}$



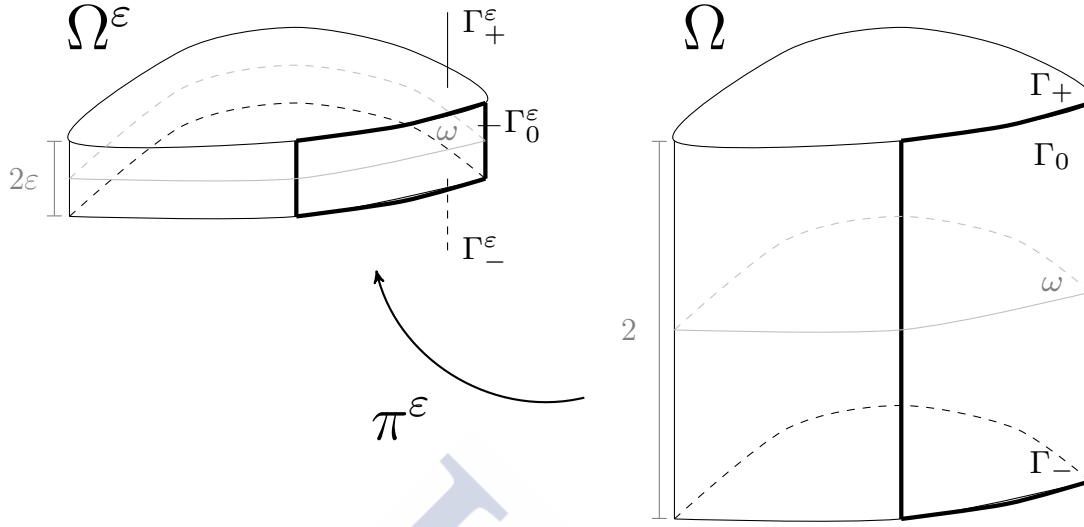


Figura 4.2: Aplicación proyección  $\pi^\varepsilon$  entre el dominio escalado  $\Omega$  y el dominio en coordenadas curvilíneas  $\Omega^\varepsilon$ .

definidas en (4.1.12), (4.1.13), (4.1.16) y (4.1.17) con las funciones  $\Gamma_{ij}^p(\varepsilon)$ ,  $g(\varepsilon)$ ,  $A^{ijkl}(\varepsilon)$ ,  $B^{ijkl}(\varepsilon)$  definidas por:

$$\Gamma_{ij}^p(\varepsilon)(\mathbf{x}) := \Gamma_{ij}^{p,\varepsilon}(\mathbf{x}^\varepsilon), \quad (4.2.2)$$

$$g(\varepsilon)(\mathbf{x}) := g^\varepsilon(\mathbf{x}^\varepsilon), \quad (4.2.3)$$

$$A^{ijkl}(\varepsilon)(\mathbf{x}) := A^{ijkl,\varepsilon}(\mathbf{x}^\varepsilon), \quad (4.2.4)$$

$$B^{ijkl}(\varepsilon)(\mathbf{x}) := B^{ijkl,\varepsilon}(\mathbf{x}^\varepsilon), \quad (4.2.5)$$

para todo  $\mathbf{x}^\varepsilon = \pi^\varepsilon(\mathbf{x}) \in \bar{\Omega}^\varepsilon$ . Para todo  $\mathbf{v} = (v_i) \in [H^1(\Omega)]^3$ , definimos las componentes del tensor de deformaciones linealizado escalado,  $e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v}) \in L^2(\Omega)$ , por

$$e_{\alpha||\beta}(\varepsilon; \mathbf{v}) := \frac{1}{2}(\partial_\beta v_\alpha + \partial_\alpha v_\beta) - \Gamma_{\alpha\beta}^p(\varepsilon)v_p, \quad (4.2.6)$$

$$e_{\alpha||3}(\varepsilon; \mathbf{v}) := \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon}\partial_3 v_\alpha + \partial_\alpha v_3\right) - \Gamma_{\alpha 3}^p(\varepsilon)v_p, \quad (4.2.7)$$

$$e_{3||3}(\varepsilon; \mathbf{v}) := \frac{1}{\varepsilon}\partial_3 v_3. \quad (4.2.8)$$

Nótese que con estas definiciones se verifica que

$$e_{i||j}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon)(\pi^\varepsilon(\mathbf{x})) = e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v})(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

En lo que sigue de esta memoria, utilizaremos la notación abreviada  $e_{i||j}(\varepsilon) \equiv e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{u}(\varepsilon))$  y  $\dot{e}_{i||j}(\varepsilon) \equiv e_{i||j}(\varepsilon; \dot{\mathbf{u}}(\varepsilon))$ .

**Observación 4.2.1.** Si consideramos  $\varepsilon = 0$  las funciones estarán definidas con respecto a  $\mathbf{y} \in \bar{\omega}$ . Nótese que (4.2.7) y (4.2.8) no están definidas en ese caso límite, lo que da

lugar a un problema de perturbación singular y motiva el estudio de este tipo de problemas mediante técnicas como el análisis asintótico. Además, en esta memoria distinguiremos los símbolos de Christoffel tridimensionales de los bidimensionales utilizando la notación  $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma(\varepsilon)$  y  $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma$ , respectivamente.

El siguiente resultado es una adaptación de (b) del Teorema 3.3-2, [30] al caso viscoelástico. Estudiaremos el comportamiento asintótico de las componentes contravariantes escaladas  $A^{ijkl}(\varepsilon)$ ,  $B^{ijkl}(\varepsilon)$  de los tensores de elasticidad y viscosidad tridimensionales definidos en (4.2.4)–(4.2.5), cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Veremos que son tensores uniformemente definidos positivos no solo con respecto a  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ , sino también con respecto a  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ . Finalmente, sus límites son funciones de  $\mathbf{y} \in \bar{\omega}$  únicamente, esto es, independientes de la variable trasversal  $x_3$ .

**Teorema 4.2.2.** Sean  $\omega$  un dominio en  $\mathbb{R}^2$ ,  $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^2(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$  una aplicación inyectiva tal que los dos vectores  $\mathbf{a}_\alpha = \partial_\alpha \boldsymbol{\theta}$  son linealmente independientes en todo punto de  $\bar{\omega}$  y denotemos por  $a^{\alpha\beta}$  las componentes contravariantes del tensor métrico de  $S = \boldsymbol{\theta}(\bar{\omega})$ . Además, consideremos las hipótesis sobre la aplicación  $\boldsymbol{\theta}$  y la definición de  $\varepsilon_0$  en el Teorema 4.1.4. Entonces, las componentes contravariantes  $A^{ijkl}(\varepsilon)$ ,  $B^{ijkl}(\varepsilon)$  de los tensores tridimensionales escalados de elasticidad y viscosidad, definidos en (4.2.4)–(4.2.5) verifican

$$\begin{aligned} A^{ijkl}(\varepsilon) &= A^{ijkl}(0) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad y \quad A^{\alpha\beta\sigma 3}(\varepsilon) = A^{\alpha 333}(\varepsilon) = 0, \\ B^{ijkl}(\varepsilon) &= B^{ijkl}(0) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad y \quad B^{\alpha\beta\sigma 3}(\varepsilon) = B^{\alpha 333}(\varepsilon) = 0, \end{aligned}$$

para todo  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , donde el símbolo de orden  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  se consideran con respecto a la norma  $\|\cdot\|_{0,\infty,\bar{\Omega}}$  definida por

$$\|w\|_{0,\infty,\bar{\Omega}} = \sup\{|w(\mathbf{x})|; \mathbf{x} \in \bar{\Omega}\}, \quad (4.2.9)$$

y además,

$$\begin{aligned} A^{\alpha\beta\sigma\tau}(0) &= \lambda a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}), & A^{\alpha\beta 33}(0) &= \lambda a^{\alpha\beta}, \\ A^{\alpha 3\sigma 3}(0) &= \mu a^{\alpha\sigma}, & A^{3333}(0) &= \lambda + 2\mu, \\ A^{\alpha\beta\sigma 3}(0) &= A^{\alpha 333}(0) = 0, \\ B^{\alpha\beta\sigma\tau}(0) &= \theta a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \frac{\rho}{2}(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}), & B^{\alpha\beta 33}(0) &= \theta a^{\alpha\beta}, \\ B^{\alpha 3\sigma 3}(0) &= \frac{\rho}{2} a^{\alpha\sigma}, & B^{3333}(0) &= \theta + \rho, \\ B^{\alpha\beta\sigma 3}(0) &= B^{\alpha 333}(0) = 0. \end{aligned}$$

Además, existen dos constantes  $C_e > 0$  y  $C_v > 0$ , independientes de las variables  $\mathbf{y}$  de  $\varepsilon$ , tal que

$$\sum_{i,j} |t_{ij}|^2 \leq C_e A^{ijkl}(\varepsilon)(\mathbf{x}) t_{kl} t_{ij}, \quad (4.2.10)$$

$$\sum_{i,j} |t_{ij}|^2 \leq C_v B^{ijkl}(\varepsilon)(\mathbf{x}) t_{kl} t_{ij}, \quad (4.2.11)$$

para todo  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , para todo  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$  y todo  $\mathbf{t} = (t_{ij}) \in \mathbb{S}^3$ .

**Observación 4.2.3.** Debido al comportamiento asintótico de los tensores  $(A^{ijkl}(\varepsilon))$  y  $(B^{ijkl}(\varepsilon))$ , visto en el Teorema 4.2.2, si tomamos el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  en (4.2.10) y (4.2.11) se tiene, respectivamente, que

$$\sum_{i,j} |t_{ij}|^2 \leq C_e A^{ijkl}(0)(\mathbf{x}) t_{kl} t_{ij}, \quad \sum_{i,j} |t_{ij}|^2 \leq C_v B^{ijkl}(0)(\mathbf{x}) t_{kl} t_{ij}, \quad (4.2.12)$$

para todo  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$  y todo  $\mathbf{t} = (t_{ij}) \in \mathbb{S}^3$ , es decir, los tensores  $(A^{ijkl}(0))$  y  $(B^{ijkl}(0))$  son uniformemente definidos positivos con respecto a  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ .

**Observación 4.2.4.** Nótese que la demostración para la parte correspondiente al tensor de viscosidad escalado  $(B^{ijkl}(\varepsilon))$  seguiría los mismos pasos que la demostración del Teorema 3.3-2, [30], para el tensor elástico  $(A^{ijkl}(\varepsilon))$ , ya que desde el punto de vista cualitativo sus expresiones se diferencian en cambiar las constantes de Lamé por los coeficientes de viscosidad.

Si definimos las componentes del tensor de tensiones escaladas  $\sigma^{ij}(\varepsilon; \mathbf{u}(\varepsilon)) : [0, T] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  tomando

$$\sigma^{ij,\varepsilon}(\mathbf{u}^\varepsilon)(t, \mathbf{x}^\varepsilon) =: \sigma^{ij}(\varepsilon; \mathbf{u}(\varepsilon))(t, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}^\varepsilon = \pi^\varepsilon(\mathbf{x}) \in \bar{\Omega}^\varepsilon, \quad \forall t \in [0, T], \quad (4.2.13)$$

entonces se verifica la igualdad:

$$\sigma^{ij}(\varepsilon; \mathbf{u}(\varepsilon)) = A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon; \mathbf{u}(\varepsilon)) + B^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon; \dot{\mathbf{u}}(\varepsilon)). \quad (4.2.14)$$

De la misma forma, definiremos las variantes escaladas de las fuerzas aplicadas. Sean  $\mathbf{f}(\varepsilon) : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $\mathbf{h}(\varepsilon) : [0, T] \times (\Gamma_+ \cup \Gamma_-) \rightarrow \mathbb{R}^3$  definidas por

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^\varepsilon &= (f^{i,\varepsilon})(t, \mathbf{x}^\varepsilon) =: \mathbf{f}(\varepsilon) = (f^i(\varepsilon))(t, \mathbf{x}) \\ &\quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \text{ donde } \mathbf{x}^\varepsilon = \pi^\varepsilon(\mathbf{x}) \in \Omega^\varepsilon, \forall t \in [0, T], \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^\varepsilon &= (h^{i,\varepsilon})(t, \mathbf{x}^\varepsilon) =: \mathbf{h}(\varepsilon) = (h^i(\varepsilon))(t, \mathbf{x}) \\ &\quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_+ \cup \Gamma_-, \text{ donde } \mathbf{x}^\varepsilon = \pi^\varepsilon(\mathbf{x}) \in \Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon, \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

También, definimos la condición inicial escalada  $\mathbf{u}_0(\varepsilon) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  como

$$\mathbf{u}_0(\varepsilon)(\mathbf{x}) := \mathbf{u}_0^\varepsilon(\mathbf{x}^\varepsilon) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \text{ donde } \mathbf{x}^\varepsilon = \pi^\varepsilon(\mathbf{x}) \in \Omega^\varepsilon,$$

y definimos el espacio de soluciones admisibles,

$$V(\Omega) = \{\mathbf{v} = (v_i) \in [H^1(\Omega)]^3; \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_0\}, \quad (4.2.17)$$

que es un espacio de Hilbert, cuya norma asociada denotamos por  $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ .

Por tanto, el problema variacional escalado puede expresarse como sigue:

**Problema 4.2.5.** Hallar  $\mathbf{u}(\varepsilon) : [0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tal que,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\varepsilon)(t, \cdot) &\in V(\Omega) \quad \forall t \in [0, T], \\ \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx &+ \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) \dot{e}_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &= \int_{\Omega} f^i(\varepsilon) v_i \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^i(\varepsilon) v_i \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega), \text{ c.p.d. en } (0, T), \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

$$\mathbf{u}(\varepsilon)(0, \cdot) = \mathbf{u}_0(\varepsilon)(\cdot).$$

**Observación 4.2.6.** Nótese que aún no se ha determinado el orden específico de las fuerzas aplicadas  $\mathbf{f}(\varepsilon)$  y  $\mathbf{h}(\varepsilon)$ .

La demostración de existencia y unicidad de solución para el Problema 4.2.5 la pospondremos a la Sección 4.3 (véase el Teorema 4.3.13). Asumiendo regularidad suficiente para dicha solución, podemos obtener el problema de valor en la frontera definido en el dominio de referencia, que enunciamos en el teorema que sigue.

**Teorema 4.2.7.** Asumamos las hipótesis consideradas en el Teorema 4.1.4. Si la solución  $\mathbf{u}(\varepsilon) = (u_i(\varepsilon))$  del Problema 4.2.5 es suficientemente regular, entonces también verifica el siguiente problema de valor en la frontera definido en el dominio de referencia: hallar  $\mathbf{u}(\varepsilon) = (u_i(\varepsilon)) : [0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tal que,

$$-\sigma_{||j}^{ij}(\varepsilon; \mathbf{u}(\varepsilon)) = f^i(\varepsilon) \text{ en } \Omega, \quad (4.2.19)$$

$$u_i(\varepsilon) = 0 \text{ en } \Gamma_0,$$

$$\sigma^{i3}(\varepsilon; \mathbf{u}(\varepsilon)) = h_+^i(\varepsilon) \text{ en } \Gamma_+, \quad (4.2.20)$$

$$-\sigma^{i3}(\varepsilon; \mathbf{u}(\varepsilon)) = h_-^i(\varepsilon) \text{ en } \Gamma_-, \quad (4.2.21)$$

$$\mathbf{u}(\varepsilon)(0, \cdot) = \mathbf{u}_0(\varepsilon) \text{ en } \Omega,$$

donde las funciones

$$\sigma_{||\alpha}^{ij}(\varepsilon; \mathbf{u}(\varepsilon)) := \partial_{\alpha} \sigma^{ij}(\varepsilon; \mathbf{u}(\varepsilon)) + \Gamma_{p\alpha}^i(\varepsilon) \sigma^{pj}(\varepsilon; \mathbf{u}(\varepsilon)) + \Gamma_{\alpha q}^j(\varepsilon) \sigma^{iq}(\varepsilon; \mathbf{u}(\varepsilon)), \quad (4.2.22)$$

$$\sigma_{||3}^{ij}(\varepsilon; \mathbf{u}(\varepsilon)) := \frac{1}{\varepsilon} \partial_3 \sigma^{ij}(\varepsilon; \mathbf{u}(\varepsilon)) + \Gamma_{p3}^i(\varepsilon) \sigma^{pj}(\varepsilon; \mathbf{u}(\varepsilon)) + \Gamma_{3q}^j(\varepsilon) \sigma^{iq}(\varepsilon; \mathbf{u}(\varepsilon)), \quad (4.2.23)$$

denotan las derivadas covariantes de primer orden de las componentes del tensor de tensiones escalado y donde hemos introducido la notación  $h_{\pm}^i(\varepsilon)(t, \cdot) = h^i(\varepsilon)(t, \cdot, \pm 1) \quad \forall t \in [0, T]$ .

*Demostración.* Dados los escalados descritos anteriormente en esta sección, únicamente es necesario probar los escalados de (4.2.19) y (4.2.20)–(4.2.21). Teniendo en cuenta los escalados (4.2.13) y (4.2.16) en la ecuación (4.1.23) y que los vectores normales unitarios exteriores en  $\Gamma_+$  y  $\Gamma_-$  son  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)^t$  y  $\mathbf{n} = (0, 0, -1)^t$ , respectivamente, se deducen fácilmente las condiciones de contorno sobre las correspondientes partes de la frontera del dominio de referencia (4.2.20)–(4.2.21).

A continuación, utilizaremos la notación abreviada  $\sigma^{ij}(\varepsilon) \equiv \sigma^{ij}(\varepsilon; \mathbf{u}(\varepsilon))$ ,  $\sigma^{ij,\varepsilon} \equiv \sigma^{ij,\varepsilon}(\mathbf{u}^\varepsilon)$  y la correspondiente para sus derivadas covariantes. Ahora bien, teniendo en cuenta (4.1.24) y los escalados en (4.2.2) y (4.2.13) se tiene que

$$\begin{aligned}\sigma_{||\alpha}^{ij}(\varepsilon)(t, \mathbf{x}) &= \sigma_{||\alpha}^{ij,\varepsilon}(t, \mathbf{x}^\varepsilon) = \partial_\alpha^\varepsilon \sigma^{ij,\varepsilon}(t, \mathbf{x}^\varepsilon) + \Gamma_{p\alpha}^{i,\varepsilon}(\mathbf{x}^\varepsilon) \sigma^{pj,\varepsilon}(t, \mathbf{x}^\varepsilon) + \Gamma_{\alpha q}^{j,\varepsilon}(\mathbf{x}^\varepsilon) \sigma^{iq,\varepsilon}(t, \mathbf{x}^\varepsilon) \\ &= \partial_\alpha \sigma^{ij}(\varepsilon)(t, \mathbf{x}) + \Gamma_{p\alpha}^i(\varepsilon)(\mathbf{x}) \sigma^{pj}(\varepsilon)(t, \mathbf{x}) + \Gamma_{\alpha q}^j(\varepsilon)(\mathbf{x}) \sigma^{iq}(\varepsilon)(t, \mathbf{x}), \\ \sigma_{||3}^{ij}(\varepsilon)(t, \mathbf{x}) &= \sigma_{||3}^{ij,\varepsilon}(t, \mathbf{x}^\varepsilon) = \partial_3^\varepsilon \sigma^{ij,\varepsilon}(t, \mathbf{x}^\varepsilon) + \Gamma_{p3}^{i,\varepsilon}(\mathbf{x}^\varepsilon) \sigma^{pj,\varepsilon}(t, \mathbf{x}^\varepsilon) + \Gamma_{3q}^{j,\varepsilon}(\mathbf{x}^\varepsilon) \sigma^{iq,\varepsilon}(t, \mathbf{x}^\varepsilon) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \partial_3 \sigma^{ij}(\varepsilon)(t, \mathbf{x}) + \Gamma_{p3}^i(\varepsilon)(\mathbf{x}) \sigma^{pj}(\varepsilon)(t, \mathbf{x}) + \Gamma_{3q}^j(\varepsilon)(\mathbf{x}) \sigma^{iq}(\varepsilon)(t, \mathbf{x}),\end{aligned}$$

para todo  $\mathbf{x}^\varepsilon = \pi^\varepsilon(\mathbf{x}) \in \Omega^\varepsilon$  y todo  $t \in [0, T]$ . Por tanto, teniendo en cuenta estos escalados y (4.2.15) en (4.1.22) se verifica (4.2.19). Concluimos así la demostración del teorema.  $\square$

**Observación 4.2.8.** *Los Teoremas 4.1.6 y 4.2.7 no tienen un papel relevante en el análisis asintótico formal que presentamos en este capítulo, pero sí serán útiles en el estudio de las convergencias de las componentes del tensor de tensiones cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  en los capítulos que siguen.*

Para finalizar esta sección, asumiremos que las fuerzas aplicadas escaladas son de la forma,

$$\mathbf{f}(\varepsilon)(t, \mathbf{x}) = \varepsilon^p \mathbf{f}^p(t, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \text{ y } \forall t \in [0, T], \quad (4.2.24)$$

$$\mathbf{h}(\varepsilon)(t, \mathbf{x}) = \varepsilon^{p+1} \mathbf{h}^{p+1}(t, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_+ \cup \Gamma_- \text{ y } \forall t \in [0, T], \quad (4.2.25)$$

donde  $p$  es un número natural que indicará el orden de las fuerzas de volumen y superficie, respectivamente. Sustituimos en (4.2.18) para obtener el siguiente problema:

**Problema 4.2.9.** *Hallar  $\mathbf{u}(\varepsilon) : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que,*

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\varepsilon)(t, \cdot) &\in V(\Omega) \quad \forall t \in [0, T], \\ \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx &+ \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) \dot{e}_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &= \int_{\Omega} \varepsilon^p f^{i,p} v_i \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} \varepsilon^p h^{i,p+1} v_i \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega), \text{ c.p.d. en } (0, T),\end{aligned} \quad (4.2.26)$$

$$\mathbf{u}(\varepsilon)(0, \cdot) = \mathbf{u}_0(\varepsilon)(\cdot).$$

La demostración de existencia y unicidad de solución para el Problema 4.2.9 la pospondremos a la Sección 4.3 (véase el Teorema 4.3.14).

### 4.3. Resultados preliminares

En esta sección, en primer lugar, proporcionaremos dos importantes resultados del análisis asintótico y cálculo de variaciones cuyas demostraciones se pueden consultar en

los Teoremas 3.3.1 y 4.4.1 de [30]. Posteriormente, proporcionamos algunos resultados de análisis funcional que se requieren para demostrar la existencia y unicidad de solución de las formulaciones variacionales planteadas en esta memoria.

**Teorema 4.3.1.** Sean  $\omega$  un dominio en  $\mathbb{R}^2$ ,  $\theta \in \mathcal{C}^3(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$  una aplicación inyectiva tal que los dos vectores  $\mathbf{a}_\alpha = \partial_\alpha \theta$  son linealmente independientes en todo punto de  $\bar{\omega}$  y  $\varepsilon_0 > 0$  definido en el Teorema 4.1.4. Consideremos las funciones  $\Gamma_{ij}^p(\varepsilon) = \Gamma_{ji}^p(\varepsilon)$  y  $g(\varepsilon)$  definidas en (4.2.2)–(4.2.3), las funciones  $b_{\alpha\beta}, b_\alpha^\sigma, \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma, a$ , definidas en la Sección 4.1 y las derivadas covariantes  $b_\beta^\sigma|_\alpha$  definidas por

$$b_\beta^\sigma|_\alpha := \partial_\alpha b_\beta^\sigma + \Gamma_{\alpha\tau}^\sigma b_\beta^\tau - \Gamma_{\alpha\beta}^\tau b_\tau^\sigma. \quad (4.3.1)$$

Identificamos las funciones  $b_{\alpha\beta}, b_\alpha^\sigma, \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma, b_\beta^\sigma|_\alpha$  y  $a$  con funciones en  $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma(\varepsilon) &= \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma - \varepsilon x_3 b_\beta^\sigma|_\alpha + \mathcal{O}(\varepsilon^2), & \Gamma_{\alpha\beta}^3(\varepsilon) &= b_{\alpha\beta} - \varepsilon x_3 b_\alpha^\sigma b_{\sigma\beta}, \\ \partial_3 \Gamma_{\alpha\beta}^p(\varepsilon) &= \mathcal{O}(\varepsilon), & \Gamma_{\alpha 3}^\sigma(\varepsilon) &= -b_\alpha^\sigma - \varepsilon x_3 b_\alpha^\tau b_\tau^\sigma + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \Gamma_{\alpha 3}^3(\varepsilon) &= \Gamma_{33}^p(\varepsilon) = 0, & g(\varepsilon) &= a + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned}$$

para todo  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , donde los símbolos de orden  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  y  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  se consideran con respecto a la norma  $\|\cdot\|_{0,\infty,\bar{\Omega}}$  definida en (4.2.9). Finalmente, existen unas constantes  $a_0, g_0$  y  $g_1$  tal que

$$\begin{aligned} 0 < a_0 &\leq a(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{y} \in \bar{\omega}, \\ 0 < g_0 &\leq g(\varepsilon)(\mathbf{x}) \leq g_1 \quad \forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \forall \varepsilon, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

**Observación 4.3.2.** Las funciones  $\Gamma_{ij}^p(\varepsilon), g(\varepsilon), A^{ijkl}(\varepsilon), B^{ijkl}(\varepsilon)$  convergen en  $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$  cuando  $\varepsilon$  tiende a cero.

**Observación 4.3.3.** El comportamiento asintótico de  $g(\varepsilon)$  y de las componentes contravariantes de los tensores de elasticidad y viscosidad,  $A^{ijkl}(\varepsilon), B^{ijkl}(\varepsilon)$  también implican que existen unas componentes  $\tilde{A}^{ijkl,\alpha}, \tilde{B}^{ijkl,\alpha}$  de unos tensores suficientemente regulares tal que

$$A^{ijkl}(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)} = A^{ijkl}(0)\sqrt{a} + \varepsilon \tilde{A}^{ijkl,1} + \varepsilon^2 \tilde{A}^{ijkl,2} + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (4.3.3)$$

$$B^{ijkl}(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)} = B^{ijkl}(0)\sqrt{a} + \varepsilon \tilde{B}^{ijkl,1} + \varepsilon^2 \tilde{B}^{ijkl,2} + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (4.3.4)$$

**Teorema 4.3.4.** Sean  $\omega$  un dominio en  $\mathbb{R}^2$  con frontera  $\gamma = \partial\omega$ ,  $\Omega = \omega \times (-1, 1)$ , y sea  $g \in L^p(\Omega)$ ,  $p > 1$ , una función tal que

$$\int_{\Omega} g \partial_3 v dx = 0, \text{ para todo } v \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) \text{ con } v = 0 \text{ en } \gamma \times [-1, 1].$$

Entonces  $g = 0$ .

**Observación 4.3.5.** Este resultado se sigue verificando si  $\int_{\Omega} g \partial_3 v dx = 0$  para todo  $v \in H^1(\Omega)$  tal que  $v = 0$  en  $\Gamma_0 = \gamma_0 \times [-1, 1]$ . Utilizaremos este resultado de esta forma en lo que sigue.



Antes de presentar los resultados de existencia y unicidad de solución de los problemas que estudiaremos en esta parte, recordemos una desigualdad de Korn en coordenadas curvilíneas, cuya demostración se puede encontrar en el Teorema 1.7-4 en [30]. Como en el caso elástico, esta desigualdad será necesaria para asegurar la existencia y unicidad de solución del problema variacional tridimensional viscoelástico en coordenadas curvilíneas.

**Teorema 4.3.6.** *Sea  $\Omega^\varepsilon$  un dominio en  $\mathbb{R}^3$  y sea  $\Theta$  un  $C^2$ -difeomorfismo sobreyectivo de  $\bar{\Omega}^\varepsilon$  en  $\Theta(\bar{\Omega}^\varepsilon) = \bar{\Omega}^*$ , de tal forma que los vectores  $\mathbf{g}_i = \partial_i \Theta$  son linealmente independientes en todos los puntos de  $\bar{\Omega}^\varepsilon$ . Sea  $\Gamma_0^\varepsilon$  un subconjunto de  $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega^\varepsilon$   $d\Gamma^\varepsilon$ -medible de medida no nula y sea  $V(\Omega^\varepsilon)$  el espacio definido en (4.1.15). Entonces, existe una constante  $C = C(\Omega^\varepsilon, \Gamma_0^\varepsilon, \Theta)$  tal que*

$$\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \leq C \left( \sum_{i,j} |e_{ij}(\mathbf{v})|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}, \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega).$$

A continuación, presentaremos varios resultados relacionados con la existencia y unicidad de solución de los problemas presentados anteriormente y de otros que aparecerán en lo que sigue. Además, especificaremos la regularidad de estas soluciones dependiendo de la regularidad de los datos. Demostraremos estos resultados considerando un problema abstracto en el que podrán ser enmarcados los problemas en cuestión.

Sea  $V$  un espacio de Hilbert. Denotemos por  $(\cdot, \cdot)_V$  y  $\|\cdot\|_V$  el producto interior y la norma asociados, respectivamente. Consideremos los operadores acotados  $B : V \rightarrow V$ ,  $A : V \rightarrow V$  y una función  $f : (0, T) \rightarrow V$ . Sea también  $u_0 \in V$ . Estamos interesados en estudiar el problema que enunciamos a continuación.

**Problema 4.3.7.** *Hallar  $u : [0, T] \rightarrow V$  tal que,*

$$\begin{aligned} B\dot{u}(t) + Au(t) &= f(t) \text{ c.t.p. } t \in (0, T), \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

**Teorema 4.3.8.** *Supongamos que  $B : V \rightarrow V$  es un operador fuertemente monótono, Lipschitz-continuo y  $A : V \rightarrow V$  es un operador Lipschitz-continuo. Además, sean  $u_0 \in V$  y  $f \in L^2(0, T; V)$ . Entonces, el Problema 4.3.7 tiene solución única  $u \in H^1(0, T; V)$ .*

*Demostración.* Dado  $z \in L^2(0, T; V)$ , sea  $\phi(z) = v_z$  la solución de la siguiente ecuación:

$$Bv_z(t) = f(t) - A \left( \int_0^t z(s) ds + u_0 \right) \text{ c.t.p. } t \in (0, T). \quad (4.3.5)$$

La existencia y unicidad de  $v_z(t)$  viene dada por las propiedades de  $B$ ,  $A$  y  $f$ . Además,  $v_z \in L^2(0, T; V)$  (véase, por ejemplo, [150]). Consideremos ahora  $z_1, z_2 \in L^2(0, T; V)$ , entonces obtenemos:

$$B\phi(z_1) - B\phi(z_2) = A \left( \int_0^t z_1(s) ds + u_0 \right) - A \left( \int_0^t z_2(s) ds + u_0 \right) \text{ c.t.p. } t \in (0, T).$$

Utilizando el producto interior en  $V$ , multiplicamos ambos miembros de esta ecuación por  $\phi(z_1) - \phi(z_2)$ . En el miembro de la izquierda, dado que el operador  $B$  es fuertemente monótono, se tiene que existe una constante  $c_B > 0$  tal que,

$$(B\phi(z_1) - B\phi(z_2), \phi(z_1) - \phi(z_2))_V \geq c_B \|\phi(z_1) - \phi(z_2)\|_V^2. \quad (4.3.6)$$

Además, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en el miembro de la derecha de la misma ecuación, que  $A$  es un operador Lipschitz-continuo y aplicando la desigualdad de Young ( $ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2$ ,  $a, b, \epsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\epsilon > 0$ ), obtenemos existen unas constantes  $c_A, \tilde{c}_A > 0$  tales que

$$\begin{aligned} & \left( A \left( \int_0^t z_1(s) ds + u_0 \right) - A \left( \int_0^t z_2(s) ds + u_0 \right), \phi(z_1) - \phi(z_2) \right)_V \\ & \leq \left\| A \left( \int_0^t z_1(s) ds + u_0 \right) - A \left( \int_0^t z_2(s) ds + u_0 \right) \right\|_V \|\phi(z_1) - \phi(z_2)\|_V \\ & \leq c_A \left\| \int_0^t (z_1(s) - z_2(s)) ds \right\|_V \|\phi(z_1) - \phi(z_2)\|_V \\ & \leq \tilde{c}_A \left\| \int_0^t (z_1(s) - z_2(s)) ds \right\|_V^2 + \delta \|\phi(z_1) - \phi(z_2)\|_V^2, \end{aligned}$$

donde  $\delta$  es un parámetro suficientemente pequeño. Por tanto, junto con (4.3.6), tenemos que existe una constante  $c_{A,B} > 0$  tal que,

$$\|\phi(z_1) - \phi(z_2)\|_V^2(t) \leq c_{A,B} \left\| \int_0^t (z_1(s) - z_2(s)) ds \right\|_V^2.$$

Integrando a ambos lados de la desigualdad se tiene que

$$\int_0^t \|\phi(z_1) - \phi(z_2)\|_V^2(s) ds \leq c_{A,B} \int_0^t \int_0^s \|z_1(r) - z_2(r)\|_V^2 dr ds.$$

Ahora bien, de esta desigualdad, utilizando argumentos conocidos (véase, por ejemplo, el Teorema 1.6 y la Proposición 3.1 en [150]), tenemos que una potencia de la función  $\phi$  es contractiva en  $L^2(0, T; V)$ . Por tanto, por el Teorema del punto fijo de Banach, existe un único  $z^* \in L^2(0, T; V)$  tal que  $\phi(z^*(t)) = z^*(t)$  c.t.p.  $t \in (0, T)$ . Sea  $v = z^*$  y  $u(t) = \int_0^t z^*(s) ds + u_0$ . Entonces,  $\dot{u} = v$  y de (4.3.5) obtenemos que

$$Bv(t) = f(t) - Au(t), \text{ c.t.p. } t \in (0, T),$$

y como consecuencia,

$$B\dot{u}(t) + Au(t) = f(t) \text{ c.t.p. } t \in (0, T).$$

Además  $u(0) = u_0$  y  $v = \dot{u} \in L^2(0, T; V)$ . Por tanto,  $u \in H^1(0, T; V)$ . Además, la solución es única como consecuencia de la unicidad del punto fijo.  $\square$



**Observación 4.3.9.** Una demostración alternativa para este teorema también se puede consultar en el Teorema 3.3, [150], donde el autor utiliza explícitamente la inversa del operador  $B$  y el teorema del punto fijo de Banach.

Además, la existencia y unicidad de solución de las ecuaciones evolutivas no homogéneas, cuando el operador  $B$  es la identidad, se puede encontrar en el Capítulo 6, [167]. En [104], se puede encontrar la demostración para la versión escalar para el caso cuasiestático sin fuerzas aplicadas. En el Capítulo 6, [142], se prueba que se pueden anular estas restricciones obteniendo unicidad de solución utilizando herramientas de la teoría de semigrupos.

**Corolario 4.3.10.** Bajo las hipótesis del Teorema 4.3.8 si, además,  $\dot{f} \in L^2(0, T; V)$  y los operadores  $A$  y  $B$  son lineales, el Problema 4.3.7 tiene una solución única  $u \in H^2(0, T; V)$ .

*Demostración.* La existencia y unicidad de  $u \in H^1(0, T; V)$  es consecuencia del Teorema 4.3.8. Veamos que en efecto, la solución tiene más regularidad. Para ello consideremos la ecuación,

$$B\dot{z}(t) + Az(t) = \dot{f}(t), \text{ c.t.p. } t \in (0, T), \quad (4.3.7)$$

con la condición inicial  $Bz(0) = f(0) - Au_0 \in V$ . Por el Teorema 4.3.8 existe una única solución de (4.3.7) tal que  $z \in H^1(0, T; V)$ .

Ahora, si integramos la ecuación, por la linealidad del operador  $B$  tenemos que

$$B(z(t)) - B(z(0)) + \int_0^t Az(s)ds = f(t) - f(0).$$

Sea  $w(t) = u_0 + \int_0^t z(s)ds$ , por lo que  $\dot{w}(t) = z(t)$  y  $w(0) = u_0$ . Como consecuencia de la linealidad del operador  $A$ , obtenemos que

$$B\dot{w}(t) + A(w(t) - u_0) = f(t) - Au_0,$$

por tanto,

$$B\dot{w}(t) + Aw(t) = f(t).$$

Dado que por el Teorema 4.3.8 existe una única solución para esta ecuación, deducimos que  $u = w \in H^1(0, T; V)$ . Además, como  $z$  es solución de (4.3.7) entonces  $\dot{u} = \dot{w} = z \in H^1(0, T; V)$ . Por tanto, concluimos que  $u \in H^2(0, T; V)$ .  $\square$

Una vez demostrada la existencia y unicidad de solución del problema abstracto, estamos en condiciones de enunciar los teoremas de existencia y unicidad de solución de los Problemas 4.1.5 y 4.2.5.

**Teorema 4.3.11.** Sea  $\Omega^\varepsilon$  el dominio en  $\mathbb{R}^3$  definido en la Sección 4.1 y sea  $\Theta$  un  $\mathcal{C}^2$ -difeomorfismo de  $\bar{\Omega}^\varepsilon$  en su imagen  $\Theta(\bar{\Omega}^\varepsilon)$ , tal que los tres vectores  $\mathbf{g}_i^\varepsilon(\mathbf{x}) = \partial_i^\varepsilon \Theta(\mathbf{x}^\varepsilon)$  son linealmente independientes para todo  $\mathbf{x}^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon$ . Sea  $\Gamma_0^\varepsilon$  un subconjunto  $d\Gamma^\varepsilon$ -medible de  $\Gamma^\varepsilon =$

$\partial\Omega^\varepsilon$  con medida no nula. Sea  $f^{i,\varepsilon} \in L^2(0, T; L^2(\Omega^\varepsilon))$ ,  $h^{i,\varepsilon} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1^\varepsilon))$ , donde  $\Gamma_1^\varepsilon := \Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon$ . Sea  $\mathbf{u}_0^\varepsilon \in V(\Omega^\varepsilon)$ . Entonces, existe una única solución  $\mathbf{u}^\varepsilon = (u_i^\varepsilon) : [0, T] \times \Omega^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$  para el Problema 4.1.5. Además  $\mathbf{u}^\varepsilon \in H^1(0, T; V(\Omega^\varepsilon))$  y si  $\dot{f}^{i,\varepsilon} \in L^2(0, T; L^2(\Omega^\varepsilon))$ ,  $\dot{h}^{i,\varepsilon} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1^\varepsilon))$ , entonces  $\mathbf{u}^\varepsilon \in H^2(0, T; V(\Omega^\varepsilon))$ .

*Demostración.* Por simplicidad, sea  $V = V(\Omega^\varepsilon)$ . Por el Teorema de representación de Riesz (véase el Teorema 4.11 en [14], por ejemplo) tenemos que existen operadores lineales Lipschitz-continuos  $B : V \rightarrow V$ ,  $A : V \rightarrow V$  y una función  $\mathbf{f} \in V$  tales que:

$$\begin{aligned} (B\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon)_V &:= \int_{\Omega^\varepsilon} B^{ijkl,\varepsilon} e_{k||l}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) e_{i||j}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) \sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon, \\ (A\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon)_V &:= \int_{\Omega^\varepsilon} A^{ijkl,\varepsilon} e_{k||l}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) e_{i||j}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) \sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon, \\ (\mathbf{f}, \mathbf{v}^\varepsilon)_V &:= \int_{\Omega^\varepsilon} f^{i,\varepsilon} v_i^\varepsilon \sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon + \int_{\Gamma_1^\varepsilon} h^{i,\varepsilon} v_i^\varepsilon \sqrt{g^\varepsilon} d\Gamma^\varepsilon, \end{aligned}$$

para todo  $\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon \in V$ . Los operadores  $B$  y  $A$  son fuertemente monótonos como consecuencia de la elipticidad de los tensores de cuarto orden  $(A^{ijkl,\varepsilon})$  y  $(B^{ijkl,\varepsilon})$  por (4.2.4), (4.2.10) y (4.2.5), (4.2.11), respectivamente, y la desigualdad de Korn del Teorema 4.3.6. Además son Lipschitz-continuas por la linealidad de los tensores  $(A^{ijkl,\varepsilon})$ ,  $(B^{ijkl,\varepsilon})$  y  $e_{i||j}^\varepsilon$ , su acotación con respecto a la norma  $\|\cdot\|_V$  (véase (4.1.16)–(4.1.20)) y la acotación de  $g$  (véase (4.3.2)). Por tanto, el Problema 4.1.5 puede escribirse como:

**Problema 4.3.12.** Hallar  $\mathbf{u}^\varepsilon : [0, T] \times \Omega^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\varepsilon(t) &\in V \quad \forall t \in [0, T], \\ B\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t) + A\mathbf{u}^\varepsilon(t) &= \mathbf{f}(t) \text{ c.t.p. } t \in (0, T), \\ \mathbf{u}^\varepsilon(0) &= \mathbf{u}_0^\varepsilon \text{ en } V. \end{aligned}$$

Por tanto, podemos aplicar el Teorema 4.3.8 y concluir que el problema tiene solución única  $\mathbf{u}^\varepsilon \in H^1(0, T; V)$ . Además, si  $\dot{f}^{i,\varepsilon} \in L^2(0, T; L^2(\Omega^\varepsilon))$ ,  $\dot{h}^{i,\varepsilon} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1^\varepsilon))$ , estamos en las condiciones del Corolario 4.3.10 y concluimos que  $\mathbf{u}^\varepsilon \in H^2(0, T; V)$ .  $\square$

**Teorema 4.3.13.** Sea  $\Omega$  un dominio en  $\mathbb{R}^3$  definido como en la Sección 4.2 y sea  $\Theta$  un  $C^2$ -difeomorfismo de  $\bar{\Omega}$  en su imagen  $\Theta(\bar{\Omega})$ , tal que los tres vectores  $\mathbf{g}_i = \partial_i \Theta(\mathbf{x})$  son linealmente independientes para todo  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ . Sean  $f^i(\varepsilon) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $h^i(\varepsilon) \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$ , donde  $\Gamma_1 := \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ . Sea  $\mathbf{u}_0(\varepsilon) \in V(\Omega)$ . Entonces, existe una única solución  $\mathbf{u}(\varepsilon) = (u_i(\varepsilon)) : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  para el Problema 4.2.5 y es tal que  $\mathbf{u}(\varepsilon) \in H^1(0, T; V(\Omega))$ . Además, si  $\dot{f}^i(\varepsilon) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $\dot{h}^i(\varepsilon) \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$ , entonces  $\mathbf{u}(\varepsilon) \in H^2(0, T; V(\Omega))$ .

*Demostración.* La demostración de este teorema es análoga a la correspondiente al Teorema 4.3.11, teniendo en cuenta la elipticidad de los tensores de cuarto orden escalados en (4.2.10)–(4.2.11), el Teorema 4.3.6 (versión escalada) y aplicando un corolario del Teorema 4.3.8 con  $V = V(\Omega)$ . Además, si  $\dot{f}^i(\varepsilon) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $\dot{h}^i(\varepsilon) \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$ , estamos en las condiciones del Corolario 4.3.10 y concluimos que  $\mathbf{u}(\varepsilon) \in H^2(0, T; V(\Omega))$ .  $\square$

**Teorema 4.3.14.** Sea  $\Omega$  un dominio en  $\mathbb{R}^3$  y sea  $\Theta$  un  $C^2$ -difeomorfismo de  $\bar{\Omega}$  en su imagen  $\Theta(\bar{\Omega})$ , tal que los tres vectores  $\mathbf{g}_i = \partial_i \Theta(\mathbf{x})$  son linealmente independientes para todo  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ . Sean  $f^{i,p} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $h^{i,p} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$ , donde  $\Gamma_1 := \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ . Sea  $\mathbf{u}_0(\varepsilon) \in V(\Omega)$ . Entonces, existe una única solución  $\mathbf{u}(\varepsilon) = (u_i)(\varepsilon) : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  verificando el Problema 4.2.9. Además,  $\mathbf{u}(\varepsilon) \in H^1(0, T; V(\Omega))$ . Además, si  $\dot{f}^{i,p} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $\dot{h}^{i,p} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$ , entonces  $\mathbf{u}(\varepsilon) \in H^2(0, T; V(\Omega))$ .

*Demostración.* La demostración de este teorema es análoga a la correspondiente del Teorema 4.3.11, teniendo en cuenta la elipticidad de los tensores escalados de cuarto orden en (4.2.10)–(4.2.11), el Teorema 4.3.6 (versión escalada) y aplicando un corolario del Teorema 4.3.8 con  $V = V(\Omega)$ . Además, si  $\dot{f}^{i,p} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $\dot{h}^{i,p} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$ , estamos en las condiciones del Corolario 4.3.10 y concluimos que  $\mathbf{u}(\varepsilon) \in H^2(0, T; V(\Omega))$ .  $\square$

A continuación, enunciaremos un resultado que será útil en el análisis asintótico formal detallado en la siguiente sección. Además, este resultado nos proporcionará los argumentos necesarios para probar la existencia y unicidad de solución de los problemas bidimensionales que deduciremos del análisis asintótico. Empezaremos definiendo algunas propiedades que nos harán falta para la obtención de dicho resultado.

Sea  $X$  un espacio de Hilbert y consideremos el funcional  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ . Denotemos por  $\|\cdot\|_X$  a la norma inducida por el producto interior en  $X$ . Diremos que  $a(\cdot, \cdot)$  es una forma bilineal en  $X$  si es lineal con respecto a cada argumento. Además, la forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  es continua o equivalentemente, acotada, si existe una constante  $M > 0$  tal que

$$|a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in X.$$

La forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  es  $X$ -elíptica si existe una constante  $m > 0$  tal que

$$a(v, v) \geq m \|v\|^2 \quad \forall v \in X$$

y  $a(\cdot, \cdot)$  es simétrica si

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in X.$$

**Teorema 4.3.15.** Sea  $\tilde{V} := H^1(0, T; X)$ ,  $f \in L^p(0, T; X)$  con  $p \geq 2$ ,  $\Sigma_0 \in X$  y una constante  $k > 0$ . Sean  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal, acotada,  $X$ -elíptica,  $b : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal simétrica, acotada y  $X$ -elíptica y  $c : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal acotada. Entonces, existe  $\Sigma : [0, T] \rightarrow X$  única solución del problema

$$a(\Sigma, \Phi) + b(\dot{\Sigma}, \Phi) - c\left(\int_0^t e^{-k(t-s)} \Sigma(s) ds, \Phi\right) = (f(t), \Phi), \quad (4.3.8)$$

$$\begin{aligned} \forall \Phi \in X, \text{ c.p.d. en } (0, T), \\ \Sigma(0) = \Sigma_0, \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

y tal que  $\Sigma \in \tilde{V}$ . Además, si  $\dot{f} \in L^2(0, T; X)$ , entonces  $\Sigma \in H^2(0, T; X)$ .

*Demostración.* Primero, consideraremos el siguiente problema auxiliar

$$a(\Sigma_\theta, \Phi) + b(\dot{\Sigma}_\theta, \Phi) = (f(t), \Phi) + c(\theta, \Phi), \quad \forall \Phi \in X \text{ c.p.d. en } (0, T), \quad (4.3.10)$$

$$\Sigma_\theta(0) = \Sigma_0, \quad (4.3.11)$$

donde  $\theta \in \tilde{V}$ . Por el Teorema de Representación de Riesz (véase el Teorema 4.11 en [14], por ejemplo) tenemos que existen unos operadores lineales acotados  $\tilde{B} : X \rightarrow X$ ,  $\tilde{A} : X \rightarrow X$  y  $\tilde{f}(t) \in X$  tal que

$$\begin{aligned} (\tilde{B}\Sigma_\theta, \Phi) &:= b(\Sigma_\theta, \Phi), \\ (\tilde{A}\Sigma_\theta, \Phi) &:= a(\Sigma_\theta, \Phi), \\ (\tilde{f}(t), \Phi) &:= (f(t), \Phi) + c(\theta, \Phi), \end{aligned}$$

para todo  $\Sigma_\theta, \Phi \in X$  y todo  $t \in [0, T]$ . Además, los operadores  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  son fuertemente monótonos por las hipótesis sobre las formas bilineales  $a$  y  $b$ , respectivamente. Por tanto, siguiendo argumentos similares a los utilizados en la demostración del Teorema 4.3.8, concluimos que existe una única solución del problema auxiliar (4.3.10)–(4.3.11) verificando  $\Sigma_\theta \in \tilde{V}$ . Ahora, consideremos el operador  $\Psi : \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}$  dado por,

$$\Psi\theta(t) = \int_0^t e^{-k(t-s)} \Sigma_\theta(s) ds,$$

donde  $\Sigma_\theta$  es la solución de (4.3.10)–(4.3.11). Sean  $\theta_1, \theta_2, \Sigma_{\theta_1}, \Sigma_{\theta_2} \in \tilde{V}$ , por (4.3.10) y dado que la forma bilineal  $b$  es simétrica, obtenemos que,

$$a(\Sigma_{\theta_1} - \Sigma_{\theta_2}, \Sigma_{\theta_1} - \Sigma_{\theta_2}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (b(\Sigma_{\theta_1} - \Sigma_{\theta_2}, \Sigma_{\theta_1} - \Sigma_{\theta_2})) = -c(\theta_1 - \theta_2, \Sigma_{\theta_2} - \Sigma_{\theta_1}).$$

Dado que la forma bilineal  $a$  es elíptica se tiene que,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (b(\Sigma_{\theta_1} - \Sigma_{\theta_2}, \Sigma_{\theta_1} - \Sigma_{\theta_2})) \leq -c(\theta_1 - \theta_2, \Sigma_{\theta_2} - \Sigma_{\theta_1}).$$

Integrando con respecto a la variable temporal, obtenemos que,

$$b(\Sigma_{\theta_1} - \Sigma_{\theta_2}, \Sigma_{\theta_1} - \Sigma_{\theta_2}) \leq - \int_0^t c(\theta_1 - \theta_2, \Sigma_{\theta_2} - \Sigma_{\theta_1}) ds. \quad (4.3.12)$$

Además, por la continuidad de la forma bilineal  $c$ , existe una constante  $c_1 > 0$  tal que

$$\begin{aligned} - \int_0^t c(\theta_1 - \theta_2, \Sigma_{\theta_2} - \Sigma_{\theta_1}) ds &\leq \left\| \int_0^t c(\theta_1 - \theta_2, \Sigma_{\theta_2} - \Sigma_{\theta_1}) ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|c(\theta_1 - \theta_2, \Sigma_{\theta_2} - \Sigma_{\theta_1})\| ds \leq c_1 \int_0^t \|\theta_1 - \theta_2\| \|\Sigma_{\theta_2} - \Sigma_{\theta_1}\| ds \\ &\leq \frac{c_1}{2} \int_0^t (\|\theta_1 - \theta_2\|^2 + \|\Sigma_{\theta_2} - \Sigma_{\theta_1}\|^2) ds. \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

Por otra parte, ya que  $b$  es una forma bilineal elíptica, existe una constante  $c_2 > 0$  tal que

$$\frac{1}{2}b(\Sigma_{\theta_1} - \Sigma_{\theta_2}, \Sigma_{\theta_1} - \Sigma_{\theta_2}) \geq c_2 \|\Sigma_{\theta_1} - \Sigma_{\theta_2}\|^2,$$

por tanto, junto con (4.3.12)–(4.3.13) obtenemos la siguiente desigualdad,

$$c_2 \|\Sigma_{\theta_1} - \Sigma_{\theta_2}\|^2 \leq \frac{c_1}{2} \int_0^t \|\theta_1 - \theta_2\|^2 ds + \frac{c_1}{2} \int_0^t \|\Sigma_{\theta_2} - \Sigma_{\theta_1}\|^2 ds.$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall (véase el Lema 3.2 en [150], por ejemplo), tenemos que existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\|\Sigma_{\theta_1}(t) - \Sigma_{\theta_2}(t)\|^2 \leq C \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|^2 ds,$$

para todo  $t \in [0, T]$ . Por tanto,

$$\|\Psi\theta_1(t) - \Psi\theta_2(t)\|^2 \leq C \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|^2 ds,$$

para todo  $t \in [0, T]$ . Nótese que reiterando esta desigualdad  $n$  veces,  $n \geq 2$ , hallamos que

$$\|\Psi^n\theta_1(t) - \Psi^n\theta_2(t)\|^2 \leq C^n \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{n-1}} \|\theta_1(s_n) - \theta_2(s_n)\|^2 ds_n \cdots ds_1, \quad (4.3.14)$$

donde  $\Psi^n$  denota la  $n$ -ésima potencia del operador  $\Psi$ . Entonces, se tiene que

$$\|\Psi^n\theta_1 - \Psi^n\theta_2\|_{L^2(0,T;X)}^2 \leq \frac{C^n T^n}{n!} \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^2(0,T;X)}^2. \quad (4.3.15)$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C^n T^n}{n!} = 0$ , la desigualdad anterior implica que para un  $n$  suficientemente grande, la potencia  $\Psi^n$  es una aplicación contractiva en  $L^2(0, T; X)$ . Además,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Psi\theta(t)) = \Sigma_\theta(t) - k \int_0^t e^{-k(t-s)} \Sigma_\theta(s) ds.$$

Como consecuencia, existen una  $n \in \mathbb{N}$  y una  $k \in [0, 1)$  tales que  $\|\Psi^n\theta_1 - \Psi^n\theta_2\|_{\tilde{V}} < k \|\theta_1 - \theta_2\|_{\tilde{V}}$ . Por un corolario del Teorema del punto fijo de Banach, existe una única  $\theta^*$  tal que  $\Psi\theta^*(t) = \theta^*(t)$ ,  $\forall t \in [0, T]$  (véanse, por ejemplo, el Teorema 1.6 y la Proposición 3.1 en [150]). Por tanto, el problema auxiliar (4.3.10)–(4.3.11) para  $\theta = \theta^*$  es una reformulación del problema original (4.3.8)–(4.3.9). Entonces, existe una única solución del problema original tal que  $\Sigma \in \tilde{V}$ . Además, si  $\dot{f} \in L^2(0, T; X)$ , aplicando una versión modificada de los argumentos utilizados en el Corolario 4.3.10, concluimos que  $\Sigma \in H^2(0, T; X)$ .  $\square$

Denotemos por  $Q_\infty(\omega)$  el conjunto de las funciones  $\zeta = (\zeta_{\alpha\beta\sigma\tau}) : \omega \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  que verifican:

- (a)  $\zeta_{\alpha\beta\sigma\tau} \in L^\infty(\omega)$ ,  $1 \leq \alpha, \beta, \sigma, \tau \leq 2$ .
- (b)  $\zeta \Phi \cdot \Sigma = \Phi \cdot \zeta \Sigma$ ,  $\forall \Phi, \Sigma \in \mathbb{S}^2$ , *c.p.d.* en  $\omega$ .
- (c) Existe una constante  $c_m > 0$  tal que  $\zeta \Phi \cdot \Phi \geq c_m |\Phi|^2$ ,  $\forall \Phi \in \mathbb{S}^2$ , *c.p.d.* en  $\omega$ .

Ahora, en particular, sea  $\tilde{V} := H^1(0, T; \mathcal{Q})$ , donde  $\mathcal{Q} := \{\Phi = (\Phi_{\alpha\beta}), \Phi_{\alpha\beta} = \Phi_{\beta\alpha} \in L^2(\omega)\}$ . Nótese que  $(\mathcal{Q}, (\cdot, \cdot))$  es un espacio de Hilbert. Supongamos que  $(a^{\alpha\beta\sigma\tau}), (b^{\alpha\beta\sigma\tau}), (c^{\alpha\beta\sigma\tau}) \in Q_\infty(\omega)$  y definamos las formas bilineales  $a, b, c : \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  por:

$$a(\Sigma, \Phi) := \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \Sigma_{\sigma\tau} \Phi_{\alpha\beta} \sqrt{a} dy, \quad (4.3.16)$$

$$b(\Sigma, \Phi) := \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \Sigma_{\sigma\tau} \Phi_{\alpha\beta} \sqrt{a} dy, \quad (4.3.17)$$

$$c(\Sigma, \Phi) := \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \Sigma_{\sigma\tau} \Phi_{\alpha\beta} \sqrt{a} dy, \quad (4.3.18)$$

para todo  $\Sigma, \Phi \in \mathcal{Q}$ . Entonces, las formas bilineales verifican las hipótesis requeridas por el Teorema 4.3.15. En lo que sigue, utilizaremos este resultado en un marco similar, en particular, en el estudio asintótico formal que desarrollaremos en la Sección 4.4 y para probar la existencia y unicidad de solución de los problemas bidimensionales derivados de dicho estudio, en los próximos capítulos.

## 4.4. Análisis asintótico formal

En esta sección, reflejaremos los pasos más relevantes en la construcción del desarrollo asintótico de la variable incógnita escalada  $\mathbf{u}(\varepsilon)$ , incluyendo la caracterización del término de orden cero y el desarrollo de resultados clave que darán como resultado las ecuaciones bidimensionales de los problemas de láminas viscoelásticas.

Supongamos que  $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^3(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$  y tal que la incógnita escalada  $\mathbf{u}(\varepsilon)$  y la condición inicial escalada  $\mathbf{u}_0(\varepsilon)$  admiten un desarrollo asintótico de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\varepsilon) &= \mathbf{u}^0 + \varepsilon \mathbf{u}^1 + \varepsilon^2 \mathbf{u}^2 + \dots \quad \text{con } \mathbf{u}^0 \neq \mathbf{0}, \\ \mathbf{u}_0(\varepsilon) &= \mathbf{u}_0^0 + \varepsilon \mathbf{u}_0^1 + \varepsilon^2 \mathbf{u}_0^2 + \dots \quad \text{con } \mathbf{u}_0^0(\cdot) = \mathbf{u}^0(0, \cdot), \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

donde  $\mathbf{u}^0(t) \in V(\Omega)$ ,  $\mathbf{u}^q(t) \in [H^1(\Omega)]^3$  *c.t.p.*  $t \in (0, T)$  y  $\mathbf{u}_0^0 \in V(\Omega)$ ,  $\mathbf{u}_0^q \in [H^1(\Omega)]^3$  con  $q \geq 1$ . La hipótesis (4.4.1) implica un desarrollo asintótico para las deformaciones linealizadas escaladas como sigue:

$$e_{i||j}(\varepsilon) \equiv e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{u}(\varepsilon)) = \frac{1}{\varepsilon} e_{i||j}^{-1} + e_{i||j}^0 + \varepsilon e_{i||j}^1 + \varepsilon^2 e_{i||j}^2 + \varepsilon^3 e_{i||j}^3 + \dots,$$

donde,

$$\begin{cases} e_{\alpha||\beta}^{-1} = 0, \\ e_{\alpha||3}^{-1} = \frac{1}{2}\partial_3 u_\alpha^0, \\ e_{3||3}^{-1} = \partial_3 u_3^0, \end{cases} \quad \begin{cases} e_{\alpha||\beta}^0 = \frac{1}{2}(\partial_\beta u_\alpha^0 + \partial_\alpha u_\beta^0) - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma u_\sigma^0 - b_{\alpha\beta} u_3^0, \\ e_{\alpha||3}^0 = \frac{1}{2}(\partial_3 u_\alpha^1 + \partial_\alpha u_3^0) + b_\alpha^\sigma u_\sigma^0, \\ e_{3||3}^0 = \partial_3 u_3^1, \end{cases} \quad (4.4.2)$$

$$\begin{cases} e_{\alpha||\beta}^1 = \frac{1}{2}(\partial_\beta u_\alpha^1 + \partial_\alpha u_\beta^1) - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma u_\sigma^1 - b_{\alpha\beta} u_3^1 + x_3(b_{\beta|\alpha}^\sigma u_\sigma^0 + b_\alpha^\sigma b_{\sigma\beta} u_3^0), \\ e_{\alpha||3}^1 = \frac{1}{2}(\partial_3 u_\alpha^2 + \partial_\alpha u_3^1) + b_\alpha^\sigma u_\sigma^1 + x_3 b_\alpha^\tau b_\tau^\sigma u_\sigma^0, \\ e_{3||3}^1 = \partial_3 u_3^2. \end{cases}$$

Además, las funciones  $e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v})$  admiten el siguiente desarrollo,

$$e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v}) = \frac{1}{\varepsilon} e_{i||j}^{-1}(\mathbf{v}) + e_{i||j}^0(\mathbf{v}) + \varepsilon e_{i||j}^1(\mathbf{v}) + \dots,$$

donde,

$$\begin{cases} e_{\alpha||\beta}^{-1}(\mathbf{v}) = 0, \\ e_{\alpha||3}^{-1}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\partial_3 v_\alpha, \\ e_{3||3}^{-1}(\mathbf{v}) = \partial_3 v_3, \end{cases} \quad \begin{cases} e_{\alpha||\beta}^0(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\partial_\beta v_\alpha + \partial_\alpha v_\beta) - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma v_\sigma - b_{\alpha\beta} v_3, \\ e_{\alpha||3}^0(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\partial_\alpha v_3 + b_\alpha^\sigma v_\sigma, \\ e_{3||3}^0(\mathbf{v}) = 0, \end{cases} \quad (4.4.3)$$

$$\begin{cases} e_{\alpha||\beta}^1(\mathbf{v}) = x_3 b_{\beta|\alpha}^\sigma v_\sigma + x_3 b_\alpha^\sigma b_{\sigma\beta} v_3, \\ e_{\alpha||3}^1(\mathbf{v}) = x_3 b_\alpha^\tau b_\tau^\sigma v_\sigma, \\ e_{3||3}^1(\mathbf{v}) = 0. \end{cases}$$

Tras sustituir estos desarrollos en (4.2.26), procedemos a caracterizar los diferentes términos de las expansiones propuestas considerando diferentes valores para  $p$ , esto es, tomando diferentes órdenes de las fuerzas aplicadas. Supongamos que,

$$\partial_3 \mathbf{u}_0^0 = \mathbf{0}, \quad (4.4.4)$$

esto es, que el término de orden cero de la condición inicial es independiente de la variable transversal. Asumamos también que la condición inicial para las deformaciones linealizadas escaladas es tal que

$$e_{i||j}^0(0, \cdot) = e_{i||j}^1(0, \cdot) = 0, \quad (4.4.5)$$



esto es, que las deformaciones al inicio del periodo de observación son al menos de orden  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  (ya que por (4.4.2) y (4.4.4) tenemos que  $e_{i||j}^{-1}(0, \cdot) = 0$ ).

Identifiquemos ahora el término principal  $\mathbf{u}^0$  del desarrollo (4.4.1) cancelando los demás términos de las potencias de  $\varepsilon$  sucesivas en las ecuaciones del Problema 4.2.9. Mostraremos que  $\mathbf{u}^0$  es solución de un problema bidimensional de una membrana o lámina flexural viscoelástica dependiendo de varios factores y, en ambos casos, para fuerzas aplicadas de determinados órdenes. Dado  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in [H^1(\omega)]^3$ , denotemos por

$$\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) := \frac{1}{2}(\partial_\beta \eta_\alpha + \partial_\alpha \eta_\beta) - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \eta_\sigma - b_{\alpha\beta} \eta_3, \quad (4.4.6)$$

las componentes covariantes del tensor de cambio de métrica linealizado asociado a un campo de desplazamientos  $\eta_i \mathbf{a}^i$  de la superficie  $S$ . Además, dado  $\boldsymbol{\eta} \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times H^2(\omega)$ , denotemos por

$$\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) := \partial_{\alpha\beta} \eta_3 - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \partial_\sigma \eta_3 - b_{\alpha\beta}^\sigma \partial_\sigma \eta_3 + b_{\alpha\beta}^\sigma (\partial_\beta \eta_\sigma - \Gamma_{\beta\sigma}^\tau \eta_\tau) + b_{\beta\alpha}^\tau (\partial_\alpha \eta_\tau - \Gamma_{\alpha\tau}^\sigma \eta_\sigma) + b_{\beta|\alpha}^\tau \eta_\tau, \quad (4.4.7)$$

a las componentes covariantes del tensor de cambio de curvatura linealizado asociado a un desplazamiento  $\eta_i \mathbf{a}^i$  de la superficie  $S$ . También, consideremos los espacios:

$$\begin{aligned} V(\omega) &:= \{\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in [H^1(\omega)]^3; \eta_i = 0 \text{ en } \gamma_0\}, \\ V_0(\omega) &:= \{\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in V(\omega), \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) = 0 \text{ en } \omega\}, \\ V_F(\omega) &:= \{\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times H^2(\omega); \eta_i = \partial_\nu \eta_3 = 0 \text{ en } \gamma_0, \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) = 0 \text{ en } \omega\}. \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

**Teorema 4.4.1.** *Consideremos el Problema 4.2.9 tras sustituir el desarrollo asintótico de  $\mathbf{u}(\varepsilon)$  propuesto en (4.4.1) y asumamos las hipótesis (4.4.4) y (4.4.5). Identificando los términos multiplicados por la misma potencia de  $\varepsilon$  tenemos que:*

(a) *El término principal  $\mathbf{u}^0$  del desarrollo asintótico es independiente de la variable transversal  $x_3$ . Por tanto, se puede identificar con una función  $\boldsymbol{\xi}^0$  tal que  $\boldsymbol{\xi}^0 = \mathbf{0}$  en  $\gamma_0$  y también podemos identificar  $\mathbf{u}_0^0$  con una función  $\boldsymbol{\xi}_0^0(\cdot) = \boldsymbol{\xi}^0(0, \cdot)$ .*

(b) *Supongamos  $\theta > 0$ , que  $\mathbf{u}^1(t) \in V(\Omega) \forall t \in [0, T]$  y que  $V_0(\omega) = \{\mathbf{0}\}$ . Entonces, obtenemos que  $\boldsymbol{\xi}^0$  es solución de unas ecuaciones límite bidimensionales, que denotaremos como ecuaciones de una lámina membrana viscoelástica:*

*Hallar  $\boldsymbol{\xi}^0 : [0, T] \times \omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tal que,*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}^0(t, \cdot) &\in V(\omega) \forall t \in [0, T], \\ &\int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\xi}^0) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy + \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\dot{\boldsymbol{\xi}}^0) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy \\ &- \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\xi}^0(s)) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy ds \\ &= \int_{\omega} p^{i,0} \eta_i \sqrt{a} dy \forall \boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in V(\omega), \text{ c.p.d. en } (0, T), \end{aligned}$$



$$\xi^0(0, \cdot) = \xi_0^0(\cdot),$$

donde,

$$p^{i,0}(t) := \int_{-1}^1 f^{i,0}(t) dx_3 + h_+^{i,1}(t) + h_-^{i,1}(t) \text{ y } h_{\pm}^{i,1}(t, \cdot) = h^{i,1}(t, \cdot, \pm 1) \quad \forall t \in [0, T], \quad (4.4.9)$$

donde  $a^{\alpha\beta\sigma\tau}$ ,  $b^{\alpha\beta\sigma\tau}$  y  $c^{\alpha\beta\sigma\tau}$  denotan las componentes contravariantes de los tensores bidimensionales de cuarto orden definidos como sigue:

$$a^{\alpha\beta\sigma\tau} := \frac{2\lambda\rho^2 + 4\mu\theta^2}{(\theta + \rho)^2} a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + 2\mu(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}), \quad (4.4.10)$$

$$b^{\alpha\beta\sigma\tau} := \frac{2\theta\rho}{\theta + \rho} a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \rho(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}), \quad (4.4.11)$$

$$c^{\alpha\beta\sigma\tau} := \frac{2(\theta\Lambda)^2}{\theta + \rho} a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau}, \quad (4.4.12)$$

y con,

$$\Lambda := \left( \frac{\lambda}{\theta} - \frac{\lambda + 2\mu}{\theta + \rho} \right), \quad k := \frac{\lambda + 2\mu}{\theta + \rho}. \quad (4.4.13)$$

(c) Supongamos que  $\theta > 0$  y que  $V_0(\omega) \neq \{\mathbf{0}\}$ . Entonces obtenemos que  $\xi^0$  es solución de las ecuaciones límite bidimensionales, que denotaremos como ecuaciones de una lámina flexural viscoelástica:

Hallar  $\xi^0 : (0, T) \times \omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tal que,

$$\begin{aligned} \xi^0(t, \cdot) &\in V_F(\omega) \quad \forall t \in [0, T], \\ \frac{1}{3} \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\sigma\tau}(\xi^0) \rho_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy &+ \frac{1}{3} \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\sigma\tau}(\dot{\xi}^0) \rho_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy \\ &- \frac{1}{3} \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\sigma\tau}(\xi^0(s)) \rho_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy ds \\ &= \int_{\omega} p^{i,2} \eta_i \sqrt{a} dy \quad \forall \eta = (\eta_i) \in V_F(\omega), \text{ c.p.d. en } (0, T), \\ \xi^0(0, \cdot) &= \xi_0^0(\cdot), \end{aligned}$$

donde,

$$p^{i,2}(t) := \int_{-1}^1 f^{i,2}(t) dx_3 + h_+^{i,3}(t) + h_-^{i,3}(t) \text{ y } h_{\pm}^{i,3}(t, \cdot) = h^{i,3}(t, \cdot, \pm 1) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.4.14)$$

*Demostración.* Para la demostración de este teorema tomaremos valores particulares para  $p$  en el Problema 4.2.9. Después, agrupamos los términos multiplicados por las mismas potencias de  $\varepsilon$ , caracterizando los términos del desarrollo asintótico propuesto. Para ello, dividiremos la demostración en varios pasos, enumerados desde (i) hasta (vii).

(i) Sea  $p = -2$  en (4.2.26). Por tanto, agrupando los términos multiplicados por  $\varepsilon^{-2}$  (véanse (4.3.3)–(4.3.4)) tenemos que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||l}^{-1} e_{i||j}^{-1}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} B^{ijkl}(0) \dot{e}_{k||l}^{-1} e_{i||j}^{-1}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx \\ &= \int_{\Omega} f^{i,-2} v_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^{i,-1} v_i \sqrt{a} d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

Considerando  $\mathbf{v} \in V(\Omega)$  independiente de  $x_3$ , el lado izquierdo de la ecuación (4.4.15) se cancela (véase (4.4.3)). Por tanto, para evitar condiciones de compatibilidad entre las fuerzas aplicadas, debemos tomar  $f^{i,-2} = 0$  y  $h^{i,-1} = 0$ . Volviendo a la ecuación (4.4.15), utilizando (4.4.2), (4.4.3) y el Teorema 4.2.2, conduce a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||l}^{-1} e_{i||j}^{-1}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} B^{ijkl}(0) \dot{e}_{k||l}^{-1} e_{i||j}^{-1}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx \\ &= \int_{\Omega} \left( 4A^{\alpha 3 \sigma 3}(0) e_{\sigma||3}^{-1} e_{\alpha||3}^{-1}(\mathbf{v}) + A^{3333}(0) e_{3||3}^{-1} e_{3||3}^{-1}(\mathbf{v}) \right) \sqrt{a} dx \\ &+ \int_{\Omega} \left( 4B^{\alpha 3 \sigma 3}(0) \dot{e}_{\sigma||3}^{-1} e_{\alpha||3}^{-1}(\mathbf{v}) + B^{3333}(0) \dot{e}_{3||3}^{-1} e_{3||3}^{-1}(\mathbf{v}) \right) \sqrt{a} dx \\ &= \int_{\Omega} \left( \mu a^{\alpha \sigma} \partial_3 u_{\sigma}^0 \partial_3 v_{\alpha} + (\lambda + 2\mu) \partial_3 u_3^0 \partial_3 v_3 \right) \sqrt{a} dx \\ &+ \int_{\Omega} \left( \frac{\rho}{2} a^{\alpha \sigma} \partial_3 \dot{u}_{\sigma}^0 \partial_3 v_{\alpha} + (\theta + \rho) \partial_3 \dot{u}_3^0 \partial_3 v_3 \right) \sqrt{a} dx = 0, \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

para todo  $\mathbf{v} = (v_i) \in V(\Omega)$ , *c.p.d.* en  $(0, T)$ . Sea  $\mathbf{v} = (v_i) \in V(\Omega)$  tal que  $v_{\alpha} = 0$ . Por el Teorema 4.3.4, obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$(\lambda + 2\mu) \partial_3 u_3^0 + (\theta + \rho) \partial_3 \dot{u}_3^0 = 0.$$

Esta ecuación, junto con la condición inicial (4.4.4), conduce a

$$\partial_3 u_3^0(t) = 0 \text{ en } \Omega, \text{ para todo } t \in [0, T].$$

Ahora bien, tomando  $v_{\alpha} = u_{\alpha}^0$  en (4.4.16), tenemos que

$$\int_{\Omega} \mu a^{\alpha \sigma} \partial_3 u_{\sigma}^0 \partial_3 u_{\alpha}^0 \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} \frac{\rho}{2} a^{\alpha \sigma} \partial_3 \dot{u}_{\sigma}^0 \partial_3 u_{\alpha}^0 \sqrt{a} dx = 0, \text{ c.p.d. en } (0, T),$$

que es equivalente a

$$\int_{\Omega} \mu a^{\alpha \sigma} \partial_3 u_{\sigma}^0 \partial_3 u_{\alpha}^0 \sqrt{a} dx + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \frac{\rho}{4} a^{\alpha \sigma} \partial_3 u_{\sigma}^0 \partial_3 u_{\alpha}^0 \sqrt{a} dx = 0, \text{ c.p.d. en } (0, T).$$

Dado que la matriz  $(a^{\alpha \sigma})$  es definida positiva, obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \frac{\rho}{4} a^{\alpha \sigma} \partial_3 u_{\sigma}^0 \partial_3 u_{\alpha}^0 \sqrt{a} dx \leq 0, \text{ c.p.d. en } (0, T).$$

Integrando con respecto a la variable temporal y por (4.4.4), deducimos que

$$\int_{\Omega} a^{\alpha\sigma} \partial_3 u_{\sigma}^0 \partial_3 u_{\alpha}^0 \sqrt{a} dx \leq 0 \quad \forall t \in [0, T],$$

y utilizando una vez más que  $(a^{\alpha\sigma})$  es definida positiva, concluimos que

$$\partial_3 u_{\alpha}^0(t) = 0 \text{ en } \Omega, \quad \forall t \in [0, T].$$

En resumen, hemos obtenido que el término principal  $\mathbf{u}^0(t)$  del desarrollo asintótico es independiente de la variable transversal para todo  $t$  y, por tanto, lo podemos identificar con una función  $\xi^0(t) \in [H^1(\omega)]^3 \forall t \in [0, T]$  tal que  $\xi^0 = \mathbf{0}$  en  $\gamma_0$ , esto es,  $\xi^0(t) \in V(\omega) \forall t \in [0, T]$ . Además, como  $\mathbf{u}_0^0$  tampoco depende de  $x_3$ , por (4.4.4), podemos identificar  $\mathbf{u}_0^0$  con una función  $\xi_0^0 \in V(\omega)$  y se verifica que  $\xi_0^0(\cdot) = \xi^0(0, \cdot)$ . Por (4.4.3) también concluimos que,

$$e_{i||j}^{-1}(t) = 0 \text{ en } \Omega, \quad \forall t \in [0, T].$$

De esta forma, hemos completado la demostración del apartado (a) de este teorema.

(ii) Sea ahora  $p = -1$  en (4.2.26). Agrupando los términos multiplicados por  $\varepsilon^{-1}$  y teniendo en cuenta los resultados del paso anterior (i), obtenemos que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||l}^0 e_{i||j}^{-1}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} B^{ijkl}(0) \dot{e}_{k||l}^0 e_{i||j}^{-1}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx \\ &= \int_{\Omega} f^{i,-1} v_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^{i,0} v_i \sqrt{a} d\Gamma, \end{aligned} \quad (4.4.17)$$

para todo  $\mathbf{v} \in V(\Omega)$ , *c.p.d.* en  $(0, T)$ . Análogamente al paso (i), considerando una función test  $\mathbf{v}$  independiente de  $x_3$ , obtenemos que  $f^{i,-1}$  y  $h^{i,0}$  deben ser nulas para evitar condiciones de compatibilidad. Por tanto, del lado izquierdo de la ecuación deducimos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||l}^0 e_{i||j}^{-1}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} B^{ijkl}(0) \dot{e}_{k||l}^0 e_{i||j}^{-1}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx \\ &= \int_{\Omega} 4A^{\alpha 3 \sigma 3}(0) e_{\alpha||3}^0 e_{\sigma||3}^{-1}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} (A^{\alpha \beta 33}(0) e_{\alpha||\beta}^0 + A^{3333}(0) e_{3||3}^0) e_{3||3}^{-1}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx \\ &+ \int_{\Omega} 4B^{\alpha 3 \sigma 3}(0) \dot{e}_{\alpha||3}^0 e_{\sigma||3}^{-1}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} (B^{\alpha \beta 33}(0) \dot{e}_{\alpha||\beta}^0 + B^{3333}(0) \dot{e}_{3||3}^0) e_{3||3}^{-1}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx \\ &= \int_{\Omega} (2\mu a^{\alpha\sigma} e_{\alpha||3}^0 \partial_3 v_{\sigma} + (\lambda a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}^0 + (\lambda + 2\mu) e_{3||3}^0) \partial_3 v_3) \sqrt{a} dx \\ &+ \int_{\Omega} (\rho a^{\alpha\sigma} \dot{e}_{\alpha||3}^0 \partial_3 v_{\sigma} + (\theta a^{\alpha\beta} \dot{e}_{\alpha||\beta}^0 + (\theta + \rho) \dot{e}_{3||3}^0) \partial_3 v_3) \sqrt{a} dx = 0. \end{aligned} \quad (4.4.18)$$

Por un lado, si tomamos  $\mathbf{v} \in V(\Omega)$  tal que  $v_2 = v_3 = 0$  y utilizando el Teorema 4.3.4, tenemos:

$$2\mu a^{\alpha 1} e_{\alpha||3}^0 + \rho a^{\alpha 1} \dot{e}_{\alpha||3}^0 = 0 \text{ c.p.d. en } (0, T). \quad (4.4.19)$$

Por otro lado, si tomamos  $\mathbf{v} \in V(\Omega)$  tal que  $v_1 = v_3 = 0$  y utilizando el Teorema 4.3.4, obtenemos que

$$2\mu a^{\alpha 2} e_{\alpha||3}^0 + \rho a^{\alpha 2} \dot{e}_{\alpha||3}^0 = 0 \text{ c.p.d. en } (0, T). \quad (4.4.20)$$

Multiplicando (4.4.19) por  $a^{22}$  y (4.4.20) por  $-a^{21}$  y sumando ambas expresiones, se tiene que

$$2\mu (a^{22}a^{11} - a^{21}a^{12}) e_{1||3}^0 + \rho (a^{22}a^{11} - a^{21}a^{12}) \dot{e}_{1||3}^0 = 2\mu a e_{1||3}^0 + \rho a \dot{e}_{1||3}^0 = 0,$$

c.p.d. en  $(0, T)$ , por (4.1.9). Ahora bien, por la condición inicial en (4.4.5) concluimos que

$$e_{1||3}^0(t) = 0 \text{ en } \Omega, \forall t \in [0, T].$$

Multiplicando ahora (4.4.19) por  $a^{12}$  y (4.4.20) por  $-a^{11}$  y sumando ambas expresiones, se tiene que

$$2\mu a e_{2||3}^0 + \rho a \dot{e}_{2||3}^0 = 0 \text{ c.p.d. en } (0, T).$$

Una vez más, por la condición inicial en (4.4.5) concluimos que

$$e_{2||3}^0(t) = 0 \text{ en } \Omega, \forall t \in [0, T].$$

Tomando  $\mathbf{v} \in V(\Omega)$  en (4.4.18) tal que  $v_\alpha = 0$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\lambda a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}^0 + (\lambda + 2\mu) e_{3||3}^0) \partial_3 v_3 \sqrt{a} dx \\ & + \int_{\Omega} (\theta a^{\alpha\beta} \dot{e}_{\alpha||\beta}^0 + (\theta + \rho) \dot{e}_{3||3}^0) \partial_3 v_3 \sqrt{a} dx = 0, \end{aligned}$$

para todo  $v_3 \in H^1(\Omega)$  con  $v_3 = 0$  en  $\Gamma_0$ , c.p.d. en  $(0, T)$ . Por el Teorema 4.3.4, obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$\lambda a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}^0 + (\lambda + 2\mu) e_{3||3}^0 + \theta a^{\alpha\beta} \dot{e}_{\alpha||\beta}^0 + (\theta + \rho) \dot{e}_{3||3}^0 = 0. \quad (4.4.21)$$

**Observación 4.4.2.** *Nótese que si eliminamos la dependencia temporal y la viscosidad, es decir  $\theta = \rho = 0$ , esta ecuación se reduce a la misma estudiada en [30] (véase apartado (ii) en la página 168), esto es, recuperamos el caso elástico.*

Para resolver la ecuación (4.4.21) en el caso de mayor interés, asumiremos que el coeficiente de viscosidad  $\theta$  es estrictamente positivo. De esta forma, se puede probar que esta ecuación es equivalente a

$$\theta e^{-\frac{\lambda}{\theta}t} \frac{\partial}{\partial t} \left( a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}^0 e^{\frac{\lambda}{\theta}t} \right) = -(\theta + \rho) e^{-\frac{\lambda+2\mu}{\theta+\rho}t} \frac{\partial}{\partial t} \left( e_{3||3}^0 e^{\frac{\lambda+2\mu}{\theta+\rho}t} \right).$$

Integrando con respecto a la variable temporal y utilizando (4.4.5) se tiene que,

$$e_{3||3}^0 e^{\frac{\lambda+2\mu}{\theta+\rho}t} = -\frac{\theta}{\theta+\rho} \int_0^t e^{(\frac{\lambda+2\mu}{\theta+\rho}-\frac{\lambda}{\theta})s} \frac{\partial}{\partial s} \left( a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}^0(s) e^{\frac{\lambda}{\theta}s} \right) ds.$$

Integrando por partes y simplificando concluimos que,

$$e_{3||3}^0(t) = -\frac{\theta}{\theta+\rho} \left( a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}^0(t) + \Lambda \int_0^t e^{-k(t-s)} a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}^0(s) ds \right), \quad (4.4.22)$$

en  $\Omega$ ,  $\forall t \in [0, T]$ , con las definiciones de  $\Lambda$  y  $k$  presentadas en (4.4.13). Además, de (4.4.21) obtenemos que,

$$\dot{e}_{3||3}^0(t) = -\frac{\lambda}{\theta+\rho} a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}^0(t) - \frac{\lambda+2\mu}{\theta+\rho} e_{3||3}^0(t) - \frac{\theta}{\theta+\rho} a^{\alpha\beta} \dot{e}_{\alpha||\beta}^0(t),$$

en  $\Omega$ , *c.t.p.*  $t \in (0, T)$ .

(iii) Sea  $p = 0$  en (4.2.26). Agrupando los términos multiplicados por  $\varepsilon^0 = 1$ , teniendo en cuenta (4.3.3)–(4.3.4) y el paso (i) se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) \left( e_{k||l}^0 e_{i||j}^0(\mathbf{v}) + e_{k||l}^1 e_{i||j}^{-1}(\mathbf{v}) \right) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} \tilde{A}^{ijkl,1} e_{k||l}^0 e_{i||j}^{-1}(\mathbf{v}) dx \\ & + \int_{\Omega} B^{ijkl}(0) \left( \dot{e}_{k||l}^0 e_{i||j}^0(\mathbf{v}) + \dot{e}_{k||l}^1 e_{i||j}^{-1}(\mathbf{v}) \right) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} \tilde{B}^{ijkl,1} \dot{e}_{k||l}^0 e_{i||j}^{-1}(\mathbf{v}) dx \\ & = \int_{\Omega} f^{i,0} v_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^{i,1} v_i \sqrt{a} d\Gamma, \end{aligned} \quad (4.4.23)$$

para todo  $\mathbf{v} \in V(\Omega)$ , *c.p.d.* en  $(0, T)$ . Tomando  $\mathbf{v} \in V(\Omega)$  independiente de  $x_3$ , esto es, tal que podemos identificar  $\mathbf{v}$  con una función  $\boldsymbol{\eta} \in V(\omega)$ , tenemos por (4.4.3) que  $e_{i||j}^{-1}(\mathbf{v}) = 0$ . Además, ya que  $e_{\alpha||\beta}^0 = 0$  por (ii), tenemos que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||l}^0 e_{i||j}^0(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} B^{ijkl}(0) \dot{e}_{k||l}^0 e_{i||j}^0(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx \\ & = \int_{\Omega} (\lambda a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma})) e_{\sigma||\tau}^0 e_{\alpha||\beta}^0(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} \lambda a^{\alpha\beta} e_{3||3}^0 e_{\alpha||\beta}^0(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx \\ & + \int_{\Omega} \left( \theta a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \frac{\rho}{2}(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \right) \dot{e}_{\sigma||\tau}^0 e_{\alpha||\beta}^0(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} \theta a^{\alpha\beta} \dot{e}_{3||3}^0 e_{\alpha||\beta}^0(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx \\ & = \int_{\Omega} f^{i,0} \eta_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^{i,1} \eta_i \sqrt{a} d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.4.24)$$

Utilizando las expresiones de  $e_{3||3}$  y su derivada con respecto al tiempo, obtenidas en el paso (ii), se tiene que

$$\int_{\Omega} (\lambda a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma})) e_{\sigma||\tau}^0 e_{\alpha||\beta}^0(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} \lambda a^{\alpha\beta} e_{3||3}^0 e_{\alpha||\beta}^0(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega} \left( \theta a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \frac{\rho}{2} (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \right) \dot{e}_{\sigma||\tau}^0 e_{\alpha||\beta}^0(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} \theta a^{\alpha\beta} \dot{e}_{3||3}^0 e_{\alpha||\beta}^0(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx \\
& = \int_{\Omega} \left( \lambda a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \right) e_{\sigma||\tau}^0 e_{\alpha||\beta}^0(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx \\
& + \int_{\Omega} \left( \theta a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \frac{\rho}{2} (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \right) \dot{e}_{\sigma||\tau}^0 e_{\alpha||\beta}^0(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx \\
& + \int_{\Omega} \left( \lambda - \theta \frac{\lambda + 2\mu}{\theta + \rho} \right) \left( -\frac{\theta}{\theta + \rho} \left( a^{\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}^0 + \Lambda \int_0^t e^{-k(t-s)} a^{\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}^0(s) ds \right) \right) a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}^0(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx \\
& - \int_{\Omega} \frac{\theta}{\theta + \rho} (\lambda a^{\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}^0 + \theta a^{\sigma\tau} \dot{e}_{\sigma||\tau}^0) a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}^0(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx,
\end{aligned}$$

que es equivalente a,

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left( \left( \lambda - \frac{\theta}{\theta + \rho} (\theta\Lambda + \lambda) \right) a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \right) e_{\sigma||\tau}^0 e_{\alpha||\beta}^0(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx \\
& + \int_{\Omega} \left( \frac{\theta\rho}{\theta + \rho} a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \frac{\rho}{2} (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \right) \dot{e}_{\sigma||\tau}^0 e_{\alpha||\beta}^0(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx \\
& - \int_{\Omega} \frac{(\theta\Lambda)^2}{\theta + \rho} \left( \int_0^t e^{-k(t-s)} a^{\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}^0(s) ds \right) a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}^0(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx \\
& = \int_{\Omega} f^{i,0} \eta_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^{i,1} \eta_i \sqrt{a} d\Gamma.
\end{aligned}$$

Por tanto, obtenemos que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\Omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}^0 e_{\alpha||\beta}^0(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \dot{e}_{\sigma||\tau}^0 e_{\alpha||\beta}^0(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx \\
& - \frac{1}{2} \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\Omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}^0(s) e_{\alpha||\beta}^0(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx ds \\
& = \int_{\Omega} f^{i,0} \eta_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^{i,1} \eta_i \sqrt{a} d\Gamma, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in V(\omega) \text{ c.p.d. en } (0, T),
\end{aligned}$$

con  $a^{\alpha\beta\sigma\tau}$ ,  $b^{\alpha\beta\sigma\tau}$  y  $c^{\alpha\beta\sigma\tau}$  definidos en (4.4.10)–(4.4.12).

Nótese que si  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times L^2(\omega)$ , entonces

$$\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \in L^2(\omega).$$

Por tanto, las igualdades

$$e_{\alpha||\beta}^0(t) = \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi}^0(t)) \quad \text{y} \quad e_{\alpha||\beta}^0(\boldsymbol{\eta}(t)) = \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}(t)) \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in V(\omega), \quad \forall t \in [0, T], \quad (4.4.25)$$

se siguen de las definiciones (4.4.2), (4.4.3) y (4.4.6).

(iv) Asumamos que  $V_0(\omega) = \{0\}$ . Por el paso anterior se tiene el siguiente problema variacional:

Hallar  $\xi^0 : [0, T] \times \omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tal que,

$$\begin{aligned} \xi^0(t) &\in V(\omega) \quad \forall t \in [0, T], \\ \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\xi^0) \gamma_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy &+ \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\dot{\xi}^0) \gamma_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy \\ &- \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\xi^0(s)) \gamma_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy ds \\ &= \int_{\omega} p^{i,0} \eta_i \sqrt{a} dy, \quad \forall \eta \in V(\omega) \text{ c.p.d. en } (0, T), \\ \xi^0(0, \cdot) &= \xi_0^0(\cdot), \end{aligned} \tag{4.4.26}$$

con  $p^{i,0}$  definido en (4.4.9). Este problema será conocido como el problema variacional bidimensional para una lámina membrana viscoelástica. De esta forma, hemos completado la demostración del apartado (b) de este teorema.

**Observación 4.4.3.** La hipótesis  $V_0(\omega) = \{0\}$  de este paso, permite asegurar la unicidad de solución del problema (4.4.26). La existencia de solución dependerá de otros factores que analizaremos con detalle en los Capítulos 5 y 6.

(v) Asumamos ahora que  $V_0(\omega) \neq \{0\}$ . Tomando  $\eta \in (V_0(\omega) \setminus \{0\})$  en (4.4.26) se tiene que

$$\int_{\omega} p^{i,0} \eta_i \sqrt{a} dy = \int_{\Omega} f^{i,0} \eta_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^{i,1} \eta_i \sqrt{a} d\Gamma = 0.$$

Por tanto, para evitar condiciones de compatibilidad entre las fuerzas aplicadas, debemos tomar  $f^{i,0} = 0$  y  $h^{i,1} = 0$ . Entonces, tomando  $\eta = \xi^0$  en la ecuación (4.4.26) se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\xi^0) \gamma_{\alpha\beta}(\xi^0) \sqrt{a} dy &+ \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\dot{\xi}^0) \gamma_{\alpha\beta}(\xi^0) \sqrt{a} dy \\ &- \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\xi^0(s)) \gamma_{\alpha\beta}(\xi^0) \sqrt{a} dy ds = 0. \end{aligned}$$

Por (4.4.5) y la primera igualdad en (4.4.25), tenemos que  $\gamma_{\alpha\beta}(\xi^0(0)) = 0$ . Esta condición inicial junto al Teorema 4.3.15 implican que  $\gamma_{\alpha\beta}(\xi^0(t)) = 0 \quad \forall t \in [0, T]$ , es decir,  $\xi^0 \in V_0(\omega)$ . Por tanto, una vez más por (4.4.25), tenemos que  $e_{\alpha\|\beta}^0 = \gamma_{\alpha\beta}(\xi^0) = 0$ . Además, por (4.4.2) y (4.4.22) se obtiene que

$$\partial_3 u_3^1(t) = e_{3\|\beta}^0(t) = 0 \text{ en } \Omega, \quad \forall t \in [0, T].$$

Por la definición de  $e_{\alpha\|\beta}^0$  en (4.4.2) y por los pasos (i)–(ii) tenemos que

$$e_{\alpha\|\beta}^0 = \frac{1}{2} (\partial_{\alpha} \xi_3^0 + \partial_3 u_{\alpha}^1) + b_{\alpha}^{\sigma} \xi_{\sigma}^0 = 0,$$



por tanto,

$$\partial_3 u_\alpha^1(t) = -(\partial_\alpha \xi_3^0(t) + 2b_\alpha^\sigma \xi_\sigma^0(t)) \text{ en } \Omega, \forall t \in [0, T].$$

Como  $\mathbf{u}^1(t) \in V(\Omega) \forall t \in [0, T]$  y dado que  $\xi^0$  es independiente de  $x_3$  por el paso (i), existe un campo  $\xi^1(t) \in V(\omega) \forall t \in [0, T]$  tal que

$$\begin{aligned} u_\alpha^1(t) &= \xi_\alpha^1(t) - x_3 (\partial_\alpha \xi_3^0(t) + 2b_\alpha^\sigma \xi_\sigma^0(t)), \\ u_3^1(t) &= \xi_3^1(t), \end{aligned}$$

en  $\Omega$ ,  $\forall t \in [0, T]$ . Nótese que esto implica que  $\xi_3^0(t) \in H^2(\omega) \forall t \in [0, T]$ . Ahora bien, como  $\xi_\alpha^0 = 0$  en  $\gamma_0$ , entonces  $\partial_\nu \xi_3^0 = 0$ , donde  $\partial_\nu$  denota la derivada normal exterior a lo largo de la frontera. Por tanto, tenemos  $\xi^0(t) \in V_F(\omega) \forall t \in [0, T]$ . Dado que  $e_{i||j}^0 = 0$ , volviendo a los términos multiplicados por  $\varepsilon^0 = 1$  (véase (4.4.23) en el paso (iii)), tenemos que

$$\int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||l}^1 e_{i||j}^{-1}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} B^{ijkl}(0) \dot{e}_{k||l}^1 e_{i||j}^{-1}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx = 0,$$

para todo  $\mathbf{v} \in V(\Omega)$ , *c.p.d.* en  $(0, T)$ . Nótese que esta ecuación es análoga a la obtenida en el paso (ii) involucrando los términos  $e_{i||j}^1$  en lugar de los  $e_{i||j}^0$  (véase (4.4.17)). Luego, utilizando argumentos similares, concluimos que

$$e_{\alpha||3}^1(t) = 0 \text{ en } \Omega, \forall t \in [0, T],$$

y además,

$$e_{3||3}^1(t) = -\frac{\theta}{\theta + \rho} \left( a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}^1(t) + \Lambda \int_0^t e^{-k(t-s)} a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}^1(s) ds \right), \text{ en } \Omega, \forall t \in [0, T],$$

con  $\Lambda$  y  $k$  definidos en (4.4.13). También,

$$\dot{e}_{3||3}^1(t) = -\frac{\lambda}{\theta + \rho} a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}^1(t) - \frac{\lambda + 2\mu}{\theta + \rho} e_{3||3}^1(t) - \frac{\theta}{\theta + \rho} a^{\alpha\beta} \dot{e}_{\alpha||\beta}^1(t),$$

en  $\Omega$ , *c.t.p.*  $t \in (0, T)$ .

Ahora bien, por las definiciones (4.4.2) en términos de  $\xi_i^0$  y  $\xi_i^1$ , reemplazando  $\partial_\beta b_\alpha^\sigma$  utilizando la expresión (4.3.1) y después de algunos cálculos, se tiene que

$$\begin{aligned} e_{\alpha||\beta}^1 &= \frac{1}{2} (\partial_\beta \xi_\alpha^1 + \partial_\alpha \xi_\beta^1) - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \xi_\sigma^1 - b_{\alpha\beta} \xi_3^1 - x_3 (\partial_{\alpha\beta} \xi_3^0 - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \partial_\sigma \xi_3^0 - b_\alpha^\sigma b_{\sigma\beta} \xi_3^0 \\ &\quad + b_\alpha^\sigma (\partial_\beta \xi_\sigma^0 - \Gamma_{\beta\sigma}^\tau \xi_\tau^0) + b_\beta^\tau (\partial_\alpha \xi_\tau^0 - \Gamma_{\alpha\tau}^\sigma \xi_\sigma^0) + b_{\beta|\alpha}^\tau \xi_\tau^0). \end{aligned} \quad (4.4.27)$$

Nótese que si  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times L^2(\omega)$ , entonces (véase (4.4.7))

$$\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \in L^2(\omega).$$

Por tanto, por (4.4.6) para  $\boldsymbol{\eta} = \xi^1(t)$  y (4.4.7) para  $\boldsymbol{\eta} = \xi^0(t)$ , se sigue de (4.4.27) la igualdad

$$e_{\alpha||\beta}^1(t) = \gamma_{\alpha\beta}(\xi^1(t)) - x_3 \rho_{\alpha\beta}(\xi^0(t)) \text{ en } \Omega, \forall t \in [0, T]. \quad (4.4.28)$$



(vi) Asumamos que  $V_0(\Omega) \neq \{0\}$ . Sea  $p = 1$  en (4.2.26). Agrupando los términos multiplicados por  $\varepsilon$ , teniendo en cuenta los pasos (i)–(v) tenemos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) \left( e_{k||l}^1 e_{i||j}^0(\mathbf{v}) + e_{k||l}^2 e_{i||j}^{-1}(\mathbf{v}) \right) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} \tilde{A}^{ijkl,1} e_{k||l}^1 e_{i||j}^{-1}(\mathbf{v}) dx \\ & + \int_{\Omega} B^{ijkl}(0) \left( \dot{e}_{k||l}^1 e_{i||j}^0(\mathbf{v}) + \dot{e}_{k||l}^2 e_{i||j}^{-1}(\mathbf{v}) \right) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} \tilde{B}^{ijkl,1} \dot{e}_{k||l}^1 e_{i||j}^{-1}(\mathbf{v}) dx \\ & = \int_{\Omega} f^{i,1} v_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^{i,2} v_i \sqrt{a} d\Gamma, \end{aligned} \quad (4.4.29)$$

para todo  $\mathbf{v} \in V(\Omega)$ , c.p.d. en  $(0, T)$ . Tomando  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\eta} \in V(\omega)$ , es decir,  $\mathbf{v}$  independiente de  $x_3$ , por (4.4.3) obtenemos que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||l}^1 e_{i||j}^0(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} B^{ijkl}(0) \dot{e}_{k||l}^1 e_{i||j}^0(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx \\ & = \int_{\Omega} f^{i,1} \eta_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^{i,2} \eta_i \sqrt{a} d\Gamma, \end{aligned}$$

para todo  $\boldsymbol{\eta} \in V(\omega)$ , c.p.d. en  $(0, T)$ . Dado que  $e_{\alpha||\beta}^1 = 0$  por (v) tenemos que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||l}^1 e_{i||j}^0(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} B^{ijkl}(0) \dot{e}_{k||l}^1 e_{i||j}^0(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx \\ & = \int_{\Omega} (\lambda a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma})) e_{\sigma||\tau}^1 e_{\alpha||\beta}^0(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} \lambda a^{\alpha\beta} e_{3||3}^1 e_{\alpha||\beta}^0(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx \\ & + \int_{\Omega} \left( \theta a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \frac{\rho}{2} (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \right) \dot{e}_{\sigma||\tau}^1 e_{\alpha||\beta}^0(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} \theta a^{\alpha\beta} \dot{e}_{3||3}^1 e_{\alpha||\beta}^0(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx \\ & = \int_{\Omega} f^{i,1} \eta_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^{i,2} \eta_i \sqrt{a} d\Gamma, \end{aligned}$$

para todo  $\boldsymbol{\eta} \in V(\omega)$ , c.p.d. en  $(0, T)$ , expresión análoga a la obtenida en (4.4.24). Por tanto, siguiendo los mismos argumentos hechos allí, teniendo en cuenta (v), se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\xi}^1) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy + \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\dot{\boldsymbol{\xi}}^1) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy \\ & - \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\xi}^1(s)) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy ds \\ & = \int_{\Omega} f^{i,1} \eta_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^{i,2} \eta_i \sqrt{a} d\Gamma, \end{aligned} \quad (4.4.30)$$

para todo  $\boldsymbol{\eta} \in V(\omega)$ , c.p.d. en  $(0, T)$ , con  $a^{\alpha\beta\sigma\tau}$ ,  $b^{\alpha\beta\sigma\tau}$ ,  $c^{\alpha\beta\sigma\tau}$  definidos en (4.4.10)–(4.4.12). Tomando  $\boldsymbol{\eta} \in (V_0(\omega) \setminus \{0\})$  obtenemos la siguiente expresión:

$$\int_{\Omega} f^{i,1} \eta_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^{i,2} \eta_i \sqrt{a} d\Gamma = 0.$$

Nuevamente, para evitar condiciones de compatibilidad debemos tomar  $f^{i,1} = 0$  y  $h^{i,2} = 0$ . Por tanto, considerar  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}^1$  en (4.4.30) conduce a

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\xi}^1) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi}^1) \sqrt{a} dy + \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\xi}^1) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi}^1) \sqrt{a} dy \\ & - \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\xi}^1(s)) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi}^1(t)) \sqrt{a} dy ds = 0. \end{aligned} \quad (4.4.31)$$

Por (4.4.5) y la relación (4.4.28) obtenida en el paso (v), obtenemos que

$$\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi}^1(0)) = x_3 \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi}^0(0)),$$

que como  $\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi}^1(0))$  es independiente de  $x_3$ , implica que  $\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi}^0(0)) = \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi}^1(0)) = 0$ . Entonces, por el Teorema 4.3.15, deducimos de (4.4.31) que  $\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi}^1(t)) = 0 \forall t \in [0, T]$ . Por tanto,

$$\boldsymbol{\xi}^1(t) \in V_0(\omega) \forall t \in [0, T].$$

(vii) Por un lado, volviendo a la ecuación (4.4.29), con  $f^{i,1} = 0$  y  $h^{i,2} = 0$ , se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) \left( e_{k||l}^1 e_{i||j}^0(\mathbf{v}) + e_{k||l}^2 e_{i||j}^{-1}(\mathbf{v}) \right) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} \tilde{A}^{ijkl,1} e_{k||l}^1 e_{i||j}^{-1}(\mathbf{v}) dx \\ & + \int_{\Omega} B^{ijkl}(0) \left( \dot{e}_{k||l}^1 e_{i||j}^0(\mathbf{v}) + \dot{e}_{k||l}^2 e_{i||j}^{-1}(\mathbf{v}) \right) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} \tilde{B}^{ijkl,1} \dot{e}_{k||l}^1 e_{i||j}^{-1}(\mathbf{v}) dx = 0. \end{aligned}$$

Dado  $\boldsymbol{\eta} \in V_F(\omega)$ , definimos  $\mathbf{v}(\boldsymbol{\eta}) = (v_i(\boldsymbol{\eta}))$  como

$$v_{\alpha}(\boldsymbol{\eta}) := x_3 (2b_{\alpha}^{\sigma} \eta_{\sigma} + \partial_{\alpha} \eta_3), \quad v_3(\boldsymbol{\eta}) := 0,$$

y tomamos  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\boldsymbol{\eta})$  en la ecuación anterior, conduciéndonos a la siguiente expresión (véase (4.4.3)):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||l}^1 e_{i||j}^0(\mathbf{v}(\boldsymbol{\eta})) \sqrt{a} dx + 4 \int_{\Omega} A^{\alpha 3 \sigma 3}(0) e_{\sigma||3}^2 \left( b_{\alpha}^{\tau} \eta_{\tau} + \frac{1}{2} \partial_{\alpha} \eta_3 \right) \sqrt{a} dx \\ & + 4 \int_{\Omega} \tilde{A}^{\alpha 3 \sigma 3,1} e_{\sigma||3}^1 \left( b_{\alpha}^{\tau} \eta_{\tau} + \frac{1}{2} \partial_{\alpha} \eta_3 \right) dx \\ & + \int_{\Omega} B^{ijkl}(0) \dot{e}_{k||l}^1 e_{i||j}^0(\mathbf{v}(\boldsymbol{\eta})) \sqrt{a} dx + 4 \int_{\Omega} B^{\alpha 3 \sigma 3}(0) \dot{e}_{\sigma||3}^2 \left( b_{\alpha}^{\tau} \eta_{\tau} + \frac{1}{2} \partial_{\alpha} \eta_3 \right) \sqrt{a} dx \\ & + 4 \int_{\Omega} \tilde{B}^{\alpha 3 \sigma 3,1} \dot{e}_{\sigma||3}^1 \left( b_{\alpha}^{\tau} \eta_{\tau} + \frac{1}{2} \partial_{\alpha} \eta_3 \right) dx = 0, \end{aligned} \quad (4.4.32)$$

para todo  $\boldsymbol{\eta} \in V_F(\omega)$ , c.p.d. en  $(0, T)$ . Por otro lado, sea  $p = 2$  en (4.2.26). Agrupando los términos multiplicado por  $\varepsilon^2$  y usando los pasos (i) y (v) se obtiene:

$$\int_{\Omega} A^{ijkl}(0) \left( e_{k||l}^1 e_{i||j}^1(\mathbf{v}) + e_{k||l}^2 e_{i||j}^0(\mathbf{v}) + e_{k||l}^3 e_{i||j}^{-1}(\mathbf{v}) \right) \sqrt{a} dx$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega} \tilde{A}^{ijkl,1} \left( e_{k||l}^1 e_{i||j}^0(\mathbf{v}) + e_{k||l}^2 e_{i||j}^{-1}(\mathbf{v}) \right) dx + \int_{\Omega} \tilde{A}^{ijkl,2} e_{k||l}^1 e_{i||j}^{-1}(\mathbf{v}) dx \\
& + \int_{\Omega} B^{ijkl}(0) \left( \dot{e}_{k||l}^1 e_{i||j}^1(\mathbf{v}) + \dot{e}_{k||l}^2 e_{i||j}^0(\mathbf{v}) + \dot{e}_{k||l}^3 e_{i||j}^{-1}(\mathbf{v}) \right) \sqrt{a} dx \\
& + \int_{\Omega} \tilde{B}^{ijkl,1} \left( \dot{e}_{k||l}^1 e_{i||j}^0(\mathbf{v}) + \dot{e}_{k||l}^2 e_{i||j}^{-1}(\mathbf{v}) \right) dx + \int_{\Omega} \tilde{B}^{ijkl,2} \dot{e}_{k||l}^1 e_{i||j}^{-1}(\mathbf{v}) dx \\
& = \int_{\Omega} f^{i,2} v_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^{i,3} v_i \sqrt{a} d\Gamma,
\end{aligned}$$

para todo  $\mathbf{v} \in V(\Omega)$ , *c.p.d.* en  $(0, T)$ . Consideremos ahora cualquier  $\mathbf{v}$  tal que pueda ser identificado con una función  $\boldsymbol{\eta} \in V_F(\omega)$ ; luego, por los pasos (i), (v) y por (4.4.3) tenemos

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||l}^1 e_{i||j}^1(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx + 4 \int_{\Omega} A^{\alpha 3 \sigma 3}(0) e_{\sigma||3}^2 \left( b_{\alpha}^{\tau} \eta_{\tau} + \frac{1}{2} \partial_{\alpha} \eta_3 \right) \sqrt{a} dx \\
& + \int_{\Omega} \tilde{A}^{ijkl,1} e_{\sigma||3}^1 \left( b_{\alpha}^{\tau} \eta_{\tau} + \frac{1}{2} \partial_{\alpha} \eta_3 \right) dx \\
& + \int_{\Omega} B^{ijkl}(0) \dot{e}_{k||l}^1 e_{i||j}^1(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx + 4 \int_{\Omega} B^{\alpha 3 \sigma 3}(0) \dot{e}_{\sigma||3}^2 \left( b_{\alpha}^{\tau} \eta_{\tau} + \frac{1}{2} \partial_{\alpha} \eta_3 \right) \sqrt{a} dx \\
& + \int_{\Omega} \tilde{B}^{ijkl,1} \dot{e}_{\sigma||3}^1 \left( b_{\alpha}^{\tau} \eta_{\tau} + \frac{1}{2} \partial_{\alpha} \eta_3 \right) dx \\
& = \int_{\omega} p^{i,2} \eta_i \sqrt{a} dy,
\end{aligned}$$

para todo  $\boldsymbol{\eta} \in V_F(\omega)$ , *c.p.d.* en  $(0, T)$ , donde  $p^{i,2}$  está definido en (4.4.14). Restando (4.4.32), obtenemos

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||l}^1 (e_{i||j}^1(\boldsymbol{\eta}) - e_{i||j}^0(\mathbf{v}(\boldsymbol{\eta}))) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} B^{ijkl}(0) \dot{e}_{k||l}^1 (e_{i||j}^1(\boldsymbol{\eta}) - e_{i||j}^0(\mathbf{v}(\boldsymbol{\eta}))) \sqrt{a} dx \\
& = \int_{\omega} p^{i,2} \eta_i \sqrt{a} dy,
\end{aligned} \tag{4.4.33}$$

para todo  $\boldsymbol{\eta} \in V_F(\omega)$ , *c.p.d.* en  $(0, T)$ . Ahora bien, por el paso (v) y (4.4.3) tenemos que

$$\begin{aligned}
A^{ijkl}(0) e_{k||l}^1 (e_{i||j}^1(\boldsymbol{\eta}) - e_{i||j}^0(\mathbf{v}(\boldsymbol{\eta}))) & = A^{\alpha \beta \sigma \tau}(0) e_{\sigma||\tau}^1 (e_{\alpha||\beta}^1(\boldsymbol{\eta}) - e_{\alpha||\beta}^0(\mathbf{v}(\boldsymbol{\eta}))) \\
& + A^{\alpha \beta 3 3}(0) e_{3||3}^1 (e_{\alpha||\beta}^1(\boldsymbol{\eta}) - e_{\alpha||\beta}^0(\mathbf{v}(\boldsymbol{\eta}))).
\end{aligned}$$

De la misma forma, obtenemos la igualdad análoga para las componentes del tensor de viscosidad multiplicando las derivadas temporales de las componentes del tensor de deformaciones linealizado. Además, por los pasos (v) y (vi) se tiene que

$$e_{\sigma||\tau}^1(t) = -x_3 \rho_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\xi}^0(t)) \quad \forall t \in [0, T]. \tag{4.4.34}$$

También, por (4.4.3) tenemos que

$$e_{\alpha||\beta}^1(\boldsymbol{\eta}) - e_{\alpha||\beta}^0(\mathbf{v}(\boldsymbol{\eta})) = x_3 (b_{\beta|\alpha}^{\sigma} \eta_{\sigma} + b_{\alpha}^{\sigma} b_{\sigma\beta} \eta_3)$$

$$-x_3 \left( \partial_\alpha (b_\beta^\tau \eta_\tau) + \partial_\beta (b_\alpha^\sigma \eta_\sigma) + \partial_{\alpha\beta} \eta_3 - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \partial_\sigma \eta_3 - 2\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma b_\sigma^\tau \eta_\tau \right),$$

y haciendo algunos cálculos concluimos que

$$e_{\alpha||\beta}^1(\boldsymbol{\eta}) - e_{\alpha||\beta}^0(\mathbf{v}(\boldsymbol{\eta})) = -x_3 \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}), \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in V_F(\omega).$$

Por tanto, el lado izquierdo de la ecuación (4.4.33) conduce a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||l}^1 (e_{i||j}^1(\boldsymbol{\eta}) - e_{i||j}^0(\mathbf{v}(\boldsymbol{\eta}))) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} B^{ijkl}(0) \dot{e}_{k||l}^1 (e_{i||j}^1(\boldsymbol{\eta}) - e_{i||j}^0(\mathbf{v}(\boldsymbol{\eta}))) \sqrt{a} dx \\ &= \int_{\Omega} (\lambda a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma})) e_{\sigma||\tau}^1 (-x_3 \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})) \sqrt{a} dx \\ &+ \int_{\Omega} \lambda a^{\alpha\beta} e_{3||3}^1 (-x_3 \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})) \sqrt{a} dx \\ &+ \int_{\Omega} \left( \theta a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \frac{\rho}{2} (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \right) \dot{e}_{\sigma||\tau}^1 (-x_3 \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})) \sqrt{a} dx \\ &+ \int_{\Omega} \theta a^{\alpha\beta} \dot{e}_{3||3}^1 (-x_3 \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})) \sqrt{a} dx \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in V_F(\omega). \end{aligned} \quad (4.4.35)$$

Ahora bien, por los resultados obtenidos en el paso (v), tenemos que (4.4.35) conduce a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( \left( \lambda - \frac{\theta}{\theta + \rho} (\theta \Lambda + \lambda) \right) a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \right) e_{\sigma||\tau}^1 (-x_3 \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})) \sqrt{a} dx \\ &+ \int_{\Omega} \left( \frac{\theta \rho}{\theta + \rho} a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \frac{\rho}{2} (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \right) \dot{e}_{\sigma||\tau}^1 (-x_3 \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})) \sqrt{a} dx \\ &- \int_{\Omega} \frac{(\theta \Lambda)^2}{\theta + \rho} \int_0^t e^{-k(t-s)} a^{\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}^1(s) ds (-x_3 a^{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})) \sqrt{a} dx, \end{aligned}$$

expresión que, utilizando (4.4.34), es equivalente a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{x_3^2}{2} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\xi}^0) \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} \frac{x_3^2}{2} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\sigma\tau}(\dot{\boldsymbol{\xi}}^0) \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx \\ & - \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\Omega} \frac{x_3^2}{2} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\xi}^0(s)) \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx ds \\ &= \frac{1}{3} \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\xi}^0) \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy + \frac{1}{3} \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\sigma\tau}(\dot{\boldsymbol{\xi}}^0) \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy \\ & - \frac{1}{3} \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\xi}^0(s)) \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy ds, \end{aligned}$$

para todo  $\boldsymbol{\eta} \in V_F(\omega)$ , c.p.d. en  $(0, T)$ , con  $a^{\alpha\beta\sigma\tau}$ ,  $b^{\alpha\beta\sigma\tau}$  y  $c^{\alpha\beta\sigma\tau}$  definidos en (4.4.10)–(4.4.12). Por tanto, hemos obtenido el siguiente problema variacional:

Hallar  $\boldsymbol{\xi}^0 : [0, T] \times \omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$\boldsymbol{\xi}^0(t) \in V_F(\omega) \quad \forall t \in [0, T],$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3} \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\sigma\tau}(\xi^0) \rho_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy + \frac{1}{3} \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\sigma\tau}(\dot{\xi}^0) \rho_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy \\
& - \frac{1}{3} \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\sigma\tau}(\xi^0(s)) \rho_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy ds \\
& = \int_{\omega} p^{i,2} \eta_i \sqrt{a} dy \quad \forall \eta \in V_F(\omega), \text{ c.p.d. en } (0, T), \\
& \xi^0(0, \cdot) = \xi_0^0(\cdot).
\end{aligned} \tag{4.4.36}$$

Este problema se conocerá como el problema variacional bidimensional de una lámina flexural viscoelástica. De esta forma, hemos completado la demostración del apartado (c) de este teorema. □

**Observación 4.4.4.** *Los modelos matemáticos variacionales obtenidos en (4.4.26) y en (4.4.36) presentan un término de memoria larga, que tiene en cuenta las deformaciones en los tiempos previos, representado por una integral en la variable temporal. Además, lo más interesante de este término, es que ha aparecido de forma natural a partir del análisis asintótico de un modelo tridimensional que presentaba un término de memoria corta, representado por una derivada temporal. Nótese que la presencia de la exponencial negativa hace que los estados de deformación antiguos sean menos influyentes que los más recientes. En la literatura se pueden encontrar comportamientos análogos presentes en modelos para vigas para el estiramiento o flexión de barras viscoelásticas [139], obtenidos también mediante métodos asintóticos. Este tipo de viscosidad había sido descrita previamente en [48, 127], por ejemplo.*

En los próximos capítulos, estudiaremos la existencia y unicidad de solución de los problemas bidimensionales obtenidos. Para ello, adelantaremos el siguiente resultado relativo a la elipticidad de los tensores bidimensionales de cuarto orden definidos por sus componentes contravariantes en (4.4.10)–(4.4.12).

**Teorema 4.4.5.** *Sean  $\omega$  un dominio en  $\mathbb{R}^2$ ,  $\theta \in \mathcal{C}^1(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$  una aplicación inyectiva tal que los dos vectores  $\alpha_\alpha = \partial_\alpha \theta$  son linealmente independientes en todo punto de  $\bar{\omega}$  y denotemos por  $a^{\alpha\beta}$  las componentes contravariantes del tensor de cambio de métrica en  $S = \theta(\bar{\omega})$ . Consideremos las componentes contravariantes de los tensores bidimensionales de cuarto orden escalados de la lámina  $a^{\alpha\beta\sigma\tau}$ ,  $b^{\alpha\beta\sigma\tau}$ , definidos en (4.4.10)–(4.4.11). Supongamos que  $\lambda \geq 0$  y  $\mu, \theta, \rho > 0$ . Entonces, existen dos constantes  $c_e > 0$  y  $c_v > 0$  independientes de las variables  $y$  de  $\varepsilon$ , tal que*

$$\sum_{\alpha, \beta} |t_{\alpha\beta}|^2 \leq c_e a^{\alpha\beta\sigma\tau}(\mathbf{y}) t_{\sigma\tau} t_{\alpha\beta}, \tag{4.4.37}$$

$$\sum_{\alpha, \beta} |t_{\alpha\beta}|^2 \leq c_v b^{\alpha\beta\sigma\tau}(\mathbf{y}) t_{\sigma\tau} t_{\alpha\beta}, \tag{4.4.38}$$

para todo  $\mathbf{y} \in \bar{\omega}$  y todo  $\mathbf{t} = (t_{\alpha\beta}) \in \mathbb{S}^2$ .

**Observación 4.4.6.** *La demostración de este resultado se obtiene utilizando argumentos similares a los utilizados en la demostración del Teorema 3.3-2, [30].*

*De la misma forma, se puede probar la elipticidad del tensor bidimensional de cuarto orden escalado ( $c^{\alpha\beta\sigma\tau}$ ) aunque, a diferencia de la elipticidad de los tensores mencionados en el teorema anterior, no será utilizado en este estudio.*

En el apartado (iv) del Teorema 4.4.1 obtuvimos las ecuaciones bidimensionales para una lámina membrana viscoelástica. Bajo la hipótesis de  $V_0(\omega) = \{\mathbf{0}\}$  tenemos asegurada la unicidad de solución del problema, pero no la existencia. Es por esto por lo que necesitaremos considerar la compleción del espacio  $V(\omega)$  de forma que el problema esté bien definido. Por ello, en lo que sigue de este estudio, hablaremos de láminas de tipo membrana cuando el espacio  $V_F(\omega)$  contenga solo el elemento nulo y de láminas flexurales en caso contrario. Además, en el caso de las láminas membrana ( $V_F(\omega) = \{\mathbf{0}\}$ ) distinguiremos dos grupos dependiendo de la geometría de la superficie media de la lámina,  $S$ , y del subconjunto donde se considera la condición de contorno de fijación. Así, presentaremos los correspondientes teoremas de convergencia, existencia y unicidad de solución y la interpretación física para cada uno de los tres casos, denominados como: membrana elíptica viscoelástica, membrana generalizada viscoelástica y lámina flexural viscoelástica.



## Capítulo 5

# Justificación matemática de un modelo de membrana elíptica viscoelástica

Consideremos una familia de láminas viscoelásticas lineales con grosor  $2\varepsilon$ . En particular, en este capítulo supondremos que la familia de láminas están encastradas en toda su frontera lateral ( $\gamma_0 = \gamma$ ) y que todas tienen la misma superficie media  $S = \theta(\bar{\omega}) \subset \mathbb{R}^3$ , uniformemente elíptica, en el sentido de que los dos radios principales de curvatura son ambos positivos o ambos negativos en cada punto de  $S$ .

En este capítulo veremos que, si la densidad de fuerzas volumétricas aplicadas es  $\mathcal{O}(1)$  con respecto a  $\varepsilon$  y la densidad de fuerzas superficiales es  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ , la solución del problema variacional escalado en coordenadas curvilíneas,  $\mathbf{u}(\varepsilon)$ , definida sobre el dominio de referencia  $\Omega = \omega \times (-1, 1)$  para cada  $t \in [0, T]$ , converge a un límite  $\mathbf{u} = (u_i)$  con  $u_\alpha(\varepsilon) \rightarrow u_\alpha$  en  $H^1(0, T; H^1(\Omega))$  y  $u_3(\varepsilon) \rightarrow u_3$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$ , cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Además, veremos que este límite es independiente de la variable transversal  $x_3$ . También probaremos que el promedio  $\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{u} dx_3$ , que pertenece al espacio  $H^1(0, T; V_M(\omega))$ , donde  $V_M(\omega) = H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times L^2(\omega)$ , verifica las ecuaciones bidimensionales escaladas de un modelo que denominaremos como problema de una lámina elíptica viscoelástica.

Una vez más seguiremos la notación y estilo de [30], en particular, el Capítulo 4, dedicado a la justificación de las ecuaciones bidimensionales de una membrana elíptica elástica. La existencia y unicidad de solución de esas ecuaciones la podemos encontrar en [36], que complementa los estudios realizados en años anteriores para los modelos bidimensionales de tipo membrana en [37, 38]. La justificación matemática, por su parte, se puede encontrar en [33].

En primer lugar, en la Sección 5.1 introduciremos algunos resultados teóricos que utilizaremos en este capítulo y en los siguientes. A continuación, en la Sección 5.2 escribiremos el problema variacional bidimensional (escalado y desescalado) de una membrana elíptica viscoelástica y demostraremos la existencia y unicidad de solución. Después, en la Sección 5.3, presentaremos el teorema principal de este capítulo, que comprende los resultados de convergencia para el caso escalado cuando el parámetro pequeño  $\varepsilon$  tiende a cero. Finalmente, obtendremos los resultados de convergencia correspondientes para el problema en términos de las incógnitas desescaladas y para las tensiones asociadas.



## 5.1. Resultados preliminares

Comenzaremos el capítulo introduciendo algunos resultados que serán necesarios en lo que sigue de la Parte II de este estudio. Como hemos comentado en la introducción de este capítulo, los promedios con respecto a la variable transversal tendrán un papel importante en la obtención de los resultados de convergencia. En general, dada una función real o vectorial  $v$  definida en casi todo punto de  $\Omega = \omega \times (-1, 1)$ , denotamos el promedio transversal de dicha función como  $\bar{v}$  y se define como:

$$\bar{v}(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 v(\mathbf{y}, x_3) dx_3, \quad (5.1.1)$$

para casi todo  $\mathbf{y} \in \omega$ .

En primer lugar, presentamos un resultado que puede considerarse una ampliación del Teorema 4.2-1, [30], a una situación no estática que será clave para obtener las convergencias que han sido adelantadas en la introducción de este capítulo. Por completitud, mostraremos la demostración del resultado siguiendo los argumentos utilizados en el Teorema 4.2-1, [30], incorporando las adaptaciones necesarias para nuestro problema.

**Teorema 5.1.1.** Sean  $\omega$  un dominio en  $\mathbb{R}^2$ ,  $\Omega = \omega \times (-1, 1)$  y  $T > 0$ .

(a) Sea  $v \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$ . Entonces  $\bar{v}(\mathbf{y})$  es finito para casi todo  $\mathbf{y} \in \omega$ , pertenece a  $H^1(0, T; L^2(\omega))$ , y verifica:

$$\|\bar{v}\|_{H^1(0, T; L^2(\omega))} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|v\|_{H^1(0, T; L^2(\Omega))}.$$

Si además,  $\partial_3 v = 0$  en el sentido de las distribuciones  $\left( \int_{\Omega} v \partial_3 \varphi dx = 0 \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \right)$  entonces  $v$  no depende de  $x_3$  y

$$v(\mathbf{y}, x_3) = \bar{v}(\mathbf{y}) \text{ para casi todo } (\mathbf{y}, x_3) \in \Omega.$$

(b) Sea  $v \in H^1(0, T; H^1(\Omega))$ . Entonces  $\bar{v} \in H^1(0, T; H^1(\omega))$ ,  $\partial_{\alpha} \bar{v} = \overline{\partial_{\alpha} v}$  y

$$\|\bar{v}\|_{H^1(0, T; H^1(\omega))} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|v\|_{H^1(0, T; H^1(\Omega))}.$$

Sea  $\gamma_0$  un subconjunto  $\partial\gamma$ -medible de  $\gamma$ . Si  $v = 0$  en  $\gamma_0 \times [-1, 1]$  entonces  $\bar{v} = 0$  en  $\gamma_0$ ; en particular,  $\bar{v} \in H^1(0, T; H_0^1(\omega))$  si  $v = 0$  en  $\gamma \times [-1, 1]$ .

(c) Sea  $(v(\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$  una sucesión de funciones  $v(\varepsilon) \in H^1(0, T; H^1(\Omega))$  y sea  $\bar{v} \in H^1(0, T; L^2(\omega))$  tal que

$$\partial_3 v(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ en } H^1(0, T; L^2(\Omega)) \text{ y } \bar{v}(\varepsilon) \rightarrow \bar{v} \text{ en } H^1(0, T; L^2(\omega)) \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Entonces,  $v(\varepsilon) \rightarrow \bar{v}$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , donde la función  $\bar{v} \in H^1(0, T; L^2(\omega))$  se identifica con una función en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  tomando  $\bar{v}(\mathbf{y}, x_3) := \bar{v}(\mathbf{y})$  para todo  $(\mathbf{y}, x_3) \in \Omega$ .



(d) Sea  $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^3(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$ . Consideremos una sucesión  $(\mathbf{v}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  de campos vectoriales  $\mathbf{v}(\varepsilon) = (v_i(\varepsilon)) \in H^1(0, T; [H^1(\Omega)]^3)$  tal que esta acotada en  $H^1(0, T; [L^2(\Omega)]^3)$ . Entonces,

$$\left( \overline{e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon; \mathbf{v}(\varepsilon))} - \gamma_{\alpha\beta}(\overline{\mathbf{v}(\varepsilon)}) \right) \rightarrow 0 \text{ en } H^1(0, T; L^2(\omega)) \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

*Demostración.* (a) Sea  $v \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$ . Por el teorema de Fubini, la función  $v(\mathbf{y}, \cdot) \in L^2(0, T; L^2(-1, 1))$  para casi todo  $\mathbf{y} \in \omega$ . Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que,

$$\left| \int_{-1}^1 v(\mathbf{y}, x_3) dx_3 \right|^2 \leq 2 \int_{-1}^1 |v(\mathbf{y}, x_3)|^2 dx_3 < +\infty, \text{ c.t.p. } \mathbf{y} \in \omega.$$

Por tanto,

$$\int_0^T \left( \int_{\omega} |\bar{v}(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} \right) dt \leq \frac{1}{2} \int_0^T \left( \int_{\omega} \left( \int_{-1}^1 |v(\mathbf{y}, x_3)|^2 dx_3 \right) d\mathbf{y} \right) dt = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |v|^2 dx,$$

y así,  $\|\bar{v}\|_{L^2(0, T; L^2(\omega))} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|v\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}$ . Repitiendo el mismo procedimiento para  $\dot{v} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , concluimos la desigualdad deseada.

Si  $\partial_3 v = 0$  en el sentido de las distribuciones, existe  $\eta \in L^2(0, T; L^2(\omega))$  tal que  $v(\mathbf{y}, x_3) = \eta(\mathbf{y})$  para casi todo  $(\mathbf{y}, x_3) \in \Omega$  (para consultar los detalles de la demostración véase, por ejemplo, Lema 4.1, [46]). Además, en este caso,  $\bar{v} = \eta$  y concluimos la prueba del apartado.

(b) Sea  $v \in H^1(0, T; H^1(\Omega))$ . Dada una función arbitraria  $\varphi \in D(\omega)$ , sea  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida por  $\Phi(\mathbf{y}, x_3) = \varphi(\mathbf{y})$  para todo  $(\mathbf{y}, x_3) \in \Omega$ . Como  $\Phi$  se anula en  $\gamma \times [-1, 1]$  y las componentes en la dirección no transversal del vector normal unitario en  $\Gamma_+ \cup \Gamma_-$  son nulas, tenemos por la fórmula de Green que

$$\int_{\Omega} v \partial_{\alpha} \Phi dx = - \int_{\Omega} \partial_{\alpha} v \Phi dx.$$

Como  $v \in L^2(\Omega)$ ,  $\partial_{\alpha} \Phi \in L^2(\Omega)$  y  $\Phi$ ,  $\partial_{\alpha} \Phi$  son independientes de  $x_3$ , por el teorema de Fubini:

$$\int_0^T \left( \int_{\omega} \bar{v} \partial_{\alpha} \varphi dx \right) \Psi dt = - \int_0^T \left( \int_{\omega} \overline{\partial_{\alpha} v} \varphi dx \right) \Psi dt,$$

con  $\Psi \in D(0, T)$  arbitrario. Luego, teniendo en cuenta el apartado (a) deducimos que  $\|\bar{v}\|_{L^2(0, T; H^1(\omega))} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|v\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}$ . Repitiendo el mismo procedimiento para  $\dot{v} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , concluimos la desigualdad deseada.

Para la segunda afirmación de este apartado seguimos los pasos de la demostración de (b) en el Teorema 4.2-1 que se aplica de la misma forma al elemento  $v$  y a su derivada temporal, obteniendo el resultado anunciado.

(c) Sea  $v \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$  tal que  $\partial_3 v$  pertenece a  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  en el sentido de las distribuciones. Entonces podemos escribir, para casi todo  $(\mathbf{y}, s) \in \omega \times (-1, 1)$  y para todo  $t \in (0, T)$  (para consultar los detalles de la demostración véase, por ejemplo, Lema 1.3, [46]):

$$v(\mathbf{y}, s) = v(\mathbf{y}, -1) + \int_{-1}^s \partial_3 v(\mathbf{y}, x_3) dx_3,$$

y así,

$$\bar{v}(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 v(\mathbf{y}, s) ds = v(\mathbf{y}, -1) + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left( \int_{-1}^r \partial_3 v(\mathbf{y}, x_3) dx_3 \right) dr.$$

Por tanto, podemos deducir la siguiente igualdad:

$$v(\mathbf{y}, s) = \bar{v}(\mathbf{y}) + \int_{-1}^s \partial_3 v(\mathbf{y}, x_3) dx_3 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left( \int_{-1}^r \partial_3 v(\mathbf{y}, x_3) dx_3 \right) dr.$$

Entonces se tiene que,

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 &= \int_0^T \int_{\omega} \int_{-1}^1 |v(\mathbf{y}, s)|^2 ds dy dt \\ &= \int_0^T \int_{\omega} \int_{-1}^1 \left( \bar{v}(\mathbf{y}) + \int_{-1}^s \partial_3 v(\mathbf{y}, x_3) dx_3 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left( \int_{-1}^r \partial_3 v(\mathbf{y}, x_3) dx_3 \right) dr \right)^2 ds dy dt. \end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad triangular y las relaciones,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\omega} \int_{-1}^1 |\bar{v}(\mathbf{y})|^2 ds dy dt &= 2 \|\bar{v}\|_{L^2(0, T; L^2(\omega))}^2, \\ \int_0^T \int_{\omega} \int_{-1}^1 \left| \int_{-1}^s \partial_3 v(\mathbf{y}, x_3) dx_3 \right|^2 ds dy dt &\leq 4 \|\partial_3 v\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2, \\ \int_0^T \int_{\omega} \int_{-1}^1 \left| \int_{-1}^1 \left( \int_{-1}^t \partial_3 v(\mathbf{y}, x_3) dx_3 \right) dt \right|^2 ds dy dt &\leq 8 \|\partial_3 v\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2, \end{aligned}$$

deducimos,

$$\|v\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq \sqrt{2} \|\bar{v}\|_{L^2(0, T; L^2(\omega))} + (2 + \sqrt{2}) \|\partial_3 v\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}.$$

Ahora, tomando en esta desigualdad  $v = v(\varepsilon) - \bar{v}$  y haciendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , podemos concluir que  $v(\varepsilon) \rightarrow \bar{v}$  en  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . Repitiendo el mismo procedimiento para  $\dot{v} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , concluimos la demostración del apartado.

(d) Del apartado (b) deducimos que

$$\frac{1}{2} \left( \overline{\partial_\alpha v_\beta(\varepsilon) + \partial_\beta v_\alpha(\varepsilon)} \right) = \frac{1}{2} \left( \partial_\alpha \overline{v_\beta(\varepsilon)} + \partial_\beta \overline{v_\alpha(\varepsilon)} \right).$$

Por tanto, para obtener la convergencia anunciada tenemos que probar que

$$\left( \overline{\Gamma_{\alpha\beta}^p(\varepsilon) v_p(\varepsilon)} - \Gamma_{\alpha\beta}^p(0) \overline{v_p(\varepsilon)} \right) \rightarrow 0 \text{ en } H^1(0, T; L^2(\omega)), \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0,$$

donde las funciones  $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma(0) := \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma$  y  $\Gamma_{\alpha\beta}^3(0) := b_{\alpha\beta}$  son independientes de  $x_3$ . Teniendo en cuenta el comportamiento asintótico de las funciones  $\Gamma_{\alpha\beta}^p(\varepsilon)$  (véase el Teorema 4.3.1) y la desigualdad de (a) se tiene que,

$$\begin{aligned} \left\| \overline{\Gamma_{\alpha\beta}^p(\varepsilon) v_p(\varepsilon)} - \Gamma_{\alpha\beta}^p(0) \overline{v_p(\varepsilon)} \right\|_{H^1(0, T; L^2(\omega))} &= \left\| \overline{\Gamma_{\alpha\beta}^p(\varepsilon) v_p(\varepsilon) - \Gamma_{\alpha\beta}^p(0) v_p(\varepsilon)} \right\|_{H^1(0, T; L^2(\omega))} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \Gamma_{\alpha\beta}^p(\varepsilon) v_p(\varepsilon) - \Gamma_{\alpha\beta}^p(0) v_p(\varepsilon) \right\|_{H^1(0, T; L^2(\Omega))} \leq C\varepsilon \|\mathbf{v}(\varepsilon)\|_{H^1(0, T; L^2(\Omega))}, \end{aligned}$$

con  $C > 0$  independiente de  $\varepsilon$ . Ahora bien, como la sucesión  $(\mathbf{v}(\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$  está acotada en el espacio  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  entonces, haciendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  concluimos el resultado.  $\square$

En el siguiente teorema recordamos una desigualdad de tipo Korn tridimensional para una familia de láminas membrana elípticas, cuya demostración podemos encontrar en el Teorema 4.3-1, [30].

**Teorema 5.1.2.** *Supongamos que  $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^3(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$  y consideremos  $\varepsilon_0$  definido como en el Teorema 4.1.4. Consideremos una familia de láminas membrana elípticas con grosor  $2\varepsilon$  y cada una teniendo la misma superficie media  $S = \boldsymbol{\theta}(\bar{\omega})$ . Entonces, existe una constante  $\varepsilon_1$  verificando  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$  y una constante  $C > 0$  tal que, para todo  $\varepsilon, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ , se verifica la siguiente desigualdad de tipo Korn tridimensional,*

$$\left( \sum_{\alpha} \|v_{\alpha}\|_{1,\Omega}^2 + |v_3|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \leq C \left( \sum_{i,j} |e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v})|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \quad \forall \mathbf{v} = (v_i) \in V(\Omega). \quad (5.1.2)$$

A continuación, recordamos otra desigualdad de tipo Korn para membranas elípticas, en este caso bidimensional, que utilizaremos para demostrar la existencia de solución del problema de la membrana elíptica viscoelástica. La demostración de este resultado se puede encontrar en el Teorema 2.7-3, [30]. Definamos el espacio,

$$V_M(\omega) := H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times L^2(\omega).$$

**Teorema 5.1.3.** *Sean  $\omega$  un dominio en  $\mathbb{R}^2$  y  $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^{2,1}(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$  una aplicación inyectiva tal que los dos vectores  $\mathbf{a}_{\alpha} = \partial_{\alpha} \boldsymbol{\theta}$  son linealmente independientes en todos los puntos de  $\bar{\omega}$  y tal que la superficie  $S = \boldsymbol{\theta}(\bar{\omega})$  es elíptica. Entonces se verifica la siguiente desigualdad:*

$$\left( \sum_{\alpha} \|\eta_{\alpha}\|_{1,\omega}^2 + |\eta_3|_{0,\omega}^2 \right)^{1/2} \leq C_M \left( \sum_{\alpha,\beta} |\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})|_{0,\omega}^2 \right)^{1/2} \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in V_M(\omega). \quad (5.1.3)$$

Nótese que esta desigualdad implica que la compleción del espacio  $V(\omega) = \{\mathbf{v} = (v_i) \in [H^1(\omega)]^3; v_i = 0 \text{ on } \gamma\}$  con la norma

$$|\cdot|_\omega^M := \left( \sum_{\alpha, \beta} |\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})|_{0,\omega}^2 \right)^{1/2}, \quad (5.1.4)$$

es precisamente  $V_M(\omega)$ .

## 5.2. Ecuaciones bidimensionales de una membrana elíptica viscoelástica

De aquí en adelante y en lo que resta de capítulo, supongamos que la densidad de fuerzas volumétricas es  $\mathcal{O}(1)$  con respecto a  $\varepsilon$  y la densidad de fuerzas superficiales es  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ . En esta sección escribiremos el problema variacional (escalado y desescalado) bien definido para la membrana elíptica viscoelástica correspondiente a las ecuaciones obtenidas en el apartado (iv) del Teorema 4.4.1 y probaremos la existencia y unicidad de solución. Por tanto, como ya hemos anunciado en el capítulo anterior, necesitamos considerar un espacio compleción de  $V(\omega)$ .

La obtención de los espacios que completen  $V(\omega)$  dependerá de la geometría de la superficie media  $S$  de la familia de láminas y el subconjunto donde se considera la condición de contorno de fijación. Como hemos comentado al inicio de este capítulo, una lámina membrana elíptica viscoelástica es aquella cuya superficie media  $S = \boldsymbol{\theta}(\bar{\omega})$  es elíptica y la cual está sometida a una condición de fijación en toda su frontera lateral (véase la Figura 5.1), es decir,  $\gamma = \gamma_0$ . Para este caso, el espacio adecuado donde el problema está bien definido es  $V_M(\omega)$ , ya que es la compleción del espacio  $V(\omega)$  con respecto a la norma  $|\cdot|_\omega^M$  definida en (5.1.4). Además, el espacio  $V_0(\omega)$  es tal que solo contiene el elemento  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$  (véase (5.1.3)), y como consecuencia  $V_F(\omega) = \{\mathbf{0}\}$ .

Por tanto, estamos en condiciones de enunciar el problema variacional bidimensional para una lámina membrana elíptica viscoelástica:

**Problema 5.2.1.** *Hallar  $\boldsymbol{\xi} : [0, T] \times \omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que,*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}(t, \cdot) &\in V_M(\omega) \quad \forall t \in [0, T], \\ \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\xi}) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy &+ \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\dot{\boldsymbol{\xi}}) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy \\ &- \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\xi}(s)) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy ds \\ &= \int_{\omega} p^{i,0} \eta_i \sqrt{a} dy \quad \forall \boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in V_M(\omega), \text{ c.t.p. } t \in (0, T), \\ \boldsymbol{\xi}(0, \cdot) &= \boldsymbol{\xi}_0(\cdot), \end{aligned}$$

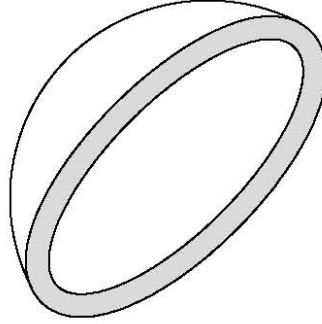


Figura 5.1: Ejemplo de membrana elíptica. La zona sombreada indica el conjunto donde se considera la condición de contorno de fijación.

donde,

$$p^{i,0}(t) := \int_{-1}^1 f^{i,0}(t) dx_3 + h_+^{i,1}(t) + h_-^{i,1}(t) \quad y \quad h_{\pm}^{i,1}(t, \cdot) = h^{i,1}(t, \cdot, \pm 1).$$

El Problema 5.2.1 está bien definido y podemos probar la existencia y unicidad de solución que anuncia el siguiente teorema:

**Teorema 5.2.2.** Sean  $\omega$  un dominio en  $\mathbb{R}^2$ ,  $\theta \in \mathcal{C}^2(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$  una aplicación inyectiva tal que los dos vectores  $\mathbf{a}_{\alpha} = \partial_{\alpha} \theta$  son linealmente independientes en todo punto de  $\bar{\omega}$ . Sean  $f^{i,0} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $h^{i,1} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$ , donde  $\Gamma_1 := \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ . Sea  $\xi_0 \in V_M(\omega)$ . Entonces el Problema 5.2.1, tiene solución única  $\xi \in H^1(0, T; V_M(\omega))$ . Además, si  $f^{i,0} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $\dot{h}^{i,1} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$ , entonces  $\xi \in H^2(0, T; V_M(\omega))$ .

*Demostración.* Consideremos las formas bilineales  $a, b, c : V_M(\omega) \times V_M(\omega) \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por:

$$\begin{aligned} a(\xi, \eta) &:= \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\xi) \gamma_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy, \\ b(\xi, \eta) &:= \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\xi) \gamma_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy, \\ c(\xi, \eta) &:= \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\xi) \gamma_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy, \end{aligned}$$

para todo  $\xi, \eta \in V_M(\omega)$ . Dado que  $p^{i,0} \in L^2(0, T; L^2(\omega))$  y que las formas bilineales  $a$  y  $b$  son elípticas, teniendo en cuenta la elipticidad de los tensores bidimensionales (véase el Teorema 4.4.5) y la desigualdad de tipo Korn en (5.1.3), podemos considerar el Problema 5.2.1 en el marco de la formulación (4.3.8)–(4.3.9). Así, siguiendo argumentos análogos a los de la demostración del Teorema 4.3.15, deducimos que el Problema 5.2.1 tiene solución única  $\xi \in H^1(0, T; V_M(\omega))$ . Si además, tenemos regularidad adicional para  $f^{i,0}$  y  $h^{i,1}$ , podemos concluir que  $\xi \in H^2(0, T; V_M(\omega))$ .  $\square$

En vista de los escalados de las incógnitas en (4.2.1), definimos para cada  $\varepsilon > 0$  las componentes covariantes  $\xi_i^\varepsilon : \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}$  del campo de desplazamientos límite  $\xi^\varepsilon : \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  de la superficie media  $S$  de la lámina tomando

$$\xi_i^\varepsilon := \xi_i \text{ y } \xi^\varepsilon := \xi_i^\varepsilon \mathbf{a}^i. \quad (5.2.1)$$

También, podemos definir las componentes contravariantes de los tensores bidimensionales de cuarto orden  $a^{\alpha\beta\sigma\tau,\varepsilon}$ ,  $b^{\alpha\beta\sigma\tau,\varepsilon}$  y  $c^{\alpha\beta\sigma\tau,\varepsilon}$  como:

$$a^{\alpha\beta\sigma\tau,\varepsilon} := \frac{2\lambda^\varepsilon(\rho^\varepsilon)^2 + 4\mu^\varepsilon(\theta^\varepsilon)^2}{(\theta^\varepsilon + \rho^\varepsilon)^2} a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + 2\mu^\varepsilon(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}), \quad (5.2.2)$$

$$b^{\alpha\beta\sigma\tau,\varepsilon} := \frac{2\theta^\varepsilon \rho^\varepsilon}{\theta^\varepsilon + \rho^\varepsilon} a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \rho^\varepsilon(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}), \quad (5.2.3)$$

$$c^{\alpha\beta\sigma\tau,\varepsilon} := \frac{2(\theta^\varepsilon \Lambda^\varepsilon)^2}{\theta^\varepsilon + \rho^\varepsilon} a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau}, \quad (5.2.4)$$

donde,

$$\Lambda^\varepsilon := \left( \frac{\lambda^\varepsilon}{\theta^\varepsilon} - \frac{\lambda^\varepsilon + 2\mu^\varepsilon}{\theta^\varepsilon + \rho^\varepsilon} \right). \quad (5.2.5)$$

Finalmente, introducimos la constante,

$$k^\varepsilon := \frac{\lambda^\varepsilon + 2\mu^\varepsilon}{\theta^\varepsilon + \rho^\varepsilon}. \quad (5.2.6)$$

**Observación 5.2.3.** *Nótese que las definiciones (5.2.2)-(5.2.6) coinciden con las expresiones introducidas en (4.4.10)-(4.4.13) teniendo en cuenta la hipótesis asumidas para los coeficientes de Lamé y de viscosidad en (4.1.18) y (4.1.19), respectivamente.*

Por tanto, podemos escribir el problema variacional desescalado para una lámina membrana elíptica viscoelástica:

**Problema 5.2.4.** *Hallar  $\xi^\varepsilon : [0, T] \times \omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que,*

$$\begin{aligned} & \xi^\varepsilon(t, \cdot) \in V_M(\omega) \quad \forall t \in [0, T], \\ & \varepsilon \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau,\varepsilon} \gamma_{\sigma\tau}(\xi^\varepsilon) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy + \varepsilon \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau,\varepsilon} \gamma_{\sigma\tau}(\dot{\xi}^\varepsilon) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy \\ & \quad - \varepsilon \int_0^t e^{-k^\varepsilon(t-s)} \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau,\varepsilon} \gamma_{\sigma\tau}(\xi^\varepsilon(s)) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy ds \\ & = \int_{\omega} p^{i,\varepsilon} \eta_i \sqrt{a} dy \quad \forall \boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in V_M(\omega), \text{ c.p.d. en } (0, T), \\ & \xi^\varepsilon(0, \cdot) = \xi_0^\varepsilon(\cdot), \end{aligned}$$

donde

$$p^{i,\varepsilon}(t) := \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f^{i,\varepsilon}(t) dx_3^\varepsilon + h_+^{i,\varepsilon}(t) + h_-^{i,\varepsilon}(t) \quad \text{y} \quad h_\pm^{i,\varepsilon}(t) = h^{i,\varepsilon}(t, \cdot, \pm\varepsilon).$$

**Teorema 5.2.5.** Sean  $\omega$  un dominio  $\mathbb{R}^2$ ,  $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^2(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$  una aplicación inyectiva tal que los dos vectores  $\mathbf{a}_\alpha = \partial_\alpha \boldsymbol{\theta}$  son linealmente independientes en todo punto de  $\bar{\omega}$ . Sean  $f^{i,\varepsilon} \in L^2(0, T; L^2(\Omega^\varepsilon))$ ,  $h^{i,\varepsilon} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1^\varepsilon))$ , donde  $\Gamma_1^\varepsilon := \Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon$ . Sea  $\boldsymbol{\xi}_0^\varepsilon \in V_M(\omega)$ . Entonces el Problema 5.2.4, tiene una única solución  $\boldsymbol{\xi}^\varepsilon \in H^1(0, T; V_M(\omega))$ . Además, si  $\dot{f}^{i,\varepsilon} \in L^2(0, T; L^2(\Omega^\varepsilon))$ ,  $\dot{h}^{i,\varepsilon} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1^\varepsilon))$ , entonces  $\boldsymbol{\xi}^\varepsilon \in H^2(0, T; V_M(\omega))$ .

*Demostración.* La demostración de este teorema es análoga a la del Teorema 5.2.2.  $\square$

### 5.3. Resultados de convergencia cuando $\varepsilon \rightarrow 0$

Comenzaremos esta sección recordando el problema tridimensional escalado de una lámina viscoelástica, del cual estudiaremos la convergencia cuando  $\varepsilon$  tiende a cero. Por tanto, sea  $\mathbf{u}(\varepsilon)$  la única solución del Problema 4.2.9 con  $p = 0$  (véase el Teorema 4.3.13), que se escribe como:

**Problema 5.3.1.** Hallar  $\mathbf{u}(\varepsilon) : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\varepsilon)(t, \cdot) &\in V(\Omega) \quad \forall t \in [0, T], \\ \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx &+ \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) \dot{e}_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &= \int_{\Omega} f^i v_i \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^i v_i \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega), \text{ c.p.d. en } (0, T), \\ \mathbf{u}(\varepsilon)(0, \cdot) &= \mathbf{u}_0(\varepsilon)(\cdot). \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

**Observación 5.3.2.** Nótese que hemos identificado  $f^i \equiv f^{i,0}$  y  $h^i \equiv h^{i,1}$  para simplificar la notación.

Ahora bien, para cada  $\varepsilon > 0$ , supondremos que la condición inicial de las deformaciones linealizadas escaladas es

$$e_{i||j}(\varepsilon)(0, \cdot) = 0, \quad (5.3.2)$$

es decir, el dominio se encuentra en su estado natural sin deformaciones al inicio del periodo de observación.

A continuación presentaremos el resultado principal de este capítulo. Veremos que la incógnita tridimensional escalada  $\mathbf{u}(\varepsilon)$ , solución del Problema 5.3.1, converge cuando  $\varepsilon$  tiende a cero a un límite  $\mathbf{u}$  independiente de la variable transversal  $x_3$ . Además, podremos identificar el promedio de este límite con la solución  $\boldsymbol{\xi} = \bar{\mathbf{u}}$  del Problema 5.2.1, definido en el conjunto  $\omega$ .

**Teorema 5.3.3.** Supongamos que  $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^3(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$  y sea  $\varepsilon_0$  definido como en el Teorema 4.1.4. Consideremos una familia de láminas membranas elípticas de espesor  $2\varepsilon$  que tiende a cero y teniendo cada una la misma superficie media  $S = \boldsymbol{\theta}(\bar{\omega})$ . Asumamos (5.3.2) y las hipótesis en los datos mencionadas en el Teorema 5.2.2. Para todo  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , sea  $\mathbf{u}(\varepsilon)$  la solución asociada al Problema 5.3.1. Entonces, existen funciones  $u_\alpha \in H^1(0, T; H^1(\Omega))$  verificando  $u_\alpha = 0$  en  $\gamma \times [-1, 1]$  y una función  $u_3 \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$ , tal que



- (a)  $u_\alpha(\varepsilon) \rightarrow u_\alpha$  en  $H^1(0, T; H^1(\Omega))$  y  $u_3(\varepsilon) \rightarrow u_3$  y  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  
 (b)  $\mathbf{u} := (u_i)$  es independiente de la variable transversal  $x_3$ .

Además, el promedio  $\bar{\mathbf{u}} := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{u} dx_3 = \boldsymbol{\xi}$  verifica el Problema 5.2.1.

*Demostración.* Seguiremos la misma estructura de la demostración del Teorema 4.4-1, [30]. Por tanto, haremos referencia a algunos pasos que se aplican de la misma forma a este problema. Para simplificar la exposición, empezaremos considerando que el problema propuesto solo está sometido a la acción de fuerzas volumétricas. En el último paso de la demostración añadiremos las fuerzas superficiales para concluir la prueba. Entonces, supongamos que la incógnita escalada  $\mathbf{u}(\varepsilon)$  verifica el siguiente problema variacional:

Hallar  $\mathbf{u}(\varepsilon)(t, \cdot) \in V(\Omega) \forall t \in [0, T]$  tal que,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon, \mathbf{v}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) \dot{e}_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon, \mathbf{v}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &= \int_{\Omega} f^i v_i \sqrt{g(\varepsilon)} dx \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega), \text{ c.t.p. } t \in (0, T), \\ & \mathbf{u}(\varepsilon)(0, \cdot) = \mathbf{u}_0(\varepsilon)(\cdot). \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

Dividiremos la demostración en varios pasos, enumerados desde (i) hasta (x).

(i) *Acotaciones a priori y extracción de sucesiones convergentes.*

Las normas  $\|e_{i||j}(\varepsilon)\|_{H^1(0, T; L^2(\Omega))}$ ,  $\|u_\alpha(\varepsilon)\|_{H^1(0, T; H^1(\Omega))}$ , y  $\|u_3(\varepsilon)\|_{H^1(0, T; L^2(\Omega))}$  están acotadas independientemente de  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ , con  $\varepsilon_1 > 0$  definido en el Teorema 5.1.2. Como consecuencia, existe una subsucesión, denotada también como  $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$ , y funciones  $e_{i||j} \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $u_\alpha \in H^1(0, T; H^1(\Omega))$ , verificando  $u_\alpha = 0$  en  $\Gamma_0$ , y  $u_3 \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$ , tal que:

$$e_{i||j}(\varepsilon) \rightharpoonup e_{i||j} \text{ en } H^1(0, T; L^2(\Omega)), \quad (5.3.4)$$

$$u_\alpha(\varepsilon) \rightharpoonup u_\alpha \text{ en } H^1(0, T; H^1(\Omega)) \quad (5.3.5)$$

$$\text{y por tanto } u_\alpha(\varepsilon) \rightarrow u_\alpha \text{ en } H^1(0, T; L^2(\Omega)), \quad (5.3.6)$$

$$u_3(\varepsilon) \rightharpoonup u_3 \text{ en } H^1(0, T; L^2(\Omega)). \quad (5.3.7)$$

Para demostrar este paso empezaremos tomando  $\mathbf{v} = \mathbf{u}(\varepsilon)(t, \cdot)$  en (5.3.3) obteniendo,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) \dot{e}_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &= \int_{\Omega} f^i u_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx, \text{ c.p.d. en } (0, T), \end{aligned}$$



que es equivalente a,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &= \int_{\Omega} f^i u_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx, \text{ c.p.d. en } (0, T). \end{aligned}$$

Ahora bien, integrando en el intervalo  $[0, T]$  y utilizando (4.2.11) y (5.3.2), obtenemos que

$$\int_0^T \left( \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \right) dt \leq \int_0^T \left( \int_{\Omega} f^i u_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \right) dt. \quad (5.3.8)$$

Por un lado, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (4.3.2),

$$\int_{\Omega} f^i u_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \leq g_1^{1/2} \left( \sum_i |f^i|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_i |u_i(\varepsilon)|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}. \quad (5.3.9)$$

Por otro lado, utilizando (4.2.10), (4.3.2) y (5.1.2) obtenemos que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \geq g_0^{1/2} C_e \sum_{k,l} |e_{k||l}(\varepsilon)|_{0,\Omega}^2 \\ & \geq g_0^{1/2} C_e C^{-2} \left( \sum_{\alpha} \|u_{\alpha}(\varepsilon)\|_{1,\Omega}^2 + |u_3(\varepsilon)|_{0,\Omega}^2 \right). \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

Ahora, juntando (5.3.8)–(5.3.10) y utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos:

$$\begin{aligned} & g_0^{1/2} C_e C^{-2} \int_0^T \left( \sum_{\alpha} \|u_{\alpha}(\varepsilon)(t)\|_{1,\Omega}^2 + |u_3(\varepsilon)(t)|_{0,\Omega}^2 \right) dt \leq g_1^{1/2} \int_0^T (|\mathbf{f}(t)|_{0,\Omega} |\mathbf{u}(\varepsilon)(t)|_{0,\Omega}) dt \\ & \leq g_1^{1/2} \left( \int_0^T |\mathbf{f}(t)|_{0,\Omega}^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_0^T |\mathbf{u}(\varepsilon)(t)|_{0,\Omega}^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Por tanto, como  $|\mathbf{u}(\varepsilon)(t)|_{0,\Omega}^2 \leq \sum_{\alpha} \|u_{\alpha}(\varepsilon)(t)\|_{1,\Omega}^2 + |u_3(\varepsilon)(t)|_{0,\Omega}^2$ ,  $\forall t \in [0, T]$ , concluimos que existe una constante  $\tilde{k}_1 > 0$  independiente de  $\varepsilon$  tal que

$$\int_0^T \left( \sum_{\alpha} \|u_{\alpha}(\varepsilon)(t)\|_{1,\Omega}^2 + |u_3(\varepsilon)(t)|_{0,\Omega}^2 \right) dt \leq \tilde{k}_1.$$

Tomamos ahora  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}(\varepsilon)(t, \cdot)$  en (5.3.3), y tenemos que

$$\int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon) \dot{e}_{i||j}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) \dot{e}_{k||l}(\varepsilon) \dot{e}_{i||j}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx$$

$$= \int_{\Omega} f^i \dot{u}_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx, \text{ c.p.d. en } (0, T).$$

Integrando en el intervalo  $[0, T]$  y utilizando (4.2.10) y (5.3.2), obtenemos que

$$\int_0^T \left( \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) \dot{e}_{k||l}(\varepsilon) \dot{e}_{i||j}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \right) dt \leq \int_0^T \left( \int_{\Omega} f^i \dot{u}_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \right) dt,$$

que es análogo a (5.3.8) con las componentes contravariantes del tensor de viscosidad y derivadas temporales de las funciones  $e_{i||j}(\varepsilon)$  y  $u_i(\varepsilon)$  en su lugar. Por tanto, siguiendo argumentos similares y utilizando (4.2.11), se obtiene que existe una constante  $\tilde{k}_2 > 0$  independiente de  $\varepsilon$  tal que

$$\int_0^T \left( \sum_{\alpha} \|\dot{u}_{\alpha}(\varepsilon)(t)\|_{1,\Omega}^2 + |\dot{u}_3(\varepsilon)(t)|_{0,\Omega}^2 \right) dt \leq \tilde{k}_2.$$

Por tanto, existen  $u_{\alpha} \in H^1(0, T; H^1(\Omega))$ ,  $u_3 \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$  y  $e_{i||j} \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$ , tales que se verifican las convergencias anunciadas en (5.3.4)–(5.3.7).

**Observación 5.3.4.** *Utilizando un resultado de análisis funcional que podemos encontrar, por ejemplo, en el Lema 2.55, [107], las convergencias (5.3.4)–(5.3.7) implican que  $u_{\alpha}(\varepsilon)(t, \cdot) \rightharpoonup u_{\alpha}(t, \cdot)$  en  $H^1(\Omega)$ ,  $\forall t \in [0, T]$ ,  $u_3(\varepsilon)(t, \cdot) \rightharpoonup u_3(t, \cdot)$  en  $L^2(\Omega)$ ,  $\forall t \in [0, T]$  y  $e_{i||j}(\varepsilon)(t, \cdot) \rightharpoonup e_{i||j}(t, \cdot)$  en  $L^2(\Omega)$ ,  $\forall t \in [0, T]$ .*

(ii) *Los límites de las componentes de la incógnita escalada hallados en el paso (i) son independientes de  $x_3$ .*

Adaptaremos la demostración del paso (ii) en el Teorema 4.4-1, [30] a este caso. Por el paso (i) tenemos que

$$\partial_3 u_{\alpha}(\varepsilon) + \varepsilon \partial_{\alpha} u_3(\varepsilon) = 2\varepsilon (e_{\alpha||3}(\varepsilon) + \Gamma_{\alpha 3}^{\sigma}(\varepsilon) u_{\sigma}(\varepsilon)) \rightarrow 0, \text{ en } H^1(0, T; L^2(\Omega)),$$

pues las funciones  $\Gamma_{\alpha 3}^{\sigma}(\varepsilon)$  convergen  $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$  (véase el Teorema 4.3.1). Sean dados  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  y  $\psi \in \mathcal{D}(0, T)$ . Como  $u_{\alpha}(\varepsilon) \rightharpoonup u_{\alpha}$  en  $H^1(0, T; H^1(\Omega))$  y  $(u_3(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  esta acotado en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  por el paso (i) se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^T \left( \int_{\Omega} \partial_3 u_{\alpha} \varphi dx \right) \psi dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_0^T \left( \int_{\Omega} \partial_3 u_{\alpha}(\varepsilon) \varphi dx \right) \psi dt \right), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_0^T \left( \int_{\Omega} \varepsilon \partial_{\alpha} u_3(\varepsilon) \varphi dx \right) \psi dt \right) &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_0^T \left( \int_{\Omega} \varepsilon u_3(\varepsilon) \partial_{\alpha} \varphi dx \right) \psi dt \right) = 0, \end{aligned}$$

entonces,

$$0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_0^T \left( \int_{\Omega} (\partial_3 u_{\alpha}(\varepsilon) + \varepsilon \partial_{\alpha} u_3(\varepsilon)) \varphi dx \right) \psi dt \right) = \int_0^T \left( \int_{\Omega} \partial_3 u_{\alpha} \varphi dx \right) \psi dt,$$

lo que significa que  $\partial_3 u_\alpha = 0$  en  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . De la misma forma, utilizamos los mismos razonamientos para las derivadas temporales correspondientes y por tanto, se tiene que  $\partial_3 u_\alpha = 0$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$ . Además, por el paso (i) también obtenemos que

$$\partial_3 u_3(\varepsilon) = \varepsilon e_{3||3}(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ en } H^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

Sea  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  y  $\psi \in \mathcal{D}(0, T)$ . Como  $u_3(\varepsilon) \rightharpoonup u_3$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  por el paso (i) entonces,

$$\begin{aligned} \int_0^T \left( \int_\Omega u_3 \partial_3 \varphi dx \right) \psi dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_0^T \left( \int_\Omega u_3(\varepsilon) \partial_3 \varphi dx \right) \psi dt \right) \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_0^T \left( \int_\Omega \partial_3 u_3(\varepsilon) \varphi dx \right) \psi dt \right) = 0 \end{aligned}$$

y correspondientemente para su derivada temporal, lo que significa que  $\partial_3 u_3 = 0$  en el sentido de las distribuciones. Entonces, concluimos este paso aplicando el apartado (a) del Teorema 5.1.1. Con este paso el apartado (b) del teorema queda demostrado (para el problema con sólo fuerzas volumétricas).

(iii) Los límites  $e_{i||j}$  hallados en (i) son independientes de la variable  $x_3$ . Además, están relacionados con los límites  $\mathbf{u} := (u_i)$  por las expresiones:

$$e_{\alpha||\beta} = \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}(\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha) - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma u_\sigma - b_{\alpha\beta} u_3, \quad e_{\alpha||3} = 0,$$

$$e_{3||3}(t) = -\frac{\theta}{\theta + \rho} \left( a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}(t) + \Lambda \int_0^t e^{-k(t-s)} a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}(s) ds \right), \text{ en } \Omega, \forall t \in [0, T],$$

con las constantes  $\Lambda$  y  $k$  definidas en (4.4.13). Además,

$$\dot{e}_{3||3}(t) = -\frac{\lambda}{\theta + \rho} a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}(t) - \frac{\lambda + 2\mu}{\theta + \rho} e_{3||3}(t) - \frac{\theta}{\theta + \rho} a^{\alpha\beta} \dot{e}_{\alpha||\beta}(t),$$

en  $\Omega$ , c.t.p.  $t \in (0, T)$ .

Tomando  $\mathbf{v} = \mathbf{u}(\varepsilon)$  en (4.2.6) y  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}$  en (4.4.6) (por abuso de notación, ya que  $\mathbf{u} \in V(\Omega)$ ), teniendo en cuenta el paso (i) y las convergencias  $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma(\varepsilon) \rightarrow \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma$  y  $\Gamma_{\alpha\beta}^3(\varepsilon) \rightarrow b_{\alpha\beta}$  en  $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$  dadas en el Teorema 4.3.1, tenemos que

$$e_{\alpha||\beta}(\varepsilon) = \frac{1}{2}(\partial_\beta u_\alpha(\varepsilon) + \partial_\alpha u_\beta(\varepsilon)) - \Gamma_{\alpha\beta}^p(\varepsilon) u_p(\varepsilon) \rightharpoonup e_{\alpha||\beta} = \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \text{ en } H^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

Además,  $e_{\alpha||\beta}$  son independientes de  $x_3$ , como consecuencia directa de la independencia de  $x_3$  de los  $u_i$  (paso (ii)). Ahora, sea  $\mathbf{v} \in V(\Omega)$ . Debido a la definición de las deformaciones escaladas en (4.2.6)–(4.2.8), se tiene que

$$\varepsilon e_{\alpha||\beta}(\varepsilon; \mathbf{v}) \rightarrow 0 \text{ en } L^2(\Omega), \quad (5.3.11)$$

$$\varepsilon e_{\alpha||3}(\varepsilon; \mathbf{v}) \rightarrow \frac{1}{2} \partial_3 v_\alpha \text{ en } L^2(\Omega), \quad (5.3.12)$$

$$\varepsilon e_{3||3}(\varepsilon; \mathbf{v}) = \partial_3 v_3 \text{ para todo } \varepsilon > 0. \quad (5.3.13)$$

Considerando la formulación variacional (5.3.3) para  $\mathbf{v} = \varepsilon \mathbf{v}$  y teniendo en cuenta (4.1.26), (4.2.4) y (4.2.5), tenemos que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) (\varepsilon e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon, \mathbf{v})) \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) (\varepsilon \dot{e}_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon, \mathbf{v})) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &= \int_{\Omega} (A^{\alpha\beta\sigma\tau}(\varepsilon) e_{\sigma||\tau}(\varepsilon) + A^{\alpha\beta 33}(\varepsilon) e_{3||3}(\varepsilon)) (\varepsilon e_{\alpha||\beta}(\varepsilon; \mathbf{v})) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &+ \int_{\Omega} 4A^{\alpha 3\sigma 3}(\varepsilon) e_{\sigma||3}(\varepsilon) (\varepsilon e_{\alpha||3}(\varepsilon; \mathbf{v})) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &+ \int_{\Omega} (A^{33\sigma\tau}(\varepsilon) e_{\sigma||\tau}(\varepsilon) + A^{3333}(\varepsilon) e_{3||3}(\varepsilon)) (\varepsilon e_{3||3}(\varepsilon; \mathbf{v})) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &+ \int_{\Omega} (B^{\alpha\beta\sigma\tau}(\varepsilon) \dot{e}_{\sigma||\tau}(\varepsilon) + B^{\alpha\beta 33}(\varepsilon) \dot{e}_{3||3}(\varepsilon)) (\varepsilon e_{\alpha||\beta}(\varepsilon; \mathbf{v})) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &+ \int_{\Omega} 4B^{\alpha 3\sigma 3}(\varepsilon) \dot{e}_{\sigma||3}(\varepsilon) (\varepsilon e_{\alpha||3}(\varepsilon; \mathbf{v})) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &+ \int_{\Omega} (B^{33\sigma\tau}(\varepsilon) \dot{e}_{\sigma||\tau}(\varepsilon) + B^{3333}(\varepsilon) \dot{e}_{3||3}(\varepsilon)) (\varepsilon e_{3||3}(\varepsilon; \mathbf{v})) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &= \varepsilon \int_{\Omega} f^i v_i \sqrt{g(\varepsilon)} dx \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega), \text{ c.p.d. en } (0, T). \end{aligned}$$

Pasando al límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  y teniendo en cuenta el comportamiento asintótico de las componentes contravariantes de los tensores de cuarto orden  $A^{ijkl}(\varepsilon)$ ,  $B^{ijkl}(\varepsilon)$  (véase el Teorema 4.2.2 y (4.3.3)–(4.3.4)),  $g(\varepsilon)$  (véase el Teorema 4.3.1) y las convergencias (5.3.11)–(5.3.13), obtenemos la siguiente ecuación integral:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (2\mu a^{\alpha\sigma} e_{\alpha||3} \partial_3 v_\sigma + (\lambda + 2\mu) e_{3||3} \partial_3 v_3) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} \lambda a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta} \partial_3 v_3 \sqrt{a} dx \\ &+ \int_{\Omega} (\rho a^{\alpha\sigma} \dot{e}_{\alpha||3} \partial_3 v_\sigma + (\theta + \rho) \dot{e}_{3||3} \partial_3 v_3) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} \theta a^{\alpha\beta} \dot{e}_{\alpha||\beta} \partial_3 v_3 \sqrt{a} dx = 0, \quad (5.3.14) \end{aligned}$$

en  $\Omega$ , c.p.d. en  $(0, T)$ . Por un lado, si consideramos  $\mathbf{v} \in V(\Omega)$  tal que  $v_2 = v_3 = 0$  y utilizamos el Teorema 4.3.4, tenemos que

$$2\mu a^{\alpha 1} e_{\alpha||3} + \rho a^{\alpha 1} \dot{e}_{\alpha||3} = 0, \text{ c.p.d. en } (0, T). \quad (5.3.15)$$

Por otro lado, si tomamos  $\mathbf{v} \in V(\Omega)$  tal que  $v_1 = v_3 = 0$  y utilizamos el Teorema 4.3.4, obtenemos que

$$2\mu a^{\alpha 2} e_{\alpha||3} + \rho a^{\alpha 2} \dot{e}_{\alpha||3} = 0, \text{ c.p.d. en } (0, T). \quad (5.3.16)$$

Multiplicando (5.3.15) por  $a^{22}$  y (5.3.16) por  $-a^{21}$  y sumando ambas expresiones se tiene que

$$2\mu (a^{22}a^{11} - a^{21}a^{12}) e_{1||3} + \rho (a^{22}a^{11} - a^{21}a^{12}) \dot{e}_{1||3} = 2\mu a e_{1||3} + \rho a \dot{e}_{1||3} = 0,$$

*c.p.d.* en  $(0, T)$ , por (4.1.9). Ahora bien, por la condición inicial (5.3.2) y las convergencias débiles de (i), deducimos que  $e_{1||3}(0, \cdot) = 0$  y, por tanto,

$$e_{1||3}(t) = 0 \text{ en } \Omega, \forall t \in [0, T].$$

Multiplicando (5.3.15) por  $a^{12}$  y (5.3.16) por  $-a^{11}$  y sumando ambas expresiones se tiene que

$$2\mu a e_{2||3} + \rho a \dot{e}_{2||3} = 0, \text{ c.p.d. en } (0, T).$$

Ahora bien, utilizando la condición inicial (5.3.2) y las convergencias débiles de (i), deducimos que  $e_{2||3}(0, \cdot) = 0$  y, por tanto,

$$e_{2||3}(t) = 0 \text{ en } \Omega, \forall t \in [0, T].$$

Tomando  $\mathbf{v} \in V(\Omega)$  tal que  $v_\alpha = 0$  en (5.3.14), obtenemos que

$$\int_{\Omega} (\lambda a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta} + (\lambda + 2\mu) e_{3||3}) \partial_3 v_3 \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} (\theta a^{\alpha\beta} \dot{e}_{\alpha||\beta} + (\theta + \rho) \dot{e}_{3||3}) \partial_3 v_3 \sqrt{a} dx = 0,$$

para todo  $v_3 \in H^1(\Omega)$  con  $v_3 = 0$  en  $\Gamma_0$  y *c.p.d.* en  $(0, T)$ . Por el Teorema 4.3.4, obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$\lambda a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta} + (\lambda + 2\mu) e_{3||3} + \theta a^{\alpha\beta} \dot{e}_{\alpha||\beta} + (\theta + \rho) \dot{e}_{3||3} = 0. \quad (5.3.17)$$

**Observación 5.3.5.** *Nótese que si eliminamos la dependencia temporal y la viscosidad, es decir  $\theta = \rho = 0$ , esta ecuación se reduce a la misma estudiada en [30] (véase la página 214), esto es, el caso elástico.*

Recordemos que en el paso (ii) del Teorema 4.4.1, en la deducción de las ecuaciones bidimensionales fue necesario considerar el coeficiente de viscosidad  $\theta$  estrictamente positivo. Nuevamente, esta hipótesis es necesaria para resolver la ecuación (5.3.17) en el caso más interesante. De esta forma, se puede probar que la ecuación (5.3.17) es equivalente a

$$\theta e^{-\frac{\lambda}{\theta}t} \frac{\partial}{\partial t} \left( a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta} e^{\frac{\lambda}{\theta}t} \right) = -(\theta + \rho) e^{-\frac{\lambda+2\mu}{\theta+\rho}t} \frac{\partial}{\partial t} \left( e_{3||3} e^{\frac{\lambda+2\mu}{\theta+\rho}t} \right).$$

Integrando con respecto a la variable temporal y utilizando (5.3.2) se tiene que,

$$e_{3||3} e^{\frac{\lambda+2\mu}{\theta+\rho}t} = -\frac{\theta}{\theta + \rho} \int_0^t e^{(\frac{\lambda+2\mu}{\theta+\rho} - \frac{\lambda}{\theta})s} \frac{\partial}{\partial s} \left( a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}(s) e^{\frac{\lambda}{\theta}s} \right) ds.$$

Ahora integrando por partes y simplificando, concluimos que,

$$e_{3||3}(t) = -\frac{\theta}{\theta + \rho} \left( a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}(t) + \Lambda \int_0^t e^{-k(t-s)} a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}(s) ds \right),$$

en  $\Omega$ ,  $\forall t \in [0, T]$ , y con  $\Lambda$  y  $k$  definidos en (4.4.13). Además, de (5.3.17) se obtiene que,

$$\dot{e}_{3||3}(t) = -\frac{\lambda}{\theta + \rho} a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}(t) - \frac{\lambda + 2\mu}{\theta + \rho} e_{3||3}(t) - \frac{\theta}{\theta + \rho} a^{\alpha\beta} \dot{e}_{\alpha||\beta}(t).$$

en  $\Omega$ , c.t.p.  $t \in (0, T)$ .

(iv) La función  $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{\mathbf{u}}_i)$  verifica el Problema 5.2.1 con  $p^{i,0} := \int_{-1}^1 f^i dx_3$ . En particular, como la solución de este problema es única (por el Teorema 4.3.13), las convergencias en (i) se verifican para toda la familia  $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$ . Tenemos que  $\bar{\mathbf{u}}(t, \cdot) = (\bar{u}_i(t, \cdot)) \in V_M(\omega)$ ,  $\forall t \in [0, T]$ .

Sea  $\mathbf{v} = (v_i) \in V(\Omega)$  independiente de la variable  $x_3$ . Entonces, el comportamiento asintótico de las funciones  $\Gamma_{\alpha\beta}^p(\varepsilon)$  y  $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma(\varepsilon)$  en el Teorema 4.3.1 implica las siguientes convergencias cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  (véanse (4.2.6)–(4.2.8)):

$$\begin{aligned} e_{\alpha||\beta}(\varepsilon; \mathbf{v}) &\rightarrow \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) := \frac{1}{2}(\partial_\alpha v_\beta + \partial_\beta v_\alpha) - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma v_\sigma - b_{\alpha\beta} v_3 \text{ en } L^2(\Omega), \\ e_{\alpha||3}(\varepsilon; \mathbf{v}) &\rightarrow \frac{1}{2}\partial_\alpha v_3 + b_\alpha^\sigma v_\sigma \text{ en } L^2(\Omega), \\ e_{3||3}(\varepsilon; \mathbf{v}) &= 0. \end{aligned}$$

Sea  $\mathbf{v} = (v_i) \in V(\Omega)$  independiente de  $x_3$  en (5.3.3) y tomemos el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Entonces, el comportamiento asintótico de las funciones  $e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v})$ ,  $A^{ijkl}(\varepsilon)$ ,  $B^{ijkl}(\varepsilon)$  (véanse Teorema 4.2.2 y (4.3.3)–(4.3.4)) y  $g(\varepsilon)$  (véase Teorema 4.3.1) y las convergencias débiles  $e_{i||j}(\varepsilon) \rightharpoonup e_{i||j}$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  del paso (i), conducen a

$$\begin{aligned} &\int_\Omega A^{ijkl}(0) e_{k||l} e_{i||j}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx + \int_\Omega B^{ijkl}(0) \dot{e}_{k||l} e_{i||j}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx \\ &= \int_\Omega (\lambda a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma})) e_{\sigma||\tau} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx + \int_\Omega \lambda a^{\alpha\beta} e_{3||3} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx \\ &\quad + \int_\Omega \left( \theta a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \frac{\rho}{2}(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \right) \dot{e}_{\sigma||\tau} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx + \int_\Omega \theta a^{\alpha\beta} \dot{e}_{3||3} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx \\ &= \int_\Omega f^i v_i \sqrt{a} dx, \text{ c.t.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \tag{5.3.18}$$

Utilizando las expresiones de los límites  $e_{i||j}$  halladas en el paso (iii), podemos escribir el miembro de la izquierda de la última igualdad como sigue:

$$\int_\Omega (\lambda a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma})) e_{\sigma||\tau} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx + \int_\Omega \lambda a^{\alpha\beta} e_{3||3} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega} \left( \theta a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \frac{\rho}{2} (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \right) \dot{e}_{\sigma||\tau} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} \theta a^{\alpha\beta} \dot{e}_{3||3} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx \\
& = \int_{\Omega} (\lambda a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma})) e_{\sigma||\tau} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx \\
& + \int_{\Omega} \left( \theta a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \frac{\rho}{2} (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \right) \dot{e}_{\sigma||\tau} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx \\
& + \int_{\Omega} \left( \lambda - \theta \frac{\lambda + 2\mu}{\theta + \rho} \right) \left( -\frac{\theta}{\theta + \rho} \left( a^{\sigma\tau} e_{\sigma||\tau} + \Lambda \int_0^t e^{-k(t-s)} a^{\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}(s) ds \right) \right) a^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx \\
& - \int_{\Omega} \frac{\theta}{\theta + \rho} (\lambda a^{\sigma\tau} e_{\sigma||\tau} + \theta a^{\sigma\tau} \dot{e}_{\sigma||\tau}) a^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx,
\end{aligned}$$

c.t.p.  $t \in (0, T)$ , que es equivalente a,

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left( \left( \lambda - \frac{\theta}{\theta + \rho} (\theta \Lambda + \lambda) \right) a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \right) e_{\sigma||\tau} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx \\
& + \int_{\Omega} \left( \frac{\theta \rho}{\theta + \rho} a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \frac{\rho}{2} (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \right) \dot{e}_{\sigma||\tau} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx \\
& - \int_{\Omega} \frac{(\theta \Lambda)^2}{\theta + \rho} \int_0^t e^{-k(t-s)} a^{\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}(s) ds a^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx.
\end{aligned}$$

Como  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son independientes de  $x_3$  (véase paso (i)), obtenemos de (5.3.18) que

$$\begin{aligned}
& \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\bar{\mathbf{u}}) \gamma_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{v}}) \sqrt{a} dy + \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\dot{\bar{\mathbf{u}}}) \gamma_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{v}}) \sqrt{a} dy \\
& - \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\bar{\mathbf{u}}(s)) \gamma_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{v}}) \sqrt{a} dy ds \\
& = \int_{\omega} \left( \int_{-1}^1 f^i dx_3 \right) \bar{v}_i \sqrt{a} dy, \text{ c.p.d. en } (0, T),
\end{aligned} \tag{5.3.19}$$

donde  $a^{\alpha\beta\sigma\tau}$ ,  $b^{\alpha\beta\sigma\tau}$  y  $c^{\alpha\beta\sigma\tau}$  denotan las componentes contravariantes de los tensores bidimensionales de cuarto orden, definidos en (4.4.10)–(4.4.12).

Ahora, dado  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in [H_0^1(\omega)]^3$  podemos definir  $\mathbf{v} = (v_i)$  tal que  $\mathbf{v}(\mathbf{y}, x_3) = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y})$  para todo  $(\mathbf{y}, x_3) \in \Omega$ . Entonces  $\mathbf{v} \in V(\Omega)$  y es independiente de  $x_3$ ; por tanto, como consecuencia del apartado (b) del Teorema 5.1.1, el problema variacional anterior se verifica para  $\bar{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\eta}$ .

Como ambos miembros de las ecuaciones son formas lineales continuas con respecto a  $\bar{v}_3 = \eta_3 \in L^2(\omega)$  para todo  $\bar{v}_\alpha \in H_0^1(\omega)$  dado, estas ecuaciones son válidas para todo  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in V_M(\omega)$ , por la densidad de  $H_0^1(\omega)$  en  $L^2(\omega)$ .

(v) Las convergencias débiles  $e_{i||j}(\varepsilon)(t, \cdot) \rightharpoonup e_{i||j}(t, \cdot)$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  son, además, fuertes.



En efecto, definimos:

$$\begin{aligned}
 \Psi(\varepsilon) &:= \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon)(e_{k||l}(\varepsilon) - e_{k||l})(e_{i||j}(\varepsilon) - e_{i||j})\sqrt{g(\varepsilon)}dx \\
 &\quad + \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon)(\dot{e}_{k||l}(\varepsilon) - \dot{e}_{k||l})(e_{i||j}(\varepsilon) - e_{i||j})\sqrt{g(\varepsilon)}dx \\
 &= \int_{\Omega} f^i u_i(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)}dx - \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon)(2e_{k||l}(\varepsilon) - e_{k||l})e_{i||j}\sqrt{g(\varepsilon)}dx \\
 &\quad + \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon)(\dot{e}_{k||l}e_{i||j} - \frac{\partial}{\partial t}(e_{k||l}(\varepsilon)e_{i||j}))\sqrt{g(\varepsilon)}dx.
 \end{aligned}$$

Tenemos que,

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon)(e_{k||l}(\varepsilon) - e_{k||l})(e_{i||j}(\varepsilon) - e_{i||j})\sqrt{g(\varepsilon)}dx \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon)(e_{k||l}(\varepsilon) - e_{k||l})(e_{i||j}(\varepsilon) - e_{i||j})\sqrt{g(\varepsilon)}dx = \Psi(\varepsilon), \text{ c.t.p. } t \in (0, T).
 \end{aligned}$$

Integrando en el intervalo  $[0, T]$ , utilizando (4.2.11) y (5.3.2) se tiene que

$$\int_0^T \left( \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon)(e_{k||l}(\varepsilon) - e_{k||l})(e_{i||j}(\varepsilon) - e_{i||j})\sqrt{g(\varepsilon)}dx \right) dt \leq \int_0^T \Psi(\varepsilon)dt.$$

Ahora, por (4.2.10) y (4.3.2) deducimos:

$$C_e^{-1} g_0^{1/2} \sum_{i,j} |e_{i||j}(\varepsilon) - e_{i||j}|_{0,\Omega}^2 \leq \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon)(e_{k||l}(\varepsilon) - e_{k||l})(e_{i||j}(\varepsilon) - e_{i||j})\sqrt{g(\varepsilon)}dx.$$

Por tanto, junto con la desigualdad anterior, obtenemos que

$$C_e^{-1} g_0^{1/2} \int_0^T \left( \sum_{i,j} |e_{i||j}(\varepsilon)(t) - e_{i||j}(t)|_{0,\Omega}^2 \right) dt \leq \int_0^T \Psi(\varepsilon)dt. \quad (5.3.20)$$

Pasamos al límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Teniendo en cuenta las convergencias débiles estudiadas en (i) y el comportamiento asintótico de las funciones  $A^{ijkl}(\varepsilon)$ ,  $B^{ijkl}(\varepsilon)$  (véanse el Teorema 4.2.2 y (4.3.3)–(4.3.4)) y  $g(\varepsilon)$  (véase el Teorema 4.3.1), se obtiene que

$$\Psi := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Psi(\varepsilon) = \int_{\Omega} f^i u_i \sqrt{a} dx - \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||l} e_{i||j} \sqrt{a} dx - \int_{\Omega} B^{ijkl}(0) \dot{e}_{k||l} e_{i||j} \sqrt{a} dx,$$

c.t.p.  $t \in (0, T)$ . Substituyendo las expresiones de  $A^{ijkl}(0)$  y  $B^{ijkl}(0)$  (véase el Teorema 4.2.2) tenemos que

$$\int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||l} e_{i||j} \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} B^{ijkl}(0) \dot{e}_{k||l} e_{i||j} \sqrt{a} dx$$



$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} (\lambda a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma})) e_{\sigma||\tau} e_{\alpha||\beta} \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} \lambda a^{\alpha\beta} e_{3||3} e_{\alpha||\beta} \sqrt{a} dx \\
&\quad + \int_{\Omega} (\lambda a^{\sigma\tau} e_{\sigma||\tau} + (\lambda + 2\mu) e_{3||3}) e_{3||3} \sqrt{a} dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \left( \theta a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \frac{\rho}{2} (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \right) \dot{e}_{\sigma||\tau} e_{\alpha||\beta} \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} \theta a^{\alpha\beta} \dot{e}_{3||3} e_{\alpha||\beta} \sqrt{a} dx \\
&\quad + \int_{\Omega} (\theta a^{\sigma\tau} \dot{e}_{\sigma||\tau} + (\theta + \rho) \dot{e}_{3||3}) e_{3||3} \sqrt{a} dx, \text{ c.t.p. } t \in (0, T).
\end{aligned}$$

Utilizando las relaciones de los límites  $e_{i||j}$  obtenidas en el paso (iii), esta expresión puede escribirse como

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \left( \left( \lambda - \frac{\theta}{\theta + \rho} (\theta\Lambda + \lambda) \right) a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \right) e_{\sigma||\tau} e_{\alpha||\beta} \sqrt{a} dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \left( \frac{\theta\rho}{\theta + \rho} a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \frac{\rho}{2} (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \right) \dot{e}_{\sigma||\tau} e_{\alpha||\beta} \sqrt{a} dx \\
&\quad - \int_{\Omega} \frac{(\theta\Lambda)^2}{\theta + \rho} \int_0^t e^{-k(t-s)} a^{\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}(s) ds a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}(t) \sqrt{a} dx.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\Psi &= \int_{\Omega} f^i u_i \sqrt{a} dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} e_{\sigma||\tau} e_{\alpha||\beta} \sqrt{a} dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} e_{\sigma||\tau} \dot{e}_{\alpha||\beta} \sqrt{a} dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\Omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}(s) e_{\alpha||\beta}(t) \sqrt{a} dx ds, \text{ c.t.p. } t \in (0, T), \tag{5.3.21}
\end{aligned}$$

con  $a^{\alpha\beta\sigma\tau}$ ,  $b^{\alpha\beta\sigma\tau}$  y  $c^{\alpha\beta\sigma\tau}$  definidos en (4.4.10)–(4.4.12). Entonces, tomando  $\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{u}}$  en la ecuación (5.3.19) y utilizando que  $e_{\alpha||\beta} = \gamma_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{u}})$  (véase paso (iii)), concluimos que  $\Psi = 0$ . Como consecuencia, aplicando el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue en (5.3.20), se verifican las convergencias fuertes  $e_{i||j}(\varepsilon) \rightarrow e_{i||j}$  en  $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ . Análogamente, definimos:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}(\varepsilon) &:= \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) (e_{k||l}(\varepsilon) - e_{k||l}) (\dot{e}_{i||j}(\varepsilon) - \dot{e}_{i||j}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\
&\quad + \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) (\dot{e}_{k||l}(\varepsilon) - \dot{e}_{k||l}) (\dot{e}_{i||j}(\varepsilon) - \dot{e}_{i||j}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\
&= \int_{\Omega} f^i \dot{u}_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) (e_{k||l} \dot{e}_{i||j} - \frac{\partial}{\partial t} (e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j})) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\
&\quad - \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) (2\dot{e}_{k||l}(\varepsilon) - \dot{e}_{k||l}) \dot{e}_{i||j} \sqrt{g(\varepsilon)} dx.
\end{aligned}$$

Tenemos que,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) (e_{k||l}(\varepsilon) - e_{k||l}) (e_{i||j}(\varepsilon) - e_{i||j}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx$$

$$+ \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon)(\dot{e}_{k||l}(\varepsilon) - \dot{e}_{k||l})(\dot{e}_{i||j}(\varepsilon) - \dot{e}_{i||j})\sqrt{g(\varepsilon)}dx = \tilde{\Psi}(\varepsilon), \text{ c.t.p. } t \in (0, T).$$

Integrando en el intervalo  $[0, T]$ , utilizando (4.2.10) y (5.3.2) se tiene que

$$\int_0^T \left( \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon)(\dot{e}_{k||l}(\varepsilon) - \dot{e}_{k||l})(\dot{e}_{i||j}(\varepsilon) - \dot{e}_{i||j})\sqrt{g(\varepsilon)}dx \right) dt \leq \int_0^T \tilde{\Psi}(\varepsilon)dt.$$

Ahora, por (4.2.11) y (4.3.2)

$$C_v^{-1}g_0^{1/2} \sum_{i,j} |\dot{e}_{i||j}(\varepsilon) - \dot{e}_{i||j}|_{0,\Omega}^2 \leq \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon)(\dot{e}_{k||l}(\varepsilon) - \dot{e}_{k||l})(\dot{e}_{i||j}(\varepsilon) - \dot{e}_{i||j})\sqrt{g(\varepsilon)}dx.$$

Por tanto, junto con la desigualdad anterior, obtenemos que

$$C_v^{-1}g_0^{1/2} \int_0^T \left( \sum_{i,j} |\dot{e}_{i||j}(\varepsilon)(t) - \dot{e}_{i||j}(t)|_{0,\Omega}^2 \right) dt \leq \int_0^T \tilde{\Psi}(\varepsilon)dt, \quad (5.3.22)$$

que es similar a la ecuación en (5.3.20). Además, utilizando argumentos análogos a los que condujeron a (5.3.21), se puede comprobar que

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\Psi}(\varepsilon) &= \int_{\Omega} f^i \dot{u}_i \sqrt{a} dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} e_{\sigma||\tau} \dot{e}_{\alpha||\beta} \sqrt{a} dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \dot{e}_{\sigma||\tau} \dot{e}_{\alpha||\beta} \sqrt{a} dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\Omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}(s) \dot{e}_{\alpha||\beta}(t) \sqrt{a} dx ds, \text{ c.t.p. } t \in (0, T). \end{aligned}$$

También, tomando  $\bar{\mathbf{v}} = \dot{\bar{\mathbf{u}}}$  en la ecuación (5.3.19) y utilizando que  $e_{\alpha||\beta} = \gamma_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{u}})$  (véase paso (iii)), concluimos que  $\tilde{\Psi} = 0$ . Como consecuencia, aplicando el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue en (5.3.22), se verifican las convergencias fuertes  $\dot{e}_{i||j}(\varepsilon) \rightarrow \dot{e}_{i||j}$  en  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . Por tanto, concluimos que  $e_{i||j}(\varepsilon) \rightarrow e_{i||j}$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$ .

(vi) La familia  $(\bar{\mathbf{u}}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  converge fuertemente a  $\bar{\mathbf{u}}$  (cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) en  $H^1(0, T; V_M(\omega))$ , es decir,

$$\bar{u}_{\alpha}(\varepsilon) \rightarrow \bar{u}_{\alpha} \text{ en } H^1(0, T; H^1(\omega)), \quad \bar{u}_3(\varepsilon) \rightarrow \bar{u}_3 \text{ en } H^1(0, T; L^2(\omega)).$$

Por la desigualdad de tipo Korn del Teorema 5.1.3 para superficies elípticas, basta probar que

$$\gamma_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{u}}(\varepsilon)) \rightarrow \gamma_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{u}}) = \overline{e_{\alpha||\beta}} \text{ en } H^1(0, T; L^2(\omega)),$$

para demostrar las convergencias deseadas. Como  $e_{\alpha||\beta}(\varepsilon) \rightarrow e_{\alpha||\beta}$  en  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  por el paso (v), tenemos por el apartado (a) del Teorema 5.1.1 que

$$\overline{e_{\alpha||\beta}(\varepsilon)} \rightarrow \overline{e_{\alpha||\beta}} \text{ en } L^2(0, T; L^2(\omega)).$$

Por otro lado, por el apartado (d) del mismo Teorema 5.1.1 obtenemos que

$$\overline{e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon)} - \gamma_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{u}}(\varepsilon)) \rightarrow 0 \text{ en } L^2(0, T; L^2(\omega)).$$

Por tanto concluimos la demostración de este paso.

(vii) *La convergencia  $u_3(\varepsilon) \rightarrow u_3$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  es fuerte.*

En efecto, por (4.2.8) y el paso (i), tenemos que  $\partial_3 u_3(\varepsilon) = \varepsilon e_{3\|\beta}(\varepsilon) \rightarrow 0$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$ . Por otra parte, tenemos que  $\bar{u}_3(\varepsilon) \rightarrow \bar{u}_3$  en  $H^1(0, T; L^2(\omega))$ . Por tanto por el apartado (c) del Teorema 5.1.1, obtenemos la conclusión buscada.

(viii) *Las convergencias  $u_\alpha(\varepsilon) \rightarrow u_\alpha$  en  $H^1(0, T; H^1(\Omega))$  son fuertes.*

Para demostrar este paso, por la desigualdad clásica de Korn tridimensional en coordenadas Cartesianas, basta probar que

$$e_{ij}(\mathbf{u}'(\varepsilon)) \rightarrow e_{ij} \text{ en } L^2(0, T; H^1(\Omega)),$$

con  $e_{ij}(\mathbf{v}) := \frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j)$  y

$$\mathbf{u}'(\varepsilon) := (u_1(\varepsilon), u_2(\varepsilon), 0), \quad \mathbf{u}' := (u_1, u_2, 0). \quad (5.3.23)$$

Por los pasos (iii) y (v) tenemos que

$$e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon) \rightarrow e_{\alpha\|\beta} = (e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}') - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma u_\sigma - b_{\alpha\beta} u_3) \text{ en } H^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

Por definición (véase (4.2.6)),  $e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon) = e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}'(\varepsilon)) - \Gamma_{\alpha\beta}^p(\varepsilon) u_p(\varepsilon)$ . Entonces, la convergencia anterior, el comportamiento asintótico de las funciones  $\Gamma_{\alpha\beta}^p(\varepsilon)$  y las convergencias fuertes  $u_i(\varepsilon) \rightarrow u_i$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  establecidas en los apartados (i) y (vii), implican que

$$e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}'(\varepsilon)) \rightarrow e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}') \text{ en } H^1(0, T; L^2(\Omega)). \quad (5.3.24)$$

**Observación 5.3.6.** *Al igual que en el caso elástico, nótese que estas últimas convergencias serán ciertas si  $\bar{u}_3(\varepsilon) \rightarrow \bar{u}_3$  probado en el paso (vi), ya que esta se utilizó en (vii) para probar que  $u_3(\varepsilon) \rightarrow u_3$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$ . En cambio, las convergencias  $u_\alpha(\varepsilon) \rightarrow u_\alpha$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  ya habían sido obtenidas en el paso (i) sin necesidad de probar las convergencias de los promedios correspondientes hasta el paso (vi).*

Ahora bien, como tenemos que  $e_{33}(\mathbf{u}'(\varepsilon)) = e_{33}(\mathbf{u}') = 0$  por la definición de los  $e_{ij} := \frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j)$  y (5.3.23), solo queda probar que

$$2e_{\alpha 3}(\mathbf{u}'(\varepsilon)) = \partial_3 u_\alpha(\varepsilon) \rightarrow 0 = \partial_3 u_\alpha = 2e_{\alpha 3}(\mathbf{u}') \text{ en } H^1(0, T; L^2(\Omega)),$$

ya que  $u_\alpha$  no dependen de  $x_3$  por lo visto en el paso (ii). Probar esta última convergencia es equivalente a probar que

$$\partial_3 u_\alpha(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ y } \partial_i \partial_3 u_\alpha(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ en } H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)). \quad (5.3.25)$$

Esta equivalencia, es consecuencia del Lema de J.L. Lions (véase, por ejemplo, el Teorema 3.2 en el Capítulo III de [48]) que, junto con el Teorema del grafo cerrado (véase, por ejemplo, el Teorema 2.9 en [14]), implican que la aplicación,

$$v \in L^2(\Omega) \longrightarrow (v, \partial_1 v, \partial_2 v, \partial_3 v) \in H^{-1}(\Omega) \times [H^{-1}(\Omega)]^3,$$

es un isomorfismo. Por tanto, trivialmente podemos extender este resultado y concluir que la aplicación,

$$v \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \longrightarrow (v, \partial_1 v, \partial_2 v, \partial_3 v) \in H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)),$$

es también un isomorfismo.

Por un lado, tenemos por (4.2.7) que  $\partial_3 u_\alpha(\varepsilon) = 2\varepsilon (e_{\alpha||3}(\varepsilon) + \Gamma_{\alpha 3}^\sigma(\varepsilon)u_\sigma(\varepsilon)) - \varepsilon \partial_\alpha u_3(\varepsilon)$ . Entonces, dado  $\varphi \in D(\Omega)$  tenemos que

$$\int_0^T \left( \int_\Omega \partial_3 u_\alpha(\varepsilon) \varphi dx \right)^2 dt = \varepsilon^2 \int_0^T \left( \int_\Omega (2(e_{\alpha||3}(\varepsilon) + \Gamma_{\alpha 3}^\sigma(\varepsilon)u_\sigma(\varepsilon)) \varphi + u_3(\varepsilon) \partial_\alpha \varphi) dx \right)^2 dt,$$

y por tanto, teniendo en cuenta el paso (i) se tiene que existe una constante  $c_1 > 0$  tal que

$$\|\partial_3 u_\alpha(\varepsilon)\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \leq c_1 \varepsilon.$$

Entonces  $\partial_3 u_\alpha(\varepsilon) \rightarrow 0$  en  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ . Aplicando los mismos razonamientos a la derivada temporal de (4.2.7), podemos concluir que existe una constante  $\tilde{c}_1 > 0$  tal que

$$\|\partial_3 u_\alpha(\varepsilon)\|_{H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))} \leq c_1 \varepsilon.$$

Por otro lado, si tomamos las derivadas parciales respecto a  $\alpha$  y  $\beta$  de (4.2.7) y restamos ambas expresiones tenemos que

$$\partial_\beta \partial_3 u_\alpha(\varepsilon) - \partial_\alpha \partial_3 u_\beta(\varepsilon) = 2\varepsilon (\partial_\beta (e_{\alpha||3}(\varepsilon) + \Gamma_{\alpha 3}^\sigma(\varepsilon)u_\sigma(\varepsilon)) - \partial_\alpha (e_{\beta||3}(\varepsilon) + \Gamma_{\beta 3}^\tau(\varepsilon)u_\tau(\varepsilon))).$$

Además, dividiendo la expresión entre dos, el miembro de la izquierda es equivalente a

$$\partial_\beta \partial_3 u_\alpha(\varepsilon) - \frac{1}{2} \partial_\beta \partial_3 u_\alpha(\varepsilon) - \frac{1}{2} \partial_\alpha \partial_3 u_\beta(\varepsilon) = \partial_\beta \partial_3 u_\alpha(\varepsilon) - \frac{1}{2} \partial_3 (\partial_\beta u_\alpha(\varepsilon) + \partial_\alpha u_\beta(\varepsilon)),$$

y así, junto con la expresión anterior deducimos que

$$\begin{aligned} \partial_\beta \partial_3 u_\alpha(\varepsilon) &= \partial_3 e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}'(\varepsilon)) + \varepsilon \left( \partial_\beta (e_{\alpha||3}(\varepsilon) + \Gamma_{\alpha 3}^\sigma(\varepsilon)u_\sigma(\varepsilon)) \right. \\ &\quad \left. - \partial_\alpha (e_{\beta||3}(\varepsilon) + \Gamma_{\beta 3}^\tau(\varepsilon)u_\tau(\varepsilon)) \right). \end{aligned} \quad (5.3.26)$$

Ahora bien, las convergencias de los términos  $e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}'(\varepsilon))$  en (5.3.24) implican que

$$\partial_3 e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}'(\varepsilon)) \rightarrow \partial_3 e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}') = 0 \text{ en } H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)),$$

pues  $\partial_3 \partial_\beta u_\alpha = 0$  en  $D'(\Omega)$ . Si ahora denotamos por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  la dualidad entre  $D(\Omega)$  y  $D'(\Omega)$ , para todo  $\varphi \in D(\Omega)$  se verifica que

$$\int_0^T \left( \langle \varepsilon \partial_\beta (e_{\alpha||3}(\varepsilon) + \Gamma_{\alpha 3}^\sigma(\varepsilon) u_\sigma(\varepsilon)), \varphi \rangle \right)^2 dt = \varepsilon^2 \int_0^T \left( \int_\Omega (e_{\alpha||3}(\varepsilon) + \Gamma_{\alpha 3}^\sigma(\varepsilon) u_\sigma(\varepsilon)) \partial_\beta \varphi dx \right)^2 dt.$$

Por tanto, repitiendo los mismos argumentos en la derivada temporal de la expresión (5.3.26), podemos concluir que existe una constante  $\tilde{c}_2 > 0$  tal que

$$\|\varepsilon \partial_\beta (e_{\alpha||3}(\varepsilon) + \Gamma_{\alpha 3}^\sigma(\varepsilon) u_\sigma(\varepsilon))\|_{H^1(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq \tilde{c}_2 \varepsilon,$$

teniendo en cuenta los resultados de (i). De la misma forma, se obtiene la desigualdad análoga para el término  $\varepsilon \partial_\alpha (e_{\beta||3}(\varepsilon) + \Gamma_{\beta 3}^\sigma(\varepsilon) u_\sigma(\varepsilon))$ . Como consecuencia, estas acotaciones junto con (5.3.24) en (5.3.26), implican que  $\partial_\beta \partial_3 u_\alpha(\varepsilon) \rightarrow 0$  en  $H^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$ .

Finalmente, tenemos que para todo  $\varphi \in D(\Omega)$  se verifica que,

$$\begin{aligned} \int_0^T \left( \langle \partial_3 \partial_3 u_\alpha(\varepsilon), \varphi \rangle \right)^2 dt &= \int_0^T \left( - \int_\Omega \partial_3 u_\alpha(\varepsilon) \partial_3 \varphi dx \right)^2 dt \\ &= \int_0^T \left( -2\varepsilon \int_\Omega (e_{\alpha||3}(\varepsilon) + \Gamma_{\alpha 3}^\sigma(\varepsilon) u_\sigma(\varepsilon)) \partial_3 \varphi dx + \varepsilon^2 \int_\Omega e_{3||3}(\varepsilon) \partial_\alpha \varphi dx \right)^2 dt, \end{aligned}$$

por (4.2.6) y (4.2.8). Por tanto, obteniendo la igualdad análoga para la derivada temporal de  $\partial_3 \partial_3 u_\alpha(\varepsilon)$ , deducimos que existe una constante  $\tilde{c}_3 > 0$  tal que

$$\|\partial_3 \partial_3 u_\alpha(\varepsilon)\|_{H^1(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq \tilde{c}_3 \varepsilon.$$

Entonces, se tiene que  $\partial_3 \partial_3 u_\alpha(\varepsilon) \rightarrow 0$  en  $H^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$ . Por tanto, hemos obtenido las convergencias de (5.3.25), completando la demostración de este paso. Este apartado, junto con el anterior (vii), completan la demostración del apartado (a) de este teorema (para el problema con sólo fuerzas volumétricas).

(ix) Sea  $X(0,T;\Omega) := \{v \in H^1(0,T;L^2(\Omega)); \partial_3 v \in H^1(0,T;L^2(\Omega))\}$ . La traza  $v(\cdot, s)$  de cualquier función  $v \in X(0,T;\Omega)$  está bien definida por una función en  $H^1(0,T;L^2(\omega))$  para todo  $s \in [-1,1]$  y además, el operador traza definido de esta forma es continuo. En particular, existe una constante  $\tilde{c}_4 > 0$  tal que:

$$\|v\|_{H^1(0,T;L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-))} \leq \tilde{c}_4 \left( \|v\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\partial_3 v\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right)^{1/2} \quad (5.3.27)$$

para todo  $v \in X(0,T;\Omega)$ . Además, existe una constante  $c_5 > 0$  tal que

$$|v_3|_{L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)} \leq c_5 \left( \sum_{i,j} |e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v})|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \quad (5.3.28)$$

para todo  $\mathbf{v} \in V(\Omega)$ .

Sea  $v \in X(0, T; \Omega)$ . Siguiendo los argumentos del paso (ix) de la demostración del Teorema 4.4-1, [30], tenemos que para casi todo  $\mathbf{y} \in \omega$  y todo  $s \in [-1, 1]$ , (véase, por ejemplo, Lema 1.3, [46])

$$v(\mathbf{y}, -1) = v(\mathbf{y}, s) - \int_{-1}^s \partial_3 v(\mathbf{y}, x_3) dx_3.$$

Como consecuencia,

$$\begin{aligned} |v(\cdot, -1)|_{0,\omega}^2 &\leq 2 \int_{\omega} |v(\mathbf{y}, s)|^2 dy + 2 \int_{\omega} \left| \int_{-1}^s \partial_3 v(\mathbf{y}, x_3) dx_3 \right|^2 dy \\ &\leq 2 \int_{\omega} |v(\mathbf{y}, s)|^2 dy + 2 \int_{\omega} (1+s) \left( \int_{-1}^s |\partial_3 v(\mathbf{y}, x_3)|^2 dx_3 \right) dy \\ &\leq 2 \int_{\omega} |v(\mathbf{y}, s)|^2 dy + 4 |\partial_3 v|_{0,\Omega}^2. \end{aligned} \quad (5.3.29)$$

Integrando esta desigualdad con respecto a  $s \in [-1, 1]$  se tiene

$$|v|_{L^2(\Gamma_-)} \leq \left( |v|_{0,\Omega}^2 + 4 |\partial_3 v|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}.$$

Siguiendo argumentos análogos, obtenemos las acotaciones para  $\|v\|_{L^2(\Gamma_+)}$  y por tanto existe  $c_4 > 0$  tal que

$$|v|_{L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)} \leq c_4 \left( |v|_{0,\Omega}^2 + |\partial_3 v|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}. \quad (5.3.30)$$

Si ahora en (5.3.29) integramos con respecto a  $s \in [-1, 1]$  y a  $t \in [0, T]$ , se tiene que existe una constante  $\hat{c}_4 > 0$  tal que

$$\|v\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_-))} \leq \hat{c}_4 \left( \|v\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\partial_3 v\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right)^{1/2}. \quad (5.3.31)$$

Siguiendo argumentos análogos, obtenemos las acotaciones para  $\|v\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_+)})$  y para las correspondientes normas en ambas partes de la frontera de las derivadas con respecto al tiempo de la función  $v$  en  $X(0, T; \Omega)$ . Así, concluimos que existe una constante  $\tilde{c}_4 > 0$  tal que se verifica (5.3.27).

Sea ahora  $\mathbf{v} \in V(\Omega)$ . Entonces, de (5.3.30) se tiene que

$$\begin{aligned} |v_3|_{L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)} &\leq c_4 \left( |v_3|_{0,\Omega}^2 + |\partial_3 v_3|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \leq c_4 \left( |v_3|_{0,\Omega}^2 + |e_3|_3(\varepsilon; \mathbf{v})|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq c_4(C+1) \left( \sum_{i,j} |e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v})|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

por (4.2.8) y la desigualdad de tipo Korn del Teorema 5.1.2. Por tanto, existe una constante  $c_5 > 0$  tal que se verifica (5.3.28).

**Observación 5.3.7.** Como consecuencia de (5.3.27) se puede probar que existe una constante  $\tilde{c}_5 > 0$  tal que

$$\|v_3\|_{H^1(0,T;L^2(\Gamma_+\cup\Gamma_-))} \leq \tilde{c}_5 \left( \sum_{i,j} \|e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v})\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right)^{1/2}$$

para todo  $\mathbf{v} \in H^1(0, T; V(\Omega))$ .

En efecto sea ahora  $\mathbf{v} \in H^1(0, T; V(\Omega))$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \|v_3\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_+\cup\Gamma_-))} &\leq \tilde{c}_4 \left( \|v_3\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\partial_3 v_3\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \tilde{c}_4 \left( \|v_3\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \int_0^T |e_{3||3}(\varepsilon; \mathbf{v})|_{0,\Omega}^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq \tilde{c}_4 \sqrt{(C+1)} \left( \int_0^T \sum_{i,j} |e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v})|_{0,\Omega}^2 dt \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

por (5.3.31), (4.2.8) y la desigualdad de tipo Korn del Teorema 5.1.2. De la misma forma obtenemos la desigualdad análoga para la derivada temporal, por lo que concluimos que existe una constante  $\tilde{c}_5 > 0$  tal que se verifica la desigualdad anunciada en esta observación. Sin embargo, en el paso (x) será suficiente con las desigualdades (5.3.27)–(5.3.28).

(x) Añadimos en este paso las fuerzas superficiales.

Supongamos que la lámina está sometida solo a fuerzas superficiales. Es decir, hallemos  $\mathbf{u}(\varepsilon)$  tal que verifica el siguiente problema variacional:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\varepsilon)(t, \cdot) &\in V(\Omega) \quad \forall t \in [0, T], \\ \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon, \mathbf{v}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx &+ \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) \dot{e}_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon, \mathbf{v}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &= \int_{\Gamma_+\cup\Gamma_-} h^i v_i \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega), \text{ c.t.p. } t \in (0, T), \\ \mathbf{u}(\varepsilon)(0, \cdot) &= \mathbf{u}_0(\varepsilon)(\cdot). \end{aligned} \tag{5.3.32}$$

A continuación, comprobaremos que se verifican los pasos anteriores (i) – (viii) para este problema. Indicaremos solo aquellas modificaciones que hacen falta para lograr los resultados deseados.

Paso (i'). Tomamos  $\mathbf{v} = \mathbf{u}(\varepsilon)(t, \cdot)$  en (5.3.32). Utilizando los argumentos seguidos en la demostración del paso (i), sustituiremos la desigualdad en (5.3.9) por,

$$\int_{\Gamma_+\cup\Gamma_-} h^i u_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma \leq g_1^{1/2} \left( |h^\alpha|_{L^2(\Gamma_+\cup\Gamma_-)} |u_\alpha(\varepsilon)|_{L^2(\Gamma_+\cup\Gamma_-)} \right)$$



$$\begin{aligned}
& + |h^3|_{L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)} |u_3(\varepsilon)|_{L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)} \\
& \leq g_1^{1/2} \left( c_6 \sum_{\alpha} \|u_{\alpha}(\varepsilon)\|_{1,\Omega}^2 + c_5 |h^3|_{L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)} \left( \sum_{i,j} |e_{i||j}(\varepsilon)|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \right) \\
& \leq g_1^{1/2} (c_6 C_M + c_7) \left( \sum_{i,j} |e_{i||j}(\varepsilon)|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}, \tag{5.3.33}
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la desigualdad de Cauchy-Schwarz, (5.3.28) en (ix) y la desigualdad de tipo Korn del Teorema 5.1.3. Además, nótese que  $c_6$  es una contante que depende de las normas  $|h^{\alpha}|_{L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)}$  y de la norma del operador traza actuando de  $H^1(\Omega)$  en  $L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)$ , y la constante  $c_7$  depende de  $|h^3|_{L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)}$  y de la constante  $c_5$ . Por tanto, ahora tenemos junto con (5.3.10) que,

$$\begin{aligned}
& g_0^{1/2} C_e C^{-2} \int_0^T \left( \sum_{\alpha} \|u_{\alpha}(\varepsilon)(t)\|_{1,\Omega}^2 + |u_3(\varepsilon)(t)|_{0,\Omega}^2 \right) dt \leq g_0^{1/2} C_e \int_0^T \sum_{i,j} |e_{i||j}(\varepsilon)|_{0,\Omega}^2 dt \\
& \leq \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^i u_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma \leq g_1^{1/2} (c_6 C_M + c_7) \int_0^T \left( \sum_{i,j} |e_{i||j}(\varepsilon)|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} dt \\
& \leq g_1^{1/2} (c_6 C_M + c_7) \sqrt{T} \left( \int_0^T \sum_{i,j} |e_{i||j}(\varepsilon)|_{0,\Omega}^2 dt \right)^{1/2},
\end{aligned}$$

y así, concluimos que las normas  $\|e_{i||j}(\varepsilon)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$  están acotadas y, como consecuencia, también lo estarán las normas  $\|u_{\alpha}(\varepsilon)\|_{H^1(0,T;H^1(\Omega))}$  y  $\|u_3(\varepsilon)\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}$ . Si ahora tomamos  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}(\varepsilon)(t, \cdot)$  en (5.3.32), obtendríamos del miembro de la derecha que

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^i \dot{u}_i \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma \leq g_1^{1/2} \left( |h^{\alpha}|_{L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)} |\dot{u}_{\alpha}(\varepsilon)|_{L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)} \right. \\
& \quad \left. + |h^3|_{L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)} |\dot{u}_3(\varepsilon)|_{L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)} \right) \\
& \leq g_1^{1/2} (c_6 C_M + c_7) \left( \sum_{i,j} |\dot{e}_{i||j}(\varepsilon)|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2},
\end{aligned}$$

que es análogo a la expresión (5.3.33). Por tanto, siguiendo los mismos razonamientos, podemos concluir que las normas de las derivadas con respecto al tiempo también están acotadas y así, se siguen las afirmaciones anunciadas en el apartado (i) para el problema con solo fuerzas superficiales.

Paso (ii'). No presenta modificaciones.

Paso (iii'). Tomando  $\mathbf{v} = \varepsilon \mathbf{v}$  en (5.3.32) se tiene

$$\int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) (\varepsilon e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon, \mathbf{v})) \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) (\varepsilon \dot{e}_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon, \mathbf{v})) \sqrt{g(\varepsilon)} dx$$



$$= \varepsilon \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^i v_i \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma.$$

Nuevamente, el miembro de la derecha converge a cero cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ya que  $g(\varepsilon) \rightarrow a$  en  $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$  (véase el Teorema 4.3.1). Por tanto, obtenemos las mismas conclusiones obtenidas en la demostración del paso (iii).

Paso (iv'). Tomamos nuevamente  $\mathbf{v} = (v_i) \in V(\Omega)$  independiente de  $x_3$ . Entonces, gracias a la convergencia  $g(\varepsilon) \rightarrow a$  en  $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$  (véase el Teorema 4.3.1) y al Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se obtiene que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^i v_i \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma = \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^i v_i \sqrt{a} dy = \int_{\omega} (h_+^i + h_-^i) \bar{v}_i \sqrt{a} dy.$$

Además, utilizando el mismo argumento de densidad se tiene que  $\bar{\mathbf{u}}$  verifica:

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\bar{\mathbf{u}}) \gamma_{\alpha\beta}(\bar{\boldsymbol{\eta}}) \sqrt{a} dy + \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\dot{\bar{\mathbf{u}}}) \gamma_{\alpha\beta}(\bar{\boldsymbol{\eta}}) \sqrt{a} dy \\ & - \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\bar{\mathbf{u}}(s)) \gamma_{\alpha\beta}(\bar{\boldsymbol{\eta}}) \sqrt{a} dy ds \\ & = \int_{\omega} (h_+^i + h_-^i) \bar{\eta}_i \sqrt{a} dy, \end{aligned}$$

c.p.d. en  $(0, T)$ , para todo  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in V_M(\omega)$ .

Paso (v'). En este caso definiremos,

$$\begin{aligned} \Psi(\varepsilon) &:= \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) (e_{k||l}(\varepsilon) - e_{k||l}) (e_{i||j}(\varepsilon) - e_{i||j}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &+ \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) (\dot{e}_{k||l}(\varepsilon) - \dot{e}_{k||l}) (\dot{e}_{i||j}(\varepsilon) - \dot{e}_{i||j}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &= \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^i u_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx - \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) (2e_{k||l}(\varepsilon) - e_{k||l}) e_{i||j} \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &+ \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) (\dot{e}_{k||l} e_{i||j} - \frac{\partial}{\partial t} (e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j})) \sqrt{g(\varepsilon)} dx. \end{aligned}$$

y también,

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(\varepsilon) &:= \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) (e_{k||l}(\varepsilon) - e_{k||l}) (\dot{e}_{i||j}(\varepsilon) - \dot{e}_{i||j}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &+ \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) (\dot{e}_{k||l}(\varepsilon) - \dot{e}_{k||l}) (\dot{e}_{i||j}(\varepsilon) - \dot{e}_{i||j}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &= \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^i \dot{u}_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) (e_{k||l} \dot{e}_{i||j} - \frac{\partial}{\partial t} (e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j})) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &- \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) (2\dot{e}_{k||l}(\varepsilon) - \dot{e}_{k||l}) \dot{e}_{i||j} \sqrt{g(\varepsilon)} dx. \end{aligned}$$

Es conocido que una aplicación lineal fuertemente continua es también continua con respecto a las topologías débiles (véase, por ejemplo, el Teorema 3.10 en [14]). Entonces  $u_\alpha(\varepsilon) \rightharpoonup u_\alpha$  en  $H^1(0, T; H^1(\Omega))$  implica que  $u_\alpha(\varepsilon) \rightharpoonup u_\alpha$  en  $H^1(0, T; L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-))$ , y así

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^\alpha u_\alpha(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^\alpha u_\alpha(\varepsilon) \left( \sqrt{g(\varepsilon)} + \sqrt{a} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^\alpha u_\alpha(\varepsilon) \sqrt{a} d\Gamma \right) \\ &= \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^\alpha u_\alpha \sqrt{a} d\Gamma = \int_{\omega} (h_+^\alpha + h_-^\alpha) \bar{u}_\alpha \sqrt{a} dy, \end{aligned}$$

y de la misma forma,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^\alpha \dot{u}_\alpha(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma \right) = \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^\alpha \dot{u}_\alpha \sqrt{a} d\Gamma = \int_{\omega} (h_+^\alpha + h_-^\alpha) \dot{\bar{u}}_\alpha \sqrt{a} dy.$$

Por otra parte, por la misma razón, las convergencias débiles  $u_3(\varepsilon) \rightharpoonup u_3$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  y  $\partial_3 u_3(\varepsilon) = \varepsilon e_{33}(\varepsilon) \rightharpoonup 0 = \partial_3 u_3$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  (por los apartados (i') y (ii')) y la primera desigualdad del apartado (ix) juntas implican que  $u_3(\varepsilon)(\cdot, \pm 1) \rightharpoonup u_3(\cdot, \pm 1)$  en  $H^1(0, T; L^2(\omega))$ . Por tanto,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^3 u_3(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma = \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^3 u_3 \sqrt{a} d\Gamma = \int_{\omega} (h_+^3 + h_-^3) \bar{u}_3 \sqrt{a} dy,$$

y de la misma forma,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^3 \dot{u}_3(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma = \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^3 \dot{u}_3 \sqrt{a} d\Gamma = \int_{\omega} (h_+^3 + h_-^3) \dot{\bar{u}}_3 \sqrt{a} dy.$$

Teniendo en cuenta estas consideraciones, el resto de la demostración del paso (v') es análoga a la de (v).

Las demostraciones de los pasos (vi'), (vii') y (viii') son análogas a las de (vi), (vii) y (viii), respectivamente.

Por tanto, hemos completado la demostración del teorema.  $\square$

**Observación 5.3.8.** Nótese que las hipótesis (5.3.2) implican en particular (4.4.5) y (4.4.4) como consecuencia de (4.4.2), es decir, se cumplen las propiedades consideradas en el análisis asintótico formal realizado en el Capítulo 4. En efecto, podríamos debilitar la hipótesis (5.3.2) asumiendo que las deformaciones iniciales son de orden  $\varepsilon^2$ . De esta forma, realizando algunas modificaciones en la demostración del Teorema 5.3.3 obtendríamos las mismas conclusiones.

**Observación 5.3.9.** *Nótese que el Problema 5.2.4 se puede obtener de la misma forma tomando los mismos escalados para la incógnita (desplazamientos), pero tomando las siguientes hipótesis en los datos:*

$$\begin{aligned}\lambda^\varepsilon &= \varepsilon^r \lambda, & \mu^\varepsilon &= \varepsilon^r \mu, \\ \theta^\varepsilon &= \varepsilon^r \theta, & \rho^\varepsilon &= \varepsilon^r \rho, \\ f^{i,\varepsilon}(t, \mathbf{x}^\varepsilon) &= \varepsilon^r f^i(t, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \text{ con } \mathbf{x}^\varepsilon = \pi^\varepsilon(\mathbf{x}) \in \Omega^\varepsilon, \forall t \in [0, T], \\ h^{i,\varepsilon}(t, \mathbf{x}^\varepsilon) &= \varepsilon^{1+r} h^i(t, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_+ \cup \Gamma_-, \text{ con } \mathbf{x}^\varepsilon = \pi^\varepsilon(\mathbf{x}) \in \Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon, \forall t \in [0, T],\end{aligned}$$

donde las constantes  $\lambda \geq 0$  y  $\mu, \theta, \rho > 0$  y las funciones  $f^i \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$  y  $h^i \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-))$  son independientes de  $\varepsilon$  y  $r$  denota un número real arbitrario.

En vista de las convergencias estudiadas en el Teorema 5.3.3, podemos analizar el comportamiento asintótico del campo tensorial de tensiones escaladas para una membrana elíptica viscoelástica, siguiendo los argumentos estudiados en [40], donde los autores muestran resultados de convergencias para las tensiones en láminas elásticas lineales y no lineales. En el siguiente resultado, veremos que, en efecto, las componentes del tensor de tensiones escalado definido en (4.2.14) tienen límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  y que corresponde al caso de tensiones planas, como ocurre en el caso de la membrana elíptica elástica (véase el Teorema 7, [40]). Además, para aquellas componentes del tensor de tensiones escalado cuyo límite sea nulo, obtendremos sus convergencias a términos de menor orden. Denominaremos a estos límites como las correcciones a la componente correspondiente.

Cabe destacar nuevamente que, como consecuencia de la expresión obtenida para los límites de las componentes covariantes del tensor de deformaciones (véase el paso (iii) de la demostración del Teorema 5.3.3), un término de memoria larga estará presente en el límite de las tensiones escaladas, cuando en el modelo tridimensional de partida las tensiones definidas en (4.1.5) presentaban únicamente un término de memoria corta.

Utilizaremos la siguiente notación para los espacios:

$$\mathbb{L}^2 := L^2(-1, 1; H^{-1}(\omega)), \quad \mathbb{H}^1 := H^1(-1, 1; H^{-1}(\omega)).$$

**Teorema 5.3.10.** *Asumamos las hipótesis consideradas en los Teoremas 4.2.7 y 5.3.3. Entonces se verifican las siguientes convergencias:*

$$\begin{aligned}\sigma^{\alpha\beta}(\varepsilon) &\rightarrow \sigma^{\alpha\beta,0} \text{ en } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ \frac{1}{\varepsilon} \sigma^{i3}(\varepsilon) &\rightarrow \sigma^{i3,1} \text{ en } L^2(0, T; \mathbb{H}^1),\end{aligned}$$

cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , donde,

$$\begin{aligned}\sigma^{\alpha\beta,0} &:= \frac{1}{2} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\dot{\mathbf{u}}) - \frac{1}{2} \int_0^t e^{-k(t-s)} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\mathbf{u}(s)) ds, \\ \sigma^{\alpha 3,1} &:= -h^{\alpha,1}(\mathbf{y}, -1) - \int_{-1}^{x_3} f^{\alpha,0}(\mathbf{y}, r) dr - (x_3 + 1) \left( \partial_\beta \sigma^{\alpha\beta,0} + \Gamma_{\sigma\beta}^\alpha \sigma^{\sigma\beta,0} + \Gamma_{\sigma\beta}^\beta \sigma^{\alpha\sigma,0} \right), \\ \sigma^{33,1} &:= -h^{3,1}(\mathbf{y}, -1) - \int_{-1}^{x_3} f^{3,0}(\mathbf{y}, r) dr - (x_3 + 1) \sigma^{\alpha\beta,0} b_{\alpha\beta}.\end{aligned}$$

*Demostración.* Teniendo en cuenta la definición de las tensiones escaladas en (4.2.14), el comportamiento asintótico de  $A^{ijkl}(\varepsilon)$ ,  $B^{ijkl}(\varepsilon)$  (véase el Teorema 4.2.2), las convergencias fuertes  $e_{i||j}(\varepsilon) \rightarrow e_{i||j}$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$ , la independencia de sus límites con respecto a la variable transversal y las relaciones obtenidas en el apartado (iii) de la demostración del Teorema 5.3.3, se tiene que

$$\begin{aligned} \sigma^{\alpha\beta,0} &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma^{\alpha\beta}(\varepsilon) = A^{\alpha\beta\sigma\tau}(0)e_{\sigma||\tau} + \lambda a^{\alpha\beta}e_{3||3} + B^{\alpha\beta\sigma\tau}(0)\dot{e}_{\sigma||\tau} + \theta a^{\alpha\beta}\dot{e}_{3||3} = \\ &= (\lambda a^{\alpha\beta}a^{\sigma\tau} + \mu(a^{\alpha\sigma}a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau}a^{\beta\sigma}))\gamma_{\sigma\tau}(\mathbf{u}) \\ &\quad + \lambda a^{\alpha\beta} \left( -\frac{\theta}{\theta + \rho} \left( a^{\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\mathbf{u}) + \Lambda \int_0^t e^{-k(t-s)} a^{\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\mathbf{u}(s))ds \right) \right) \\ &\quad + \left( \theta a^{\alpha\beta}a^{\sigma\tau} + \frac{\rho}{2}(a^{\alpha\sigma}a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau}a^{\beta\sigma}) \right) \gamma_{\sigma\tau}(\dot{\mathbf{u}}) \\ &\quad + \theta a^{\alpha\beta} \left( -\frac{\lambda}{\theta + \rho} a^{\alpha\beta}e_{\alpha||\beta} - \frac{\lambda + 2\mu}{\theta + \rho} e_{3||3} - \frac{\theta}{\theta + \rho} a^{\alpha\beta}\dot{e}_{\alpha||\beta} \right) \\ &= \frac{1}{2}a^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\mathbf{u}) + \frac{1}{2}b^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\dot{\mathbf{u}}) - \frac{1}{2} \int_0^t e^{-k(t-s)} c^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\mathbf{u}(s))ds, \end{aligned}$$

en  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . En particular, se tiene que

$$\sigma^{\alpha\beta}(\varepsilon) \rightarrow \sigma^{\alpha\beta,0} \text{ en } L^2(0, T; \mathbb{L}^2), \quad (5.3.34)$$

pues  $L^2(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^2 := L^2(-1, 1; H^{-1}(\omega))$  y además,

$$\partial_\beta \sigma^{\alpha\beta}(\varepsilon) \rightarrow \partial_\beta \sigma^{\alpha\beta,0} \text{ en } L^2(0, T; \mathbb{L}^2). \quad (5.3.35)$$

Tomando el límite en las demás componentes del campos de tensiones escaladas y teniendo en cuenta los mismos argumentos que antes, obtenemos que,

$$\sigma^{\alpha 3,0} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma^{\alpha 3}(\varepsilon) = A^{\alpha 3\sigma 3}(0)e_{\sigma||3} + B^{\alpha 3\sigma 3}(0)\dot{e}_{\sigma||3} = 0, \quad (5.3.36)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{33,0} &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma^{33}(\varepsilon) = A^{33\sigma\tau}e_{\sigma||\tau} + A^{3333}e_{3||3} + B^{33\sigma\tau}\dot{e}_{\sigma||\tau} + B^{3333}\dot{e}_{3||3} \\ &= \lambda a^{\sigma\tau}e_{\sigma||\tau} + (\lambda + 2\mu)e_{3||3} + \theta a^{\sigma\tau}\dot{e}_{\sigma||\tau} + (\theta + \rho)\dot{e}_{3||3} = 0, \end{aligned} \quad (5.3.37)$$

en  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . En particular,

$$\sigma^{i3}(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ en } L^2(0, T; \mathbb{L}^2). \quad (5.3.38)$$

Como consecuencia, debemos obtener las correcciones correspondientes a estos términos. Teniendo en cuenta la condición de contorno escalada (4.2.21), podemos escribir

$$\int_{-1}^{x_3} \partial_3 \sigma^{i3}(\varepsilon)(\mathbf{y}, s)ds = \sigma^{i3}(\varepsilon)(\mathbf{y}, x_3) + h_-^i(\varepsilon)(\mathbf{y}). \quad (5.3.39)$$

Por otra parte, de la ecuación de equilibrio escalada (4.2.19), se tiene para  $i = \alpha$  que

$$-\sigma_{||j}^{\alpha j}(\varepsilon) = -\sigma_{||\beta}^{\alpha\beta}(\varepsilon) - \sigma_{||3}^{\alpha 3}(\varepsilon) = f^\alpha(\varepsilon).$$

Entonces, de la expresión (4.2.23) para  $i = \alpha$  y  $j = 3$  teniendo en cuenta que  $\Gamma_{3q}^3(\varepsilon) = \Gamma_{33}^\alpha(\varepsilon) = 0$  (véase (4.1.25)) y (4.2.22) deducimos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \partial_3 \sigma^{\alpha 3}(\varepsilon) &= \sigma_{||3}^{\alpha 3}(\varepsilon) - \Gamma_{p3}^\alpha(\varepsilon) \sigma^{p3}(\varepsilon) - \Gamma_{3q}^3(\varepsilon) \sigma^{\alpha q}(\varepsilon) = -\sigma_{||\beta}^{\alpha\beta}(\varepsilon) - f^\alpha(\varepsilon) - \Gamma_{p3}^\alpha(\varepsilon) \sigma^{p3}(\varepsilon) \\ &= -f^\alpha(\varepsilon) - \partial_\beta \sigma^{\alpha\beta}(\varepsilon) - \Gamma_{p\beta}^\alpha(\varepsilon) \sigma^{p\beta}(\varepsilon) - \Gamma_{\beta q}^\beta(\varepsilon) \sigma^{\alpha q}(\varepsilon) - \Gamma_{p3}^\alpha(\varepsilon) \sigma^{p3}(\varepsilon) \\ &= -f^\alpha(\varepsilon) - \left( \partial_\beta \sigma^{\alpha\beta}(\varepsilon) + \Gamma_{\tau\beta}^\alpha(\varepsilon) \sigma^{\tau\beta}(\varepsilon) + \Gamma_{\beta\tau}^\beta(\varepsilon) \sigma^{\alpha\tau}(\varepsilon) \right) \\ &\quad - \left( 2\Gamma_{\beta 3}^\alpha(\varepsilon) \sigma^{\beta 3}(\varepsilon) + \Gamma_{\beta 3}^\beta(\varepsilon) \sigma^{\alpha 3}(\varepsilon) \right). \end{aligned} \quad (5.3.40)$$

Integrando esta expresión con respecto a la variable transversal  $x_3$  en  $[-1, x_3]$  y teniendo en cuenta la relación (5.3.39) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-1}^{x_3} \partial_3 \sigma^{\alpha 3}(\varepsilon)(\mathbf{y}, s) ds &= \frac{1}{\varepsilon} \sigma^{\alpha 3}(\varepsilon)(\mathbf{y}, x_3) + \frac{1}{\varepsilon} h_-^\alpha(\varepsilon)(\mathbf{y}) = \\ &= - \int_{-1}^{x_3} \left( f^\alpha(\varepsilon) + \partial_\beta \sigma^{\alpha\beta}(\varepsilon) + \Gamma_{\tau\beta}^\alpha(\varepsilon) \sigma^{\tau\beta}(\varepsilon) + \Gamma_{\beta\tau}^\beta(\varepsilon) \sigma^{\alpha\tau}(\varepsilon) \right. \\ &\quad \left. + 2\Gamma_{\beta 3}^\alpha(\varepsilon) \sigma^{\beta 3}(\varepsilon) + \Gamma_{\beta 3}^\beta(\varepsilon) \sigma^{\alpha 3}(\varepsilon) \right) (\mathbf{y}, s) ds. \end{aligned} \quad (5.3.41)$$

Recordemos que para el caso de la membrana elíptica viscoelástica asumimos que  $f^i(\varepsilon) = f^{i,0}$  y  $h^i(\varepsilon) = \varepsilon h^{i,1}$ . Además, por hipótesis (véase el Teorema 5.2.5), se tiene que  $h^\alpha(\mathbf{y}, -1) \in L^2(0, T; L^2(\omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; H^{-1}(\omega))$  que es independiente de  $x_3$  y por tanto se puede considerar como una función de  $L^2(0, T; \mathbb{H}^1)$ .

Por tanto, de (5.3.41) deducimos, teniendo en cuenta (5.3.34)–(5.3.35) y (5.3.38) y las convergencias de los símbolos de Christoffel en el Teorema 4.3.1, que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \sigma^{\alpha 3}(\varepsilon)(\mathbf{y}, x_3) &\rightarrow \sigma^{\alpha 3,1}(\mathbf{y}, x_3) := -h_-^{\alpha,1}(\mathbf{y}) - \int_{-1}^{x_3} f^{\alpha,0}(\mathbf{y}, s) ds \\ &\quad - \int_{-1}^{x_3} \left( \partial_\beta \sigma^{\alpha\beta,0} + \Gamma_{\tau\beta}^\alpha \sigma^{\tau\beta,0} + \Gamma_{\beta\tau}^\beta \sigma^{\alpha\tau,0} \right) (\mathbf{y}, s) ds \\ &= -h_-^{\alpha,1}(\mathbf{y}) - \int_{-1}^{x_3} f^{\alpha,0}(\mathbf{y}, s) ds \\ &\quad - (x_3 + 1) \left( \partial_\beta \sigma^{\alpha\beta,0}(\mathbf{y}) + \Gamma_{\tau\beta}^\alpha(\mathbf{y}) \sigma^{\tau\beta,0}(\mathbf{y}) + \Gamma_{\beta\tau}^\beta(\mathbf{y}) \sigma^{\alpha\tau,0}(\mathbf{y}) \right), \end{aligned}$$

en  $L^2(0, T; \mathbb{L}^2)$ . Por otro lado, deducimos de (5.3.40) que

$$\frac{1}{\varepsilon} \partial_3 \sigma^{\alpha 3}(\varepsilon) \rightarrow \partial_3 \sigma^{\alpha 3,1} := -f^{\alpha,0} - \left( \partial_\beta \sigma^{\alpha\beta,0} + \Gamma_{\tau\beta}^\alpha \sigma^{\tau\beta,0} + \Gamma_{\beta\tau}^\beta \sigma^{\alpha\tau,0} \right) \text{ en } L^2(0, T; \mathbb{L}^2)$$

y como consecuencia, podemos concluir que

$$\frac{1}{\varepsilon} \sigma^{\alpha 3}(\varepsilon) \rightarrow \sigma^{\alpha 3,1} \text{ en } L^2(0, T; \mathbb{H}^1). \quad (5.3.42)$$

De la misma forma, de la ecuación de equilibrio escalada (4.2.19) para  $i = 3$  se tiene que  $-\sigma_{||j}^{3j}(\varepsilon) = -\sigma_{||\beta}^{3\beta}(\varepsilon) - \sigma_{||3}^{33}(\varepsilon) = f^3(\varepsilon)$ . Por tanto, de (4.2.23) para  $i = j = 3$  teniendo en cuenta (4.2.22) (para  $i = 3$  y  $j = \alpha = \beta$ ) y (4.1.25) se tiene que

$$\frac{1}{\varepsilon} \partial_3 \sigma^{33}(\varepsilon) = -f^3(\varepsilon) - \left( \partial_\beta \sigma^{3\beta}(\varepsilon) + \Gamma_{\alpha\beta}^3(\varepsilon) \sigma^{\alpha\beta}(\varepsilon) + \Gamma_{p\beta}^\beta(\varepsilon) \sigma^{p3}(\varepsilon) \right). \quad (5.3.43)$$

Integrando esta expresión con respecto a  $x_3$  en  $[-1, x_3]$  y teniendo en cuenta (5.3.39) se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-1}^{x_3} \partial_3 \sigma^{33}(\varepsilon)(\mathbf{y}, s) ds &= \frac{1}{\varepsilon} \sigma^{33}(\mathbf{y}, x_3) + \frac{1}{\varepsilon} h_-^3(\varepsilon)(\mathbf{y}) \\ &= - \int_{-1}^{x_3} \left( f^3(\varepsilon) + \partial_\beta \sigma^{3\beta}(\varepsilon) + \Gamma_{\alpha\beta}^3(\varepsilon) \sigma^{\alpha\beta}(\varepsilon) + \Gamma_{p\beta}^\beta(\varepsilon) \sigma^{p3}(\varepsilon) \right) (\mathbf{y}, s) ds. \end{aligned} \quad (5.3.44)$$

Por tanto, recordando el orden de las fuerzas aplicadas asumido para el caso de la membrana elíptica, las convergencias, (5.3.34)–(5.3.38) y las de los símbolos de Christoffel en el Teorema 4.3.1, deducimos de (5.3.44) y (5.3.43), respectivamente, que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \sigma^{33}(\mathbf{y}, x_3) &\rightarrow \sigma^{33,1} := -h_-^{3,1}(\mathbf{y}) - \int_{-1}^{x_3} f^{3,0}(\mathbf{y}, s) ds - (x_3 + 1) \sigma^{\alpha\beta,0}(\mathbf{y}) b_{\alpha\beta}(\mathbf{y}), \\ \frac{1}{\varepsilon} \partial_3 \sigma^{33} &\rightarrow \partial_3 \sigma^{33,1} := -f^{3,0} - \sigma^{\alpha\beta,0} b_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

en  $L^2(0, T; \mathbb{L}^2)$ . Como consecuencia se deduce entonces que

$$\frac{1}{\varepsilon} \sigma^{33} \rightarrow \sigma^{33,1} \text{ en } L^2(0, T; \mathbb{H}^1).$$

Así, hemos completado la demostración del teorema.  $\square$

A continuación, estudiaremos las convergencias en términos de las incógnitas desescaladas. Las convergencias  $u_\alpha(\varepsilon) \rightarrow u_\alpha$  en  $H^1(0, T; H^1(\Omega))$  y  $u_3(\varepsilon) \rightarrow u_3$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  del Teorema 5.3.3, los escalados  $u_i^\varepsilon(t, \mathbf{x}^\varepsilon) =: u_i(\varepsilon)(t, \mathbf{x}) \ \forall \mathbf{x}^\varepsilon = \pi^\varepsilon(\mathbf{x}) \in \bar{\Omega}^\varepsilon, \ \forall t \in [0, T]$  (véase (4.2.1)), los desescalados  $\xi_i^\varepsilon := \xi_i$  (véase (5.2.1)) para cada  $\varepsilon > 0$  y el Teorema 5.1.1 juntos conducen a las siguientes convergencias:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u_\alpha^\varepsilon dx_3^\varepsilon &\rightarrow \xi_\alpha \text{ en } H^1(0, T; H^1(\omega)), \\ \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u_3^\varepsilon dx_3^\varepsilon &\rightarrow \xi_3 \text{ en } H^1(0, T; L^2(\omega)). \end{aligned}$$

Además, podemos probar el siguiente teorema en relación a las convergencias de los promedios de las componentes tangencial y normal del campo vectorial de desplazamientos:

**Teorema 5.3.11.** *Supongamos que  $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^3(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$ . Consideremos una familia de láminas membranas viscoelásticas con grosor  $2\varepsilon$  que tiende a cero y con cada una teniendo la misma superficie media elíptica  $S = \boldsymbol{\theta}(\bar{\omega})$ . Asumamos las hipótesis en los datos consideradas en el Teorema 5.2.2.*

Sean  $\mathbf{u}^\varepsilon = (u_i^\varepsilon) \in H^1(0, T; V(\Omega^\varepsilon))$  y  $\boldsymbol{\xi}^\varepsilon = (\xi_i^\varepsilon) \in H^1(0, T; V_M(\omega))$  para cada  $\varepsilon > 0$  las soluciones de los Problemas 4.1.5 y 5.2.4, respectivamente. Además, sea  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_i) \in H^1(0, T; V_M(\omega))$  la solución del Problema 5.2.1. Entonces,

$$\begin{aligned} \xi_\alpha^\varepsilon &= \xi_\alpha \quad \text{y así} \quad \xi_\alpha^\varepsilon \mathbf{a}^\alpha = \xi_\alpha \mathbf{a}^\alpha \text{ en } H^1(0, T; [H^1(\omega)]^3), \forall \varepsilon > 0, \\ \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u_\alpha^\varepsilon \mathbf{g}^{\alpha, \varepsilon} dx_3^\varepsilon &\rightarrow \xi_\alpha \mathbf{a}^\alpha \text{ en } H^1(0, T; [H^1(\omega)]^3) \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \xi_3^\varepsilon &= \xi_3 \quad \text{y así} \quad \xi_3^\varepsilon \mathbf{a}^3 = \xi_3 \mathbf{a}^3 \text{ en } H^1(0, T; [L^2(\omega)]^3), \forall \varepsilon > 0, \\ \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u_3^\varepsilon \mathbf{g}^{3, \varepsilon} dx_3^\varepsilon &\rightarrow \xi_3 \mathbf{a}^3 \text{ en } H^1(0, T; [L^2(\omega)]^3) \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

*Demostración.* Como  $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^3(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$  los campos vectoriales  $\mathbf{g}^\alpha(\varepsilon) : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definidos por  $\mathbf{g}^\alpha(\varepsilon) := \mathbf{g}^{\alpha, \varepsilon}(\mathbf{x}^\varepsilon)$  para todo  $\mathbf{x}^\varepsilon = \pi(\mathbf{x}) \in \bar{\Omega}^\varepsilon$  son tal que  $\mathbf{g}^\alpha(\varepsilon) - \mathbf{a}^\alpha = \mathcal{O}(\varepsilon)$ , donde los campos  $\mathbf{a}^\alpha$  se identifican con vectores definidos sobre todo el conjunto  $\bar{\Omega}$ . Ahora bien, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u_\alpha^\varepsilon \mathbf{g}^{\alpha, \varepsilon} dx_3^\varepsilon - \xi_\alpha^\varepsilon \mathbf{a}^\alpha &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u_\alpha(\varepsilon) \mathbf{g}^\alpha(\varepsilon) dx_3 - \xi_\alpha \mathbf{a}^\alpha \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u_\alpha(\varepsilon) (\mathbf{g}^\alpha(\varepsilon) - \mathbf{a}^\alpha) dx_3 - (\overline{u_\alpha(\varepsilon)} - \xi_\alpha) \mathbf{a}^\alpha. \end{aligned}$$

Por un lado, como  $u_\alpha(\varepsilon) \rightarrow u_\alpha$  en  $H^1(0, T; H^1(\Omega))$  y  $\mathbf{g}^\alpha(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{a}^\alpha$  en  $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ , implican que

$$u_\alpha(\varepsilon) (\mathbf{g}^\alpha(\varepsilon) - \mathbf{a}^\alpha) \rightarrow \mathbf{0} \text{ en } H^1(0, T; [H^1(\Omega)]^3).$$

Por tanto, aplicando el apartado (b) del Teorema 5.1.1 obtenemos que

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 u_\alpha(\varepsilon) (\mathbf{g}^\alpha(\varepsilon) - \mathbf{a}^\alpha) dx_3 \rightarrow \mathbf{0} \text{ en } H^1(0, T; [H^1(\omega)]^3),$$

y utilizando el mismo argumento se tiene que  $(\overline{u_\alpha(\varepsilon)} - \xi_\alpha) \mathbf{a}^\alpha \rightarrow \mathbf{0}$  en  $H^1(0, T; [H^1(\omega)]^3)$ . Para la componente normal tenemos que  $\mathbf{g}^{3, \varepsilon} = \mathbf{a}^3$ , entonces

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u_3^\varepsilon \mathbf{g}^{3, \varepsilon} dx_3^\varepsilon - \xi_3^\varepsilon \mathbf{a}^3 = (\overline{u_3(\varepsilon)} - \xi_3) \mathbf{a}^3.$$

Por tanto, aplicando el apartado (a) del Teorema 5.1.1 obtenemos que  $(\overline{u_3(\varepsilon)} - \xi_3) \mathbf{a}^3 \rightarrow \mathbf{0}$  en  $H^1(0, T; [L^2(\omega)]^3)$ .  $\square$

**Observación 5.3.12.** *Los campos  $\tilde{\xi}_T^\varepsilon, \tilde{\xi}_N^\varepsilon : [0, T] \times \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definidos por  $\tilde{\xi}_T^\varepsilon := \xi_\alpha^\varepsilon \mathbf{a}^\alpha$  y  $\tilde{\xi}_N^\varepsilon := \xi_3^\varepsilon \mathbf{a}^3$ , se conocen como los campos de desplazamientos límite tangencial y normal, respectivamente, de la superficie media  $S$  de la lámina. Si denotamos el campo de desplazamientos límite de  $S$  por  $\tilde{\xi}^\varepsilon := \xi_i \mathbf{a}^i$  entonces  $\tilde{\xi}^\varepsilon = \tilde{\xi}_T^\varepsilon + \tilde{\xi}_N^\varepsilon$ .*





## Capítulo 6

# Justificación matemática de un modelo de membrana generalizada viscoelástica

Al igual que en el capítulo anterior, en este consideramos una familia de láminas viscoelásticas lineales con grosor  $2\varepsilon$ , pero a diferencia de aquel, en este la condición de contorno de fijación se puede tomar en una porción de la frontera lateral  $\gamma_0$ , no en su totalidad necesariamente. Además, en el Capítulo 5, considerábamos una hipótesis sobre la geometría de  $S$ , su elipticidad. Por tanto, el objetivo de este capítulo es completar el estudio de las membranas viscoelásticas mediante el desarrollo de resultados de existencia y unicidad de solución y de convergencia para aquellas láminas que no verifiquen alguna de la hipótesis anteriores (es decir,  $\gamma_0 \neq \gamma$  y/o  $S$  no es uniformemente elíptica).

En lo que sigue veremos que, si la densidad de fuerzas volumétricas aplicadas es  $\mathcal{O}(1)$  con respecto a  $\varepsilon$  y la densidad de fuerzas superficiales es  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ , la solución del problema variacional escalado en coordenadas curvilíneas,  $\mathbf{u}(\varepsilon)$ , definida sobre el dominio de referencia  $\Omega = \omega \times (-1, 1)$  para cada  $t \in [0, T]$ , converge en unos espacios funcionales *ad hoc*, cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , a un límite  $\mathbf{u}$ . Además, el promedio  $\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{u}(\varepsilon) dx_3$ , converge en otro espacio *ad hoc* a la única solución de las ecuaciones bidimensionales escaladas de un modelo que denominaremos como problema de (lámina) membrana generalizada viscoelástica.

Una de las dificultades añadidas de este modelo, en comparación con las membranas estudiadas en el capítulo anterior, reside en la necesidad de considerar unas fuerzas que denominaremos como admisibles (véase, por ejemplo, Sección 5.5, [30]). Otra de las complejidades la encontramos en la definición de los espacios *ad hoc* necesarios para completar el espacio  $V(\omega)$  introducido en el análisis asintótico del Capítulo 4, ya que pueden no ser ni siquiera espacios de distribuciones. Como consecuencia, y análogamente al caso elástico presentado en el Capítulo 5 de [30], necesitaremos dividir este conjunto de láminas en dos grupos: membranas generalizadas viscoelásticas del primer tipo y membranas generalizadas del segundo tipo. Una vez identificados los problemas correspondientes y probada la existencia y unicidad de solución, justificaremos las ecuaciones de estos modelos mediante la demostración de resultados de convergencia en los espacios de Bochner-Sobolev adecuados.

De nuevo, seguiremos la notación y estilo de [30], en particular, el Capítulo 5, dedicado a la justificación de las ecuaciones bidimensionales de una membrana generalizada elástica.

La justificación matemática de ese modelo se puede encontrar también en [32]. Además, en [95] el autor realiza un estudio particular para el caso en el que la superficie media de la lámina es hiperbólica o parabólica, caracterizando en cada caso las fuerzas admisibles y los espacios *ad hoc* que aseguran la existencia y unicidad de solución de los problemas planteados.

Comenzaremos este capítulo introduciendo en la Sección 6.1 algunos resultados que serán necesarios en lo que sigue de esta memoria y, en particular, en la obtención de los resultados de convergencia deseados. A continuación, en la Sección 6.2 estableceremos los problemas bidimensionales bien definidos para una membrana generalizada viscoelástica, que dividiremos en los dos grupos mencionados: primer y segundo tipo; para ello, definiremos los respectivos espacios de compleción dependiendo del tipo que corresponda y expondremos las hipótesis adicionales necesarias para las fuerzas aplicadas actuando sobre la lámina. De esta forma, podremos demostrar la existencia y unicidad de solución de los problemas correspondientes. Por último, en la Sección 6.3 mostraremos los resultados principales de este capítulo, a saber, la justificación matemática de los modelos de membrana generalizada viscoelástica propuestos mediante resultados de convergencia. Además, también incluiremos aquí las correspondientes convergencias de las tensiones escaladas asociadas al problema de la membrana generalizada viscoelástica.

## 6.1. Resultados preliminares

Comenzaremos introduciendo algunos resultados que serán necesarios en lo que sigue de esta memoria y, en particular, en este capítulo. El par de teoremas que mostramos a continuación, son resultados que se pueden considerar como extensiones para el caso no estático de los Teoremas 5.2-1 y 5.2-2 de [30] en los correspondientes espacios de Bochner-Sobolev. Por completitud, detallaremos sus demostraciones siguiendo los argumentos utilizados en los resultados disponibles en [30]. En primer lugar, definamos para cada  $\mathbf{v} \in H^1(0, T; [H^1(\Omega)]^3)$  las funciones  $\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \in H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$  y  $e_{\alpha||\beta}^1(\varepsilon; \mathbf{v}) \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$  definidas por:

$$\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) := \frac{1}{2}(\partial_\beta v_\alpha + \partial_\alpha v_\beta) - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma v_\sigma - b_{\alpha\beta} v_3, \quad (6.1.1)$$

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) := & \partial_{\alpha\beta} v_3 - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \partial_\sigma v_3 - b_\alpha^\sigma b_{\sigma\beta} v_3 \\ & + b_\alpha^\sigma (\partial_\beta v_\sigma - \Gamma_{\beta\sigma}^\tau v_\tau) + b_\beta^\tau (\partial_\alpha v_\tau - \Gamma_{\alpha\tau}^\sigma v_\sigma) + b_{\beta|\alpha}^\tau v_\tau, \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

$$e_{\alpha||\beta}^1(\varepsilon; \mathbf{v}) := \frac{1}{\varepsilon} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) + x_3 (b_{\beta|\alpha}^\sigma v_\sigma + b_\alpha^\sigma b_{\sigma\beta} v_3), \quad (6.1.3)$$

donde las funciones  $b_{\beta|\alpha}^\sigma$  vienen dadas por la expresión introducida en (4.3.1).

**Observación 6.1.1.** *Nótese que las dos primeras expresiones habían sido introducidas en (4.4.6) y (4.4.7), respectivamente, únicamente para las funciones  $\boldsymbol{\eta}$  definidas sobre el dominio bidimensional  $\omega$ . Por otra parte, la tercera expresión extiende la relación obtenida para el término del desarrollo asintótico  $e_{\alpha||\beta}^1$  en (4.4.2) para las funciones  $\mathbf{v} \in H^1(0, T; [H^1(\Omega)]^3)$ .*

**Teorema 6.1.2.** *Identifiquemos  $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma, b_{\alpha\beta}, b_\alpha^\beta \in \mathcal{C}^0(\bar{\omega})$  con funciones en  $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$  y consideremos  $\varepsilon_0$  definido en el Teorema 4.1.4. Entonces, existe una constante  $\tilde{C} > 0$  tal que para todo  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  y todo  $\mathbf{v} \in H^1(0, T; [H^1(\Omega)]^3)$ , las deformaciones linealizadas escaladas  $e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon; \mathbf{v})$  (véase (4.2.6)) verifican:*

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon; \mathbf{v}) - e_{\alpha\|\beta}^1(\varepsilon; \mathbf{v}) \right\|_{H^1(0, T; L^2(\Omega))} \leq \tilde{C} \varepsilon \sum_{\alpha} \|v_{\alpha}\|_{H^1(0, T; L^2(\Omega))}, \quad (6.1.4)$$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\varepsilon} \partial_3 e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon; \mathbf{v}) + \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \right\|_{H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))} &\leq \tilde{C} \left( \sum_i \|e_{i\|3}(\varepsilon; \mathbf{v})\|_{H^1(0, T; L^2(\Omega))} \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \sum_{\alpha} \|v_{\alpha}\|_{H^1(0, T; L^2(\Omega))} + \varepsilon \|v_3\|_{H^1(0, T; H^1(\Omega))} \right). \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

*Demostración.* Para demostrar (6.1.4) solo es necesario tener en cuenta la definición de las deformaciones escaladas en (4.2.6) y el comportamiento asintótico de las funciones  $\Gamma_{\alpha\beta}^p(\varepsilon)$  en el Teorema 4.3.1 y obtener la correspondiente desigualdad de los términos derivados con respecto a la variable temporal.

Para demostrar (6.1.5), sean  $e_{\alpha\|3}^0(\varepsilon; \mathbf{v}) \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$  y  $\tilde{\rho}_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \in H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$  definidos por:

$$\begin{aligned} e_{\alpha\|3}^0(\varepsilon; \mathbf{v}) &:= \frac{1}{2} \left( \partial_{\alpha} v_3 + \frac{1}{\varepsilon} \partial_3 v_{\alpha} \right) + b_{\alpha}^{\sigma} v_{\sigma}, \\ \tilde{\rho}_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) &:= \partial_{\alpha\beta} v_3 + \partial_{\alpha} (b_{\beta}^{\tau} v_{\tau}) + \partial_{\beta} (b_{\alpha}^{\sigma} v_{\sigma}) - \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} (\partial_{\sigma} v_3 + 2b_{\sigma}^{\tau} v_{\tau}) - b_{\beta}^{\sigma} |_{\alpha} v_{\sigma} - b_{\alpha}^{\sigma} b_{\sigma\beta} v_3. \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

Teniendo estas expresiones en mente y la definición de  $e_{3\|3}(\varepsilon; \mathbf{v})$  en (4.2.8), se puede probar que se verifica la siguiente igualdad,

$$\begin{aligned} \partial_3 e_{\alpha\|\beta}^1(\varepsilon; \mathbf{v}) + \tilde{\rho}_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) &= \partial_{\alpha} e_{\beta\|3}^0(\varepsilon; \mathbf{v}) + \partial_{\beta} e_{\alpha\|3}^0(\varepsilon; \mathbf{v}) - 2\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} e_{\sigma\|3}^0(\varepsilon; \mathbf{v}) - b_{\alpha\beta} e_{3\|3}(\varepsilon; \mathbf{v}) \\ &\quad + \varepsilon x_3 b_{\alpha}^{\sigma} b_{\sigma\beta} e_{3\|3}(\varepsilon; \mathbf{v}) + \varepsilon x_3 b_{\beta}^{\sigma} |_{\alpha} (2e_{\sigma\|3}^0(\varepsilon; \mathbf{v}) - \partial_{\sigma} v_3 - 2b_{\sigma}^{\tau} v_{\tau}) \end{aligned}$$

y la correspondiente igualdad incluyendo las derivadas temporales respectivas. Por tanto, por una parte, dado que las funciones  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}, b_{\alpha\beta}, b_{\alpha}^{\sigma}$  y  $b_{\beta}^{\sigma} |_{\alpha}$  están acotadas en  $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$  (véase el Teorema 4.3.1), se tiene que

$$\begin{aligned} \left\| \partial_3 e_{\alpha\|\beta}^1(\varepsilon; \mathbf{v}) + \tilde{\rho}_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \right\|_{H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))} &\leq c_1 \left( \sum_{\alpha} \|e_{\alpha\|3}^0(\varepsilon; \mathbf{v})\|_{H^1(0, T; L^2(\Omega))} \right. \\ &\quad \left. + \|e_{3\|3}(\varepsilon; \mathbf{v})\|_{H^1(0, T; L^2(\Omega))} + \varepsilon \sum_{\alpha} \|v_{\alpha}\|_{H^1(0, T; L^2(\Omega))} + \varepsilon \|v_3\|_{H^1(0, T; H^1(\Omega))} \right). \end{aligned}$$

Por otra parte, utilizando (6.1.4), se puede deducir que

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} \partial_3 e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon; \mathbf{v}) - \partial_3 e_{\alpha\|\beta}^1(\varepsilon; \mathbf{v}) \right\|_{H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))} \leq c_2 \varepsilon \sum_{\alpha} \|v_{\alpha}\|_{H^1(0, T; L^2(\Omega))}.$$

Además, teniendo en cuenta la definición de las funciones  $e_{\alpha||3}(\varepsilon; \mathbf{v})$  en (4.2.7), de  $e_{\alpha||3}^0(\varepsilon; \mathbf{v})$  en (6.1.6), el comportamiento asintótico de las funciones  $\Gamma_{\alpha 3}^p(\varepsilon)$  (véase el Teorema 4.3.1) y las correspondientes derivadas temporales de estos términos, se puede comprobar que

$$\|e_{\alpha||3}(\varepsilon; \mathbf{v}) - e_{\alpha||3}^0(\varepsilon; \mathbf{v})\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))} \leq c_3 \varepsilon \sum_{\alpha} \|v_{\alpha}\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}.$$

Ahora bien, para  $\mathbf{v} \in H^1(0, T; [H^1(\Omega)]^3)$  se tiene que  $\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) = \tilde{\rho}_{\alpha\beta}(\mathbf{v})$ . Por tanto, gracias a la combinación de las tres últimas desigualdades se prueba (6.1.5).  $\square$

**Teorema 6.1.3.** *Sea  $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  una sucesión de funciones  $\mathbf{u}(\varepsilon) \in H^1(0, T; V(\Omega))$  que verifica*

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\varepsilon) &\rightharpoonup \mathbf{u} \text{ en } H^1(0, T; [H^1(\Omega)]^3), \\ \frac{1}{\varepsilon} e_{i||j}(\varepsilon) &\rightharpoonup e_{i||j}^1 \text{ en } H^1(0, T; L^2(\Omega)), \end{aligned}$$

cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Entonces,

- (a)  $\mathbf{u}$  es independiente de la variable transversal  $x_3$ .
- (b)  $\bar{\mathbf{u}} \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times H^2(\omega)$  con  $\bar{u}_i = \partial_{\nu} \bar{u}_3 = 0$  en  $\gamma_0$ .
- (c)  $\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = 0$ .
- (d)  $\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$  y  $\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = -\partial_3 e_{\alpha||\beta}^1$ .
- (e) Si además, existen unas funciones  $\kappa_{\alpha\beta} \in H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$  tal que  $\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}(\varepsilon)) \rightarrow \kappa_{\alpha\beta}$  en  $H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\varepsilon) &\rightarrow \mathbf{u} \text{ en } H^1(0, T; [H^1(\Omega)]^3), \\ \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) &= \kappa_{\alpha\beta} \text{ por tanto, } \kappa_{\alpha\beta} \in H^1(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

**Observación 6.1.4.** *Nótese que los apartados (a), (b) y (c) de este teorema juntos implican que  $\mathbf{u}(t) \in V_F(\omega)$  para todo  $t \in [0, T]$ . Equivalentemente, podemos identificar esta función  $\mathbf{u}(t)$  con una  $\boldsymbol{\eta}(t) \in V_F(\omega)$  para todo  $t \in [0, T]$ .*

*Demostración.* Al igual que la demostración del caso estático en el Teorema 5.2-2, [30], dividiremos la demostración en varios pasos enumerados desde (i) hasta (vi).

- (i) La función  $\mathbf{u}$  es independiente de  $x_3$  y  $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$  en  $\gamma_0$ .

Como la familia  $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  está acotada en  $H^1(0, T; [H^1(\Omega)]^3)$  y  $e_{i||j}(\varepsilon) \rightarrow 0$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  (ya que en un espacio de Hilbert, una sucesión débilmente convergente está acotada) se tiene de (4.2.7)–(4.2.8) que

$$\begin{aligned}\partial_3 u_\alpha(\varepsilon) &= \varepsilon (2e_{\alpha||3}(\varepsilon) - \partial_\alpha u_3(\varepsilon) + 2\Gamma_{\alpha 3}^\sigma(\varepsilon)u_\sigma(\varepsilon)) \rightarrow 0, \\ \partial_3 u_3(\varepsilon) &= \varepsilon e_{3||3}(\varepsilon) \rightarrow 0,\end{aligned}$$

en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$ . Por tanto,  $\partial_3 u_i = 0$  y como consecuencia de los apartados (a) y (b) del Teorema 5.1.1 se tiene que  $\mathbf{u}(\mathbf{y}, x_3) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{y})$  para casi todo  $(\mathbf{y}, x_3) \in \Omega$  donde  $\bar{\mathbf{u}} \in H^1(0, T; [H^1(\omega)]^3)$  y  $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$  en  $\gamma_0$ . Por tanto,  $\mathbf{u} = (u_i)$  es independiente de la variable transversal  $x_3$ . Con este paso queda demostrado el apartado (a) del teorema.

(ii) Se verifica que  $\bar{u}_3 \in H^1(0, T; H^2(\omega))$  y  $\partial_\nu \bar{u}_3 = 0$  en  $\gamma_0$ .

Si  $v \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ , entonces integrando por partes se tiene que

$$\int_{-1}^1 x_3 v(\mathbf{y}, x_3) dx_3 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - x_3^2) \partial_3 v(\mathbf{y}, x_3) dx_3, \text{ para todo } \mathbf{y} \in \bar{\omega}.$$

Por los apartados (a) y (b) del Teorema 5.1.1 es claro que las aplicaciones  $w \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \rightarrow \bar{w} \in H^1(0, T; L^2(\omega))$  y  $w \in H^1(0, T; H^1(\Omega)) \rightarrow \bar{w} \in H^1(0, T; H^1(\omega))$  son continuas, por tanto la relación anterior se verificará también (en casi todo punto  $\mathbf{y} \in \omega$ ) si  $v \in H^1(0, T; H^1(\Omega))$ . Entonces, definamos

$$\bar{\mathbf{u}}^1(\varepsilon) = (\bar{u}_i^1(\varepsilon)) := \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-1}^1 (1 - x_3^2) \partial_3 \mathbf{u}(\varepsilon) dx_3 = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-1}^1 x_3 \mathbf{u}(\varepsilon) dx_3. \quad (6.1.7)$$

Ahora bien, por el apartado (b) del Teorema 5.1.1 se tiene que

$$\bar{\mathbf{u}}^1(\varepsilon) \in H^1(0, T; [H^1(\omega)]^3) \text{ y } \bar{\mathbf{u}}^1(\varepsilon) = \mathbf{0} \text{ en } \gamma_0. \quad (6.1.8)$$

Además, por hipótesis,  $e_{3||3}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \partial_3 u_3(\varepsilon) \rightarrow 0$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  y, por tanto, por la definición de  $\bar{u}_3^1$  en (6.1.7), se tiene que

$$\bar{u}_3^1(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ en } H^1(0, T; L^2(\Omega)). \quad (6.1.9)$$

Si ahora combinamos las hipótesis consideradas para la sucesión  $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  y que  $e_{\alpha||3}(\varepsilon) \rightarrow 0$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  con el comportamiento asintótico de las funciones  $\Gamma_{\alpha 3}^\sigma(\varepsilon)$  (véase el Teorema 4.3.1) se tiene (véase (4.2.7)) que

$$\frac{1}{\varepsilon} \partial_3 u_\alpha(\varepsilon) = 2e_{\alpha||3}(\varepsilon) - \partial_\alpha u_3(\varepsilon) + 2\Gamma_{\alpha 3}^\sigma(\varepsilon)u_\sigma(\varepsilon) \rightharpoonup (-\partial_\alpha u_3 - 2b_\alpha^\sigma u_\sigma),$$

en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$ . Por tanto, teniendo en cuenta esta convergencia, la definición de  $\bar{u}_\alpha^1(\varepsilon)$  en (6.1.7), la independencia de  $x_3$  de las componentes  $u_i$  del paso (i) y que  $\bar{\partial}_\alpha u_3 = \partial_\alpha \bar{u}_3$  por el apartado (b) del Teorema 5.1.1, se tiene que

$$\bar{u}_\alpha^1(\varepsilon) \rightharpoonup \bar{u}_\alpha^1 := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x_3^2 - 1) (\partial_\alpha u_3 + 2b_\alpha^\sigma u_\sigma) dx_3 = -\frac{2}{3} (\partial_\alpha \bar{u}_3 + 2b_\alpha^\sigma \bar{u}_\sigma), \quad (6.1.10)$$

en  $H^1(0, T; L^2(\omega))$ , ya que las aplicaciones lineales fuertemente continuas son también continuas en las topologías débiles (véase, por ejemplo, el Teorema 3.10 en [14]). Veamos que además, las sucesiones  $(\bar{u}_\alpha^1(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  convergen débilmente en  $H^1(0, T; H^1(\omega))$ . Para ello, es suficiente probar que las sucesiones  $(\frac{1}{2}(\partial_\alpha \bar{u}_\beta^1(\varepsilon) + \partial_\beta \bar{u}_\alpha^1(\varepsilon)))_{\varepsilon>0}$  convergen débilmente en  $H^1(0, T; L^2(\omega))$ , ya que por la desigualdad de Korn bidimensional, la norma  $\|\cdot\|_{1,\omega}$  es equivalente a la norma

$$(\eta_\alpha) \longrightarrow \left( \sum_{\alpha,\beta} \left| \frac{1}{2} (\partial_\alpha \eta_\beta + \partial_\beta \eta_\alpha) \right|_{0,\omega}^2 \right)^{1/2},$$

en el espacio  $\{(\eta_\alpha) \in [H^1(\omega)]^3; \eta_\alpha = 0 \text{ en } \gamma_0\}$  y como consecuencia, también lo serán las normas  $\|\cdot\|_{H^1(0,T;H^1(\omega))}$  y la norma

$$(\eta_\alpha) \longrightarrow \left| \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} (\partial_\alpha \eta_\beta + \partial_\beta \eta_\alpha) \right|_{H^1(0,T;L^2(\omega))},$$

en el espacio  $\{(\eta_\alpha) \in H^1(0, T; [H^1(\omega)]^3); \eta_\alpha = 0 \text{ en } \gamma_0\}$ . Sustituyendo (6.1.1) en (6.1.3) para  $\mathbf{v} = \mathbf{u}(\varepsilon)$  y multiplicando por  $x_3$  nos conduce a,

$$\begin{aligned} x_3 e_{\alpha||\beta}^1(\varepsilon) &= \frac{x_3}{2\varepsilon} (\partial_\beta u_\alpha(\varepsilon) + \partial_\alpha u_\beta(\varepsilon)) - \frac{x_3}{\varepsilon} \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma u_\sigma(\varepsilon) - \frac{x_3}{\varepsilon} b_{\alpha\beta} u_3(\varepsilon) \\ &\quad + x_3^2 (b_{\beta|\alpha}^\sigma u_\sigma(\varepsilon) + b_\alpha^\sigma b_{\sigma\beta} u_3(\varepsilon)), \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la notación  $e_{\alpha||\beta}^1(\varepsilon) \equiv e_{\alpha||\beta}^1(\varepsilon; \mathbf{u}(\varepsilon))$ . Así, integrando con respecto a  $x_3$  en  $[-1, 1]$  y teniendo en cuenta (5.1.1) y (6.1.7) se tiene que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\partial_\alpha \bar{u}_\beta^1(\varepsilon) + \partial_\beta \bar{u}_\alpha^1(\varepsilon)) &= \overline{2x_3 e_{\alpha||\beta}^1(\varepsilon)} - 2b_{\beta|\alpha}^\sigma \overline{x_3^2 u_\sigma(\varepsilon)} \\ &\quad - 2b_\alpha^\sigma b_{\sigma\beta} \overline{x_3^2 u_3(\varepsilon)} + b_{\alpha\beta} \bar{u}_3^1(\varepsilon) + \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \bar{u}_\sigma^1(\varepsilon). \end{aligned} \quad (6.1.11)$$

Estudiemos entonces la convergencia de cada uno de los términos involucrados en la expresión anterior. La primera desigualdad de Teorema 6.1.2 y la hipótesis  $u_\alpha(\varepsilon) \rightarrow u_\alpha$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  implican que

$$\left( \frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha||\beta}(\varepsilon) - e_{\alpha||\beta}^1(\varepsilon) \right) \rightarrow 0 \text{ en } H^1(0, T; L^2(\Omega)),$$

y las hipótesis  $\frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha||\beta}(\varepsilon) \rightharpoonup e_{\alpha||\beta}^1$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  implican, junto con la anterior convergencia, que  $e_{\alpha||\beta}^1(\varepsilon) \rightharpoonup e_{\alpha||\beta}^1$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$ . Como consecuencia:

$$\overline{x_3 e_{\alpha||\beta}^1(\varepsilon)} \rightharpoonup \overline{x_3 e_{\alpha||\beta}^1} \text{ en } H^1(0, T; L^2(\omega)). \quad (6.1.12)$$

Como  $\mathbf{u}(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{u}$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$ , las sucesiones  $(b_{\beta|\alpha}^\sigma \overline{x_3^2 u_\sigma(\varepsilon)})_{\varepsilon>0}$  y  $(b_\alpha^\sigma b_{\sigma\beta} \overline{x_3^2 u_3(\varepsilon)})_{\varepsilon>0}$  convergen fuertemente en  $H^1(0, T; L^2(\omega))$ . De la misma forma, por las convergencias (6.1.9)



y (6.1.10), la sucesiones  $(b_{\alpha\beta}\bar{u}_3^1(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  y  $(\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma\bar{u}_\sigma^1(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  convergen fuerte y débilmente, respectivamente, en  $H^1(0, T; L^2(\omega))$ . Como consecuencia de estas convergencias y (6.1.12) y la relación (6.1.11) la sucesión  $(\frac{1}{2}(\partial_\alpha\bar{u}_\beta^1(\varepsilon) + \partial_\beta\bar{u}_\alpha^1(\varepsilon)))_{\varepsilon>0}$  converge débilmente en  $H^1(0, T; L^2(\omega))$  y por tanto la sucesión  $(\bar{u}_\alpha^1(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  lo hace en  $H^1(0, T; H^1(\omega))$ .

Entonces, como  $\bar{u}_\alpha^1(\varepsilon) \rightharpoonup \bar{u}_\alpha^1$  en  $H^1(0, T; H^1(\omega))$  implica que  $\bar{u}_\alpha^1 \in H^1(0, T; H^1(\omega))$ . Como consecuencia de (6.1.10) y que  $b_\alpha^\sigma\bar{u}_\sigma^1 \in H^1(0, T; H^1(\omega))$  se tiene que  $\partial_\alpha\bar{u}_3 \in H^1(0, T; H^1(\omega))$  y por tanto, concluimos que  $\bar{u}_3 \in H^1(0, T; H^2(\omega))$ .

Por otro lado, de (6.1.8) se tiene que  $\bar{u}_\alpha^1(\varepsilon) = 0$  en  $\gamma_0$ . Por tanto, la convergencia  $\bar{u}_\alpha^1(\varepsilon) \rightharpoonup \bar{u}_\alpha^1$  en  $H^1(0, T; H^1(\omega))$ , implica que  $\bar{u}_\alpha^1 = 0$  en  $\gamma_0$ . Ahora bien, como también  $\bar{u}_i = 0$  en  $\gamma_0$  (véase el paso (i)), la expresión de  $\bar{u}_\alpha^1$  en (6.1.10) implica que  $\partial_\alpha\bar{u}_3 = 0$  en  $\gamma_0$  y, por tanto,  $\partial_\nu\bar{u}_3 = 0$  en  $\gamma_0$ , completando la demostración de este paso. Así, queda demostrado el apartado (b) del teorema.

(iii) *Se verifica la convergencia  $\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}(\varepsilon)) \rightarrow 0$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  y además,  $\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = 0$ .*

Por la definición de las funciones  $e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon; \mathbf{v})$ ,  $e_{\alpha\|\beta}^1(\varepsilon; \mathbf{v})$  y  $\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v})$  en (4.2.6), (6.1.1) y (6.1.3), respectivamente, se tiene que

$$\begin{aligned} \|\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}(\varepsilon)) - e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon)\|_{H^1(0, T; L^2(\Omega))} &\leq \varepsilon \left\| e_{\alpha\|\beta}^1(\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon) \right\|_{H^1(0, T; L^2(\Omega))} \\ &+ \varepsilon \|x_3 b_\beta^\sigma|_\alpha u_\sigma(\varepsilon)\|_{H^1(0, T; L^2(\Omega))} + \varepsilon \|x_3 b_\alpha^\sigma b_{\sigma\beta} u_3(\varepsilon)\|_{H^1(0, T; L^2(\Omega))}. \end{aligned}$$

Por tanto, por el Teorema 6.1.4 y las hipótesis consideradas para la sucesión  $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  se tiene que

$$\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}(\varepsilon)) \rightarrow 0 \text{ en } H^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

Por las mismas hipótesis,  $\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}(\varepsilon)) \rightarrow \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u})$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$ , entonces  $\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = 0$ . Con este paso queda demostrado el apartado (c) del teorema.

(iv) *Se verifica que  $\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$  y, en particular,  $\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = -\partial_3 e_{\alpha\|\beta}^1$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$ .*

Por (6.1.5), las hipótesis consideradas para la sucesión  $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  y que  $e_{i\|j}(\varepsilon) \rightarrow 0$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  (consecuencia también de las hipótesis), se tiene que

$$\left( \frac{1}{\varepsilon} \partial_3 e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon) + \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}(\varepsilon)) \right) \rightarrow 0 \text{ en } H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Como el operador  $\partial_3 : H^1(0, T; L^2(\Omega)) \rightarrow H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$  es continuo con respecto a las topologías débiles, deducimos de la hipótesis  $\frac{1}{\varepsilon} e_{i\|j}(\varepsilon; \mathbf{u}(\varepsilon)) \rightharpoonup e_{i\|j}^1$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$ , que

$$\frac{1}{\varepsilon} \partial_3 e_{i\|j}(\varepsilon; \mathbf{u}(\varepsilon)) \rightharpoonup \partial_3 e_{i\|j}^1 \text{ en } H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)),$$

y junto con la convergencia anterior, deducimos que

$$(\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}(\varepsilon)) + \partial_3 e_{\alpha||\beta}^1) \rightarrow 0 \text{ en } H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Nuevamente, por las hipótesis consideradas para la sucesión  $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  se tiene que  $\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}(\varepsilon)) \rightharpoonup \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u})$  en  $H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$  por tanto  $\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = -\partial_3 e_{\alpha||\beta}^1$  en  $H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$ . Ahora bien, como  $u_3$  es independiente de  $x_3$  por el paso (i) y  $\bar{u}_3 \in H^1(0, T; H^2(\omega))$  por el paso (ii) entonces  $u_3 \in H^1(0, T; H^2(\Omega))$  y, por tanto,  $\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$ , es decir,  $\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = -\partial_3 e_{\alpha||\beta}^1$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  (véase la definición de  $e_{\alpha||\beta}^1$  en (6.1.3)). Con este paso queda demostrado el apartado (d) del teorema.

(v) Si, como hipótesis adicional,  $\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}(\varepsilon)) \rightarrow \kappa_{\alpha\beta}$  en  $H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , entonces la sucesión  $(u_3(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  converge fuertemente en  $H^1(0, T; H^1(\Omega))$ .

En primer lugar se tiene que

$$\partial_3 u_3(\varepsilon) = \varepsilon e_{3||3}(\varepsilon) \rightarrow 0 = \partial_3 u_3 \text{ en } H^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

Ahora, por el Lema de J.L. Lions (véase, por ejemplo, el Teorema 3.2 en el Capítulo III de [48]), la aplicación,

$$v \in L^2(\Omega) \longrightarrow (v, (\partial_i v)) \in H^{-1}(\Omega) \times [H^{-1}(\Omega)]^3,$$

es un isomorfismo. Por tanto, para probar que  $\partial_\alpha u_3(\varepsilon) \rightarrow \partial_\alpha u_3$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  es suficiente con probar que

$$\partial_\alpha u_3(\varepsilon) \rightarrow \partial_\alpha u_3, \quad \partial_{\alpha i} u_3(\varepsilon) \rightarrow \partial_{\alpha i} u_3,$$

en  $H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$ . La primera convergencia es consecuencia directa de la convergencia  $u_3(\varepsilon) \rightarrow u_3$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$ , asumida por hipótesis. Ahora, por un lado, por la relación  $\partial_3 u_3(\varepsilon) = \varepsilon e_{3||3}(\varepsilon) \rightarrow 0 = \partial_3 u_3$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  se tiene que

$$\partial_{\alpha 3} u_3(\varepsilon) \rightarrow 0 = \partial_{\alpha 3} u_3 \text{ en } H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Por otro lado, de la hipótesis  $\mathbf{u}(\varepsilon) \rightharpoonup \mathbf{u}$  en  $H^1(0, T; [H^1(\Omega)]^3)$  se deduce que  $\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}(\varepsilon)) \rightharpoonup \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u})$  en  $H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$ , luego  $\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = \kappa_{\alpha\beta}$  y en particular,  $\kappa_{\alpha\beta} \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$  (véase el paso (iv)). Ahora como  $u_i(\varepsilon) \rightarrow u_i$  y  $\partial_\alpha u_i(\varepsilon) \rightarrow \partial_\alpha u_i$  en  $H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$ , por hipótesis, se tiene despejando de la definición (6.1.2) para  $\mathbf{v} = \mathbf{u}(\varepsilon)$  el término  $\partial_{\alpha\beta} u_3(\varepsilon)$ , que

$$\partial_{\alpha\beta} u_3(\varepsilon) \rightarrow \partial_{\alpha\beta} u_3 \text{ en } H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)). \quad (6.1.13)$$

Por tanto, hemos probado que  $\partial_\alpha u_3(\varepsilon) \rightarrow \partial_\alpha u_3$  y  $\partial_{\alpha i} u_3(\varepsilon) \rightarrow \partial_{\alpha i} u_3$  en  $H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$ , entonces por el Lema de J.L. Lions  $\partial_\alpha u_3(\varepsilon) \rightarrow \partial_\alpha u_3$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  y, por tanto, concluimos que la sucesión  $(u_3(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  converge en  $H^1(0, T; H^1(\Omega))$ .



(vi) Las sucesiones  $(u_\alpha(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  convergen fuertemente en  $H^1(0, T; H^1(\Omega))$ .

La desigualdad clásica de tipo Korn aplicada a funciones en el espacio  $V(\Omega)$  implica que probar este enunciado es equivalente a demostrar que

$$e_{ij}(\mathbf{u}'(\varepsilon)) \rightarrow e_{ij}(\mathbf{u}') \text{ en } H^1(0, T; L^2(\Omega)),$$

donde  $e_{ij}(\mathbf{v}) := \frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j)$ ,  $\mathbf{u}'(\varepsilon) := (u_1(\varepsilon), u_2(\varepsilon), 0)$  y  $\mathbf{u}' := (u_1, u_2, 0)$ . Por la definición (6.1.1) para  $\mathbf{v} = \mathbf{u}(\varepsilon)$  se tiene que

$$e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}'(\varepsilon)) = \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}(\varepsilon)) + \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma u_\sigma(\varepsilon) + b_{\alpha\beta} u_3(\varepsilon).$$

Entonces, por el paso (iii) y las hipótesis sobre la sucesión  $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ , se tiene que

$$e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}'(\varepsilon)) \rightarrow (\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma u_\sigma + b_{\alpha\beta} u_3) = e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}') \text{ en } H^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

Por otro lado,

$$e_{\alpha 3}(\mathbf{u}'(\varepsilon)) = \frac{1}{2} \partial_3 u_\alpha(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2} (2e_{\alpha||3}(\varepsilon) - \partial_\alpha u_3(\varepsilon) + 2\Gamma_{\alpha 3}^\sigma(\varepsilon) u_\sigma(\varepsilon)),$$

por la definición de  $e_{\alpha||3}(\varepsilon; \mathbf{v})$  para  $\mathbf{v} = \mathbf{u}(\varepsilon)$  en (4.2.7). Entonces, por las hipótesis sobre la sucesión  $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ , que las sucesiones  $(\Gamma_{\alpha 3}^\sigma(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  están acotadas en  $\mathcal{C}^0(\Omega)$  (véase el Teorema 4.3.1) y el paso (i), se tiene que

$$e_{\alpha 3}(\mathbf{u}'(\varepsilon)) \rightarrow 0 = \frac{1}{2} \partial_3 u_\alpha = e_{\alpha 3}(\mathbf{u}').$$

Finalmente,  $e_{33}(\mathbf{u}'(\varepsilon)) = 0 = e_{33}(\mathbf{u}')$  por el paso (i), por lo que hemos completado la demostración de este paso. Así, queda demostrado el apartado (e) del teorema.

Por tanto, hemos completado la demostración del teorema.  $\square$

Para terminar esta sección, recordamos en el siguiente teorema una desigualdad de tipo Korn tridimensional para una familia de láminas membrana, cuya demostración se puede consultar en el Teorema 5.3-1, [30].

**Teorema 6.1.5.** *Asumamos que  $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^3(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$  y consideremos  $\varepsilon_0$  definido en el Teorema 4.1.4. Consideremos una familia de láminas membrana con espesor  $2\varepsilon$  con cada una de ellas teniendo la misma superficie media  $S = \boldsymbol{\theta}(\bar{\omega})$  y sometidas a una condición de contorno de fijación a lo largo de una parte de su frontera lateral con la misma curva media  $\boldsymbol{\theta}(\gamma_0)$ . Entonces existe un  $\varepsilon_1$  verificando  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$  y una constante  $C > 0$  tal que, para todo  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ , se verifica la siguiente desigualdad de tipo Korn tridimensional:*

$$\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \leq \frac{C}{\varepsilon} \left( \sum_{i,j} |e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v})|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \quad \forall \mathbf{v} = (v_i) \in V(\Omega). \quad (6.1.14)$$

## 6.2. Espacios de compleción y fuerzas admisibles

En esta sección introduciremos los espacios *ad hoc* que completan al espacio,

$$V(\omega) := \{\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in [H^1(\omega)]^3; \eta_i = 0 \text{ en } \gamma_0\}, \quad (6.2.1)$$

que en el Capítulo 4 representaba el espacio de las soluciones admisibles del problema de la lámina membrana viscoelástica (véase el apartado (b) del Teorema 4.4.1). Después, incluiremos el concepto de fuerzas admisibles necesario para la correcta definición de los problemas de este capítulo.

En primer lugar recordemos la definición del espacio,

$$V_F(\omega) := \{\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times H^2(\omega); \eta_i = \partial_\nu \eta_3 = 0 \text{ en } \gamma_0, \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) = 0 \text{ en } \omega\}.$$

En el Capítulo 5, hemos justificado las ecuaciones bidimensionales de las láminas membranas viscoelásticas, cuando la superficie media  $S$  es elíptica y la condición de contorno se considera en toda la frontera lateral de la lámina. Estas hipótesis conducían a que  $V_F(\omega) = \{\mathbf{0}\}$  (véase la Sección 5.2, para más detalle). Por tanto, en este capítulo completaremos el estudio de las membranas viscoelásticas comenzado en el capítulo anterior, considerando aquellas láminas que no verifiquen alguna de las hipótesis mencionadas, pero que se siga induciendo que  $V_F(\omega) = \{\mathbf{0}\}$ . Este tipo de membranas son las que denominaremos como láminas membranas generalizadas viscoelásticas. En primer lugar, comenzaremos estudiando los espacios de compleción que utilizaremos en lo que sigue. Para ello definamos el espacio:

$$V_K(\omega) := \{\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times H^2(\omega); \eta_i = \partial_\nu \eta_3 = 0 \text{ en } \gamma_0\}, \quad (6.2.2)$$

y recordemos las definiciones de los espacios  $V_0(\omega)$  y  $V(\Omega)$  en (4.2.17), (4.4.8), respectivamente:

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \{\mathbf{v} = (v_i) \in [H^1(\Omega)]^3; \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_0\}, \\ V_0(\omega) &:= \{\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in V(\omega); \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) = 0 \text{ en } \omega\}. \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

También, introduzcamos las seminormas definidas por

$$|\mathbf{v}|_\Omega^M := (|\partial_3 \mathbf{v}|_{0,\Omega}^2 + (|\bar{\mathbf{v}}|_\omega^M)^2)^{1/2} \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega), \quad (6.2.4)$$

$$|\boldsymbol{\eta}|_\omega^M := \left( \sum_{\alpha,\beta} |\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})|_{0,\omega}^2 \right)^{1/2}, \quad \forall \boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times L^2(\omega). \quad (6.2.5)$$

Como  $V_F(\omega) = \{\mathbf{0}\}$  por hipótesis, la seminorma  $|\cdot|_\omega^M$  es una norma sobre el espacio  $V_K(\omega)$ .

Como ya adelantábamos en la introducción de este capítulo, distinguiremos dos subconjuntos diferentes de las láminas membranas generalizadas viscoelásticas, que dependerán de si el espacio  $V_0(\omega)$  contiene solo a la función nula o no. Es ahora cuando abordaremos

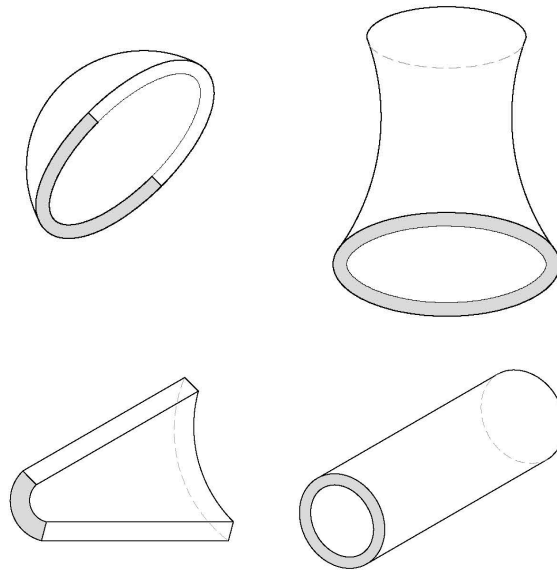


Figura 6.1: Ejemplos de membranas generalizadas. La zona sombreada indica el conjunto donde se considera la condición de contorno de fijación.

una de las dificultades de este tipo de membranas, ya estudiada para el caso elástico (véase el Capítulo 5, [30]) , que es la introducción de espacios abstractos sin significado físico evidente.

Por un lado, consideraremos que una lámina membrana generalizada es del primer tipo cuando  $V_0(\omega) = \{\mathbf{0}\}$  (por tanto,  $V_F(\omega) = \{\mathbf{0}\}$ ), es decir, cuando la seminorma  $|\cdot|_\omega^M$  es una norma sobre el espacio  $V(\omega)$  (y por tanto, será una norma sobre el espacio  $V_K(\omega) \subset V(\omega)$ ). Entonces, los espacios abstractos se definen por

$$V_M^\#(\Omega) := \text{compleción de } V(\Omega) \text{ con respecto a } |\cdot|_\Omega^M, \quad (6.2.6)$$

$$V_M^\#(\omega) := \text{compleción de } V(\omega) \text{ con respecto a } |\cdot|_\omega^M. \quad (6.2.7)$$

**Observación 6.2.1.** *Consideremos el espacio,*

$$V_0(\Omega) := \{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^3; \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_0, \partial_3 \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ en } \Omega, \gamma_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{v}}) = 0 \text{ en } \omega\}.$$

Por tanto, por la definición de la seminorma  $|\cdot|_\Omega^M$  deducimos que la lámina membrana generalizada es del primer tipo si y solo si  $V_0(\Omega) = \{\mathbf{0}\}$ . Nótese que en este caso,  $|\cdot|_\Omega^M$  (véase (6.2.4)) define una norma en el espacio  $V(\Omega)$ . Algunos ejemplos de membranas generalizadas de primer tipo corresponden a las ilustraciones de la Figura 6.1.

Por otro lado, si  $V_0(\omega) \neq \{\mathbf{0}\}$  pero  $V_F(\omega) = \{\mathbf{0}\}$ , es decir, si  $|\cdot|_\omega^M$  es una norma sobre  $V_K(\omega)$  pero no sobre  $V(\omega)$ , la lámina la denominaremos como membrana generalizada del

segundo tipo. Entonces, los espacios abstractos se definen por

$$\tilde{V}_M^\#(\Omega) := \text{compleción de } V(\Omega)/V_0(\Omega) \text{ con respecto a } |\cdot|_\Omega^M, \quad (6.2.8)$$

$$\tilde{V}_M^\#(\omega) := \text{compleción de } V(\omega)/V_0(\omega) \text{ con respecto a } |\cdot|_\omega^M. \quad (6.2.9)$$

**Observación 6.2.2.** *Nótese que en ambos casos, estos espacios podrían no ser espacios de distribuciones.*

*Además, no se conocen ejemplos ilustrativos de membranas generalizadas de segundo tipo, pero como se menciona en el Capítulo 5 de [30], se infiere que estas puedan corresponder a láminas cuya superficie media  $S$  es poco regular.*

**Proposición 6.2.3.** *Los espacios definidos por (6.2.6)–(6.2.7) y (6.2.8)–(6.2.9) son espacios de Hilbert.*

*Demostración.* Por la definición de dichos espacios completos, es claro que (6.2.4) y (6.2.5) definen unas normas en los mismos. Por tanto, podemos afirmar que son espacios de Banach (pues son espacios normados completos). Para probar que además son espacios de Hilbert, veamos que las normas correspondientes (6.2.4) y (6.2.5) verifican la igualdad del paralelogramo:

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = 2(|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2),$$

para cada par de elementos  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  del espacio correspondiente con respecto a la norma  $|\cdot|$  asociada al espacio de Banach en cuestión (véase, por ejemplo, el Capítulo I, apartados 5 y 9, en [167]). Comencemos con el espacio  $V_M^\#(\omega)$  definido en (6.2.7) (siendo análogo para el espacio  $\tilde{V}_M^\#(\omega)$  definido en (6.2.9)) con la norma  $|\cdot|_\omega^M$  definida en (6.2.5). Por simplicidad, denotaremos a la norma como  $|\cdot|_\omega$ . Sean  $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in V_M^\#(\omega)$  (respectivamente de  $\tilde{V}_M^\#(\omega)$ ), entonces

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}|_\omega^2 + |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|_\omega^2 &= \sum_{\alpha, \beta} |\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta})|_{0, \omega}^2 + \sum_{\alpha, \beta} |\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta})|_{0, \omega}^2 \\ &= \sum_{\alpha, \beta} \int_\omega (\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}))^2 dy + \sum_{\alpha, \beta} \int_\omega (\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}))^2 dy. \end{aligned}$$

Así, teniendo en cuenta la linealidad de las componentes covariantes  $\gamma_{\alpha\beta}$  con respecto a las funciones  $\boldsymbol{\xi}$  y  $\boldsymbol{\eta}$  (véase (4.4.6)) y desarrollando los cuadrados de las expresiones correspondientes, se tiene que

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}|_\omega^2 + |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|_\omega^2 &= \sum_{\alpha, \beta} \int_\omega ((\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi}))^2 + 2\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi})\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) + (\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}))^2) dy \\ &\quad + \sum_{\alpha, \beta} \int_\omega ((\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi}))^2 - 2\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi})\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) + (\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}))^2) dy \\ &= 2 \sum_{\alpha, \beta} \int_\omega (\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi}))^2 dy + 2 \sum_{\alpha, \beta} \int_\omega (\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}))^2 dy \end{aligned}$$

$$= 2 \sum_{\alpha, \beta} |\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi})|_{0, \omega}^2 + 2 \sum_{\alpha, \beta} |\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})|_{0, \omega}^2 = 2 (|\boldsymbol{\xi}|_{\omega}^2 + |\boldsymbol{\eta}|_{\omega}^2), \quad (6.2.10)$$

como queríamos demostrar. Por tanto, los espacios  $V_M^{\#}(\omega)$  y  $\tilde{V}_M^{\#}(\omega)$  son espacios de Hilbert. Estudiemos ahora que ocurre con el espacio  $V_M^{\#}(\Omega)$  definido en (6.2.6) (siendo análogo el estudio para el espacio  $\tilde{V}_M^{\#}(\Omega)$  definido en (6.2.8)) con la norma  $|\cdot|_{\Omega}^M$  definida en (6.2.4). Por simplicidad, denotaremos a la norma como  $|\cdot|_{\Omega}$ . Sean  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_M^{\#}(\Omega)$  (respectivamente de  $\tilde{V}_M^{\#}(\Omega)$ ), entonces

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} + \mathbf{v}|_{\Omega}^2 + |\mathbf{u} - \mathbf{v}|_{\Omega}^2 &= |\partial_3(\mathbf{u} + \mathbf{v})|_{0, \Omega}^2 + |\overline{\mathbf{u} + \mathbf{v}}|_{\omega}^2 + |\partial_3(\mathbf{u} - \mathbf{v})|_{0, \Omega}^2 + |\overline{\mathbf{u} - \mathbf{v}}|_{\omega}^2 \\ &= \int_{\Omega} (\partial_3 \mathbf{u} + \partial_3 \mathbf{v})^2 dx + \int_{\Omega} (\partial_3 \mathbf{u} - \partial_3 \mathbf{v})^2 dx + 2 (|\bar{\mathbf{u}}|_{\omega}^2 + |\bar{\mathbf{v}}|_{\omega}^2) \\ &= 2 \int_{\Omega} (\partial_3 \mathbf{u})^2 dx + 2 \int_{\Omega} (\partial_3 \mathbf{v})^2 dx + 2 (|\bar{\mathbf{u}}|_{\omega}^2 + |\bar{\mathbf{v}}|_{\omega}^2) \\ &= 2 (|\partial_3 \mathbf{u}|_{\Omega}^2 + |\bar{\mathbf{u}}|_{\omega}^2) + 2 (|\partial_3 \mathbf{v}|_{\Omega}^2 + |\bar{\mathbf{v}}|_{\omega}^2) = 2 (|\mathbf{u}|_{\Omega}^2 + |\mathbf{v}|_{\Omega}^2), \end{aligned}$$

donde hemos utilizado (6.2.10). Por tanto, los espacios  $V_M^{\#}(\Omega)$  y  $\tilde{V}_M^{\#}(\Omega)$  son espacios de Hilbert.  $\square$

**Observación 6.2.4.** Dada una norma  $|\cdot|$  definida sobre un espacio de Banach  $V$  que verifica la igualdad del paralelogramo (y por tanto, es un espacio de Hilbert), podemos definir el producto interior  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  asociado a través de la identidad de polarización dada por

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{4} (|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2),$$

(véase por ejemplo el Capítulo I, apartado 5 en [167]).

Una vez definidos los espacios correspondientes que nos proporcionarán problemas bien definidos para el caso de la membrana generalizada viscoelástica, debemos analizar el tipo de fuerzas aplicadas necesarias para asegurar existencia y unicidad de solución de los problemas. Definamos para cada  $\varepsilon > 0$ , la función real  $L(\varepsilon)(t) : V(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$L(\varepsilon)(t)(\mathbf{v}) := \int_{\Omega} f^i(t) v_i \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^i(t) v_i \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma, \quad (6.2.11)$$

$\forall \mathbf{v} \in V(\Omega)$ ,  $\forall t \in [0, T]$ , con  $f^i \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$  y  $h^i \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-))$ . Es sencillo verificar que esta función es continua con respecto a la norma  $\|\cdot\|_{1, \Omega}$  y uniformemente con respecto a cada  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , con  $\varepsilon_0$  definido en el Teorema 4.1.4. Por la desigualdad de tipo Korn del Teorema 6.1.5, existe una constante  $K(t) > 0$  tal que

$$|L(\varepsilon)(t)(\mathbf{v})| \leq \frac{K(t)}{\varepsilon} \left( \sum_{i,j} |e_{ij}(\varepsilon; \mathbf{v})|_{0, \Omega}^2 \right)^{1/2} \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega), \quad \forall t \in [0, T].$$

Por tanto, la aplicación  $L(\varepsilon)(t)$  es también continua con respecto a la norma definida por

$$\mathbf{v} \mapsto \left( \sum_{i,j} |e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v})|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}, \quad (6.2.12)$$

pero no uniformemente con respecto a  $\varepsilon$ , sin considerar otras hipótesis a mayores. Ahora bien,  $V(\Omega)$  es un espacio de Hilbert con respecto al producto interior,

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \int_{\Omega} e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v}) e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{w}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx, \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V(\Omega), \quad (6.2.13)$$

pues es sencillo verificar que la norma (6.2.12) verifica la igualdad del paralelogramo. Así, aplicando el Teorema de representación de Riesz (véase el Teorema 4.11 en [14], por ejemplo), existe un  $\mathbf{G}(t) \in [H^1(\Omega)]^3$  para cada  $t \in [0, T]$ , tal que,

$$L(\varepsilon)(t)(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{G}(t)) e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega). \quad (6.2.14)$$

Por tanto, definamos  $F^{ij}(\varepsilon)(t) := e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{G}(t))$  para cada  $t \in [0, T]$ , tal que

$$L(\varepsilon)(t)(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} F^{ij}(\varepsilon)(t) e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega). \quad (6.2.15)$$

Si  $|F^{ij}(\varepsilon)(t)|_{0,\Omega}$  es uniformemente acotada con respecto a  $\varepsilon$ , para cada  $t \in [0, T]$ , aseguraremos la continuidad uniforme de la forma lineal. Como consecuencia de la regularidad de las fuerzas aplicadas, supondremos también que  $F^{ij}(\varepsilon) = F^{ji}(\varepsilon) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . Además, es necesario que  $F^{ij}(\varepsilon)$  tengan un límite en  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

En resumen, las fuerzas aplicadas sobre una familia de membranas generalizadas se denominarán fuerzas admisibles si, para cada  $\varepsilon > 0$ , existen funciones  $F^{ij}(\varepsilon) = F^{ji}(\varepsilon) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$  y  $F^{ij} = F^{ji} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$  tal que se cumple la igualdad (6.2.15) para todo  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  y además,  $F^{ij}(\varepsilon) \rightarrow F^{ij}$  en  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Por tanto, si las fuerzas aplicadas son admisibles, existe una constante  $K_0(t) > 0$  tal que,

$$|L(\varepsilon)(t)(\mathbf{v})| \leq K_0(t) \left( \sum_{i,j} |e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v})|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}, \quad (6.2.16)$$

para todo  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,  $\forall \mathbf{v} \in V(\Omega)$ ,  $\forall t \in [0, T]$ . La consideración de las fuerzas admisibles para este problema implica imponer hipótesis adicionales sobre las componentes contravariantes  $f^{i,\varepsilon} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $h^{i,\varepsilon} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-))$ . Estas hipótesis deberán ser tal que para cada  $\varepsilon > 0$  y todo  $t \in [0, T]$ , el miembro de la derecha de la ecuación del Problema 4.1.5 sea igual a,

$$\int_{\Omega^\varepsilon} f^{i,\varepsilon}(t) v_i^\varepsilon \sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon + \int_{\Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon} h^{i,\varepsilon}(t) v_i^\varepsilon \sqrt{g^\varepsilon} d\Gamma^\varepsilon = \varepsilon L(\varepsilon)(\mathbf{v})(t), \quad (6.2.17)$$



**Observación 6.2.5.** *Nótese que con esta hipótesis estamos determinando el orden de las fuerzas aplicadas. En efecto, estos órdenes corresponden con las ecuaciones bidimensionales de una lámina membrana deducidas en el apartado (iv) del Teorema 4.4.1, o lo que es lo mismo, tomar  $p = 0$  en el Problema 4.2.9.*

Entonces, podemos escribir las ecuaciones tridimensionales definidas en el dominio de referencia teniendo en cuenta la inclusión de las fuerzas admisibles.

**Problema 6.2.6.** *Hallar  $\mathbf{u}(\varepsilon) : [0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tal que*

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\varepsilon)(t, \cdot) &\in V(\Omega) \quad \forall t \in [0, T], \\ \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon, \mathbf{v}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx &+ \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) \dot{e}_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon, \mathbf{v}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &= L(\varepsilon)(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega), \text{ c.p.d. en } (0, T), \\ \mathbf{u}(\varepsilon)(0, \cdot) &= \mathbf{u}_0(\varepsilon)(\cdot). \end{aligned} \quad (6.2.18)$$

Es claro que este problema es un caso particular del Problema 4.2.9, por tanto, podemos asegurar la existencia, unicidad y regularidad de solución que cita el Teorema 4.3.13 bajo las hipótesis correspondientes y teniendo en cuenta las fuerzas admisibles. Además, también estamos en condiciones de escribir los problemas bien definidos para la membrana generalizada viscoelástica del primer tipo y segundo tipo, respectivamente:

**Problema 6.2.7.** *Hallar  $\xi(t, \cdot) \in V_M^{\#}(\omega) \quad \forall t \in [0, T]$  tal que,*

$$\begin{aligned} B_M^{\#}(\xi(t), \boldsymbol{\eta}) &= L_M^{\#}(\boldsymbol{\eta})(t) \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in V_M^{\#}(\omega), \text{ c.t.p. } t \in (0, T), \\ \xi(0, \cdot) &= \xi_0(\cdot), \end{aligned} \quad (6.2.19)$$

donde  $B_M^{\#}$  y  $L_M^{\#}$  son las únicas extensiones de  $H^1(0, T; V(\omega))$  a  $H^1(0, T; V_M^{\#}(\omega))$  y de  $V(\omega)$  a  $V_M^{\#}(\omega)$  de los funcionales  $B_M : H^1(0, T; V(\omega)) \times V(\omega) \longrightarrow \mathbb{R}$  y  $L_M(t) : V(\omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ , definidas por

$$\begin{aligned} B_M(\xi(t), \boldsymbol{\eta}) &:= \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\xi(t)) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy + \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\dot{\xi}(t)) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy \\ &\quad - \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\xi(s)) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy ds, \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

$$L_M(\boldsymbol{\eta})(t) := \int_{\omega} \varphi^{\alpha\beta}(t) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy, \quad (6.2.21)$$

respectivamente, para todo  $\boldsymbol{\eta} \in V(\omega)$ , c.t.p.  $t \in (0, T)$ , donde recordamos la expresión de la constante  $k = \frac{\lambda + 2\mu}{\theta + \rho}$  definida en (4.4.13) y donde  $\varphi^{\alpha\beta}$  es una función que aparecerá de forma natural en este estudio y cuya definición dependerá de las fuerzas admisibles de la siguiente forma:

$$\varphi^{\alpha\beta}(t) := \int_{-1}^1 \left( F^{\alpha\beta}(t) - \frac{\theta}{\theta + \rho} F^{33}(t) a^{\alpha\beta} + \frac{\theta\Lambda}{\theta + \rho} \int_0^t e^{-k(t-s)} F^{33}(s) ds a^{\alpha\beta} \right) dx_3, \quad (6.2.22)$$

para todo  $t \in [0, T]$ .

**Problema 6.2.8.** Hallar  $\tilde{\xi}(t, \cdot) \in \tilde{V}_M^\#(\omega) \forall t \in [0, T]$  tal que,

$$\begin{aligned} \tilde{B}_M^\#(\tilde{\xi}(t), \tilde{\eta}) &= \tilde{L}_M^\#(\tilde{\eta})(t) \forall \tilde{\eta} \in \tilde{V}_M^\#(\omega), \text{ c.t.p. } t \in (0, T), \\ \tilde{\xi}(0, \cdot) &= \tilde{\xi}_0(\cdot), \end{aligned} \quad (6.2.23)$$

donde  $\tilde{B}_M^\#$  y  $\tilde{L}_M^\#$  son las únicas extensiones de  $H^1(0, T; V(\omega))$  a  $H^1(0, T; \tilde{V}_M^\#(\omega))$  y de  $V(\omega)$  a  $\tilde{V}_M^\#(\omega)$  de los funcionales  $\tilde{B}_M$  y  $\tilde{L}_M$  definidos por

$$\tilde{B}_M(\tilde{\xi}(t), \tilde{\eta}) := B_M(\hat{\xi}(t), \hat{\eta}), \quad (6.2.24)$$

$$\tilde{L}_M(\tilde{\eta})(t) := L_M(\hat{\eta})(t), \quad (6.2.25)$$

para todo  $\hat{\xi} \in \tilde{\xi}$ ,  $\hat{\eta} \in \tilde{\eta}$  y casi todo  $t \in [0, T]$ , con  $\tilde{\xi} \in \{H^1(0, T; V(\omega)/V_0(\omega))\}$ ,  $\tilde{\eta} \in \{V(\omega)/V_0(\omega)\}$  y donde  $B_M : H^1(0, T; V(\omega)) \times V(\omega) \rightarrow \mathbb{R}$  y  $L_M(t) : V(\omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , denotan las funciones definidas en (6.2.20)–(6.2.21), respectivamente.

Ahora que hemos enunciado los problemas, podemos demostrar en los siguientes teoremas que los Problemas 6.2.7 y 6.2.8 están bien definidos y tienen solución única.

**Teorema 6.2.9.** Sean  $\omega$  un dominio en  $\mathbb{R}^2$ ,  $\theta \in \mathcal{C}^2(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$  una aplicación inyectiva tal que los dos vectores  $\alpha_\alpha = \partial_\alpha \theta$  son linealmente independientes en todo punto de  $\bar{\omega}$ . Sean  $\varphi^{\alpha\beta} \in L^2(0, T; L^2(\omega))$  y  $\xi_0 \in V_M^\#(\omega)$ . Entonces el Problema 6.2.7, tiene solución única  $\xi \in H^1(0, T; V_M^\#(\omega))$ . Además, si  $\dot{\varphi}^{\alpha\beta} \in L^2(0, T; L^2(\omega))$ , entonces  $\xi \in H^2(0, T; V_M^\#(\omega))$ .

*Demostración.* Consideremos las formas bilineales  $a, b, c : V_M^\#(\omega) \times V_M^\#(\omega) \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por:

$$\begin{aligned} a(\xi, \eta) &:= \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\xi) \gamma_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy, \\ b(\xi, \eta) &:= \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\xi) \gamma_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy, \\ c(\xi, \eta) &:= \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\xi) \gamma_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy, \end{aligned}$$

para todo  $\xi, \eta \in V_M^\#(\omega)$ . Por tanto, podemos considerar el Problema 6.2.7 en el marco de la formulación (4.3.8)–(4.3.9), ya que  $\varphi^{\alpha\beta} \in L^2(0, T; L^2(\omega))$  y por la elipticidad de los tensores bidimensionales en (4.4.37)–(4.4.38). Por tanto, siguiendo argumentos análogos a los de la demostración del Teorema 4.3.15 y teniendo en cuenta que  $|\cdot|_\omega^M$  (definida en (6.2.5)) denota una norma en el espacio  $V_M^\#(\omega)$ , se obtiene que el Problema 6.2.7 tiene solución única  $\xi \in H^1(0, T; V_M^\#(\omega))$ . Si además, tenemos regularidad adicional para  $\varphi^{\alpha\beta}$ , podemos concluir que  $\xi \in H^2(0, T; V_M^\#(\omega))$ .  $\square$

**Teorema 6.2.10.** Sean  $\omega$  un dominio en  $\mathbb{R}^2$ ,  $\theta \in \mathcal{C}^2(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$  una aplicación inyectiva tal que los dos vectores  $\alpha_\alpha = \partial_\alpha \theta$  son linealmente independientes en todo punto de  $\bar{\omega}$ . Sean  $\varphi^{\alpha\beta} \in L^2(0, T; L^2(\omega))$  y  $\xi_0 \in \tilde{V}_M^\#(\omega)$ . Entonces el Problema 6.2.8, tiene solución única  $\tilde{\xi} \in H^1(0, T; \tilde{V}_M^\#(\omega))$ . Además, si  $\dot{\varphi}^{\alpha\beta} \in L^2(0, T; L^2(\omega))$ , entonces  $\tilde{\xi} \in H^2(0, T; \tilde{V}_M^\#(\omega))$ .



*Demostración.* La demostración de este teorema es análoga a la del Teorema 6.2.9 sustituyendo  $V_M^\#(\omega)$  por el espacio  $\tilde{V}_M^\#(\omega)$ .  $\square$

Ahora, procedamos a enunciar los correspondientes resultados de los problemas desescalados. En vista de los escalados de las incógnitas en (4.2.1), definimos para cada  $\varepsilon > 0$  el campo de desplazamientos límite  $\xi^\varepsilon : \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$\xi^\varepsilon := \xi \text{ en } H^1(0, T; V_M^\#(\omega)). \quad (6.2.26)$$

**Observación 6.2.11.** Nótese que, para las membranas generalizadas, no podemos considerar el desescalado de cada componente por separado al igual que se hizo en el caso de las membranas elípticas (véase el Teorema 5.3.11), ya que la igualdad previa debe entenderse en el espacio abstracto completo  $H^1(0, T; V_M^\#(\omega))$ .

Por tanto, podemos escribir el problema variacional desescalado para una lámina membrana generalizada viscoelástica del primer tipo y el teorema de existencia y unicidad de solución correspondiente:

**Problema 6.2.12.** Hallar  $\xi^\varepsilon(t, \cdot) \in V_M^\#(\omega) \forall t \in [0, T]$  tal que,

$$\begin{aligned} B_M^{\varepsilon}(\xi^\varepsilon(t), \boldsymbol{\eta}) &= L_M^{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta})(t) \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in V_M^\#(\omega), \text{ c.t.p. } t \in (0, T), \\ \xi^\varepsilon(0, \cdot) &= \xi_0^\varepsilon(\cdot), \end{aligned}$$

donde  $B_M^{\varepsilon}$  y  $L_M^{\varepsilon}$  son las únicas extensiones continuas de  $H^1(0, T; V(\omega))$  a  $H^1(0, T; V_M^\#(\omega))$  y de  $V(\omega)$  a  $V_M^\#(\omega)$  de las funciones  $B_M^\varepsilon : H^1(0, T; V(\omega)) \times V(\omega) \rightarrow \mathbb{R}$  y  $L_M^\varepsilon(t) : V(\omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , respectivamente, definidas por:

$$\begin{aligned} B_M^\varepsilon(\xi^\varepsilon(t), \boldsymbol{\eta}) &:= \varepsilon \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau, \varepsilon} \gamma_{\sigma\tau}(\xi^\varepsilon(t)) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy + \varepsilon \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau, \varepsilon} \gamma_{\sigma\tau}(\dot{\xi}^\varepsilon(t)) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy \\ &\quad - \varepsilon \int_0^t e^{-k^\varepsilon(t-s)} \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau, \varepsilon} \gamma_{\sigma\tau}(\xi^\varepsilon(s)) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy ds, \\ L_M^\varepsilon(\boldsymbol{\eta})(t) &:= \int_{\omega} \varphi^{\alpha\beta, \varepsilon}(t) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy, \end{aligned}$$

donde  $a^{\alpha\beta\sigma\tau, \varepsilon}$ ,  $b^{\alpha\beta\sigma\tau, \varepsilon}$  y  $c^{\alpha\beta\sigma\tau, \varepsilon}$  denotan las versiones desescaladas de las componentes contravariantes de los tensores bidimensionales de cuarto orden (5.2.2)–(5.2.4),  $k^\varepsilon$  es la constante definida en (5.2.6) y  $\varphi^{\alpha\beta, \varepsilon}$  es la versión desescalada de la función real (6.2.22), en particular,  $\varphi^{\alpha\beta, \varepsilon} := \varphi^{\alpha\beta}$ .

**Observación 6.2.13.** Recordemos que las definiciones de  $a^{\alpha\beta\sigma\tau, \varepsilon}$ ,  $b^{\alpha\beta\sigma\tau, \varepsilon}$ ,  $c^{\alpha\beta\sigma\tau, \varepsilon}$  y  $k^\varepsilon$  coinciden con sus versiones escaladas introducidas en (4.4.10)–(4.4.13) teniendo en cuenta la hipótesis asumidas para los coeficientes de Lamé y de viscosidad en (4.1.18) y (4.1.19), respectivamente.

**Teorema 6.2.14.** Sean  $\omega$  un dominio en  $\mathbb{R}^2$ ,  $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^2(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$  una aplicación inyectiva tal que los dos vectores  $\mathbf{a}_\alpha = \partial_\alpha \boldsymbol{\theta}$  son linealmente independientes en todo punto de  $\bar{\omega}$ . Sean  $\varphi^{\alpha\beta, \varepsilon} \in L^2(0, T; L^2(\omega))$  y  $\boldsymbol{\xi}_0^\varepsilon \in V_M^\#(\omega)$ . Entonces el Problema 6.2.12, tiene solución única  $\boldsymbol{\xi}^\varepsilon \in H^1(0, T; V_M^\#(\omega))$ . Además, si  $\dot{\varphi}^{\alpha\beta, \varepsilon} \in L^2(0, T; L^2(\omega))$ , entonces  $\boldsymbol{\xi}^\varepsilon \in H^2(0, T; V_M^\#(\omega))$ .

*Demostración.* La demostración sigue argumentos similares a los del Teorema 6.2.9.  $\square$

**Observación 6.2.15.** Análogamente a los desescalados (6.2.26) para una membrana del primer tipo, se tienen las correspondientes igualdades para una membrana de segundo tipo en el espacio  $H^1(0, T; \tilde{V}_M^\#(\omega))$ . Por tanto, se podrían enunciar el Problema 6.2.12 y el Teorema 6.2.14 correspondientes a la membrana generalizada viscoelástica del segundo tipo, pero por simplicidad los omitiremos.

### 6.3. Resultados de convergencia cuando $\varepsilon \rightarrow 0$

En esta sección mostraremos los resultados principales de este capítulo, que consisten en la justificación matemática de los modelos bidimensionales para membranas generalizadas viscoelásticas enunciados en el Problema 6.2.7 (primer tipo) y en el Problema 6.2.8 (segundo tipo). En este estudio, nos centraremos en las membranas generalizadas de primer tipo y comentaremos las diferencias más importantes que permiten obtener los resultados análogos para las de segundo tipo.

Para cada  $\varepsilon > 0$ , supondremos que la condición inicial para las deformaciones linealizadas escaladas es

$$e_{i||j}(\varepsilon)(0, \cdot) = 0, \quad (6.3.1)$$

es decir, el dominio se encuentra en su estado natural sin deformaciones al inicio del periodo de observación.

A continuación, presentaremos una justificación matemática para el modelo bidimensional para una membrana generalizada viscoelástica del primer tipo enunciado en el Problema 6.2.7. Veremos que la incógnita tridimensional escalada  $\mathbf{u}(\varepsilon)$ , solución del Problema 6.2.6, converge cuando  $\varepsilon$  tiende a cero a un límite  $\mathbf{u}$ . Además, podremos identificar el promedio de este límite con la solución  $\boldsymbol{\xi} = \bar{\mathbf{u}}$  del Problema 6.2.7, definido en el conjunto  $\omega$ . Dados  $\mathbf{v} \in L^2(0, T; [L^2(\Omega)]^3)$  y  $\boldsymbol{\eta} \in L^2(0, T; [L^2(\omega)]^3)$ , utilizaremos la notación:

$$|\mathbf{v}|_{T, \Omega}^M := \left( \int_0^T (|\mathbf{v}(t)|_\Omega^M)^2 dt \right)^{1/2}, \quad |\boldsymbol{\eta}|_{T, \omega}^M := \left( \int_0^T (|\boldsymbol{\eta}(t)|_\omega^M)^2 dt \right)^{1/2}.$$

**Teorema 6.3.1.** Supongamos que  $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^3(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$  y sea  $\varepsilon_0$  definido como en el Teorema 4.1.4. Consideremos una familia de láminas membranas generalizadas del primer tipo, de grosor  $2\varepsilon$  que tiende a cero, y teniendo cada una la misma superficie media  $S = \boldsymbol{\theta}(\bar{\omega})$ . Supongamos que están sometidas a una condición de contorno de fijación a lo largo de una parte de la frontera lateral, con el mismo conjunto  $\boldsymbol{\theta}(\gamma_0)$  como su línea curva media y bajo el efecto de unas fuerzas admisibles. Para todo  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , sea  $\mathbf{u}(\varepsilon)$  la solución única del Problema 6.2.6. Entonces, existe  $\mathbf{u} \in H^1(0, T; V_M^\#(\Omega))$  y  $\boldsymbol{\xi} \in H^1(0, T; V_M^\#(\omega))$  tales que:

(a)  $\mathbf{u}(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{u}$  en  $H^1(0, T; V_M^\#(\Omega))$ , cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

(b)  $\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)} := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{u}(\varepsilon) dx_3 \rightarrow \boldsymbol{\xi}$  en  $H^1(0, T; V_M^\#(\omega))$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Además, el promedio  $\bar{\mathbf{u}} := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{u} dx_3 = \boldsymbol{\xi}$  verifica el Problema 6.2.7.

*Demostración.* Seguiremos la misma estructura de la demostración del Teorema 5.6-1, [30]. Por tanto, haremos referencia a algunos argumentos que se aplican de la misma forma a este problema. Dividiremos la demostración en varios pasos enumerados desde (i) hasta (xi).

(i) Existe  $\varepsilon_2$ ,  $0 < \varepsilon_2 \leq \varepsilon_0$  y una constante  $c_0$  tal que para todo  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$ ,

$$|\mathbf{v}|_\Omega^M \leq c_0 \left( \sum_{i,j} |e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v})|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega). \quad (6.3.2)$$

La prueba de este paso se puede consultar en el apartado (i) de la demostración del Teorema 5.6-1, [30], así que la omitiremos.

(ii) *Acotaciones a priori y extracción de sucesiones débilmente convergentes.* Las seminormas  $|\mathbf{u}(\varepsilon)|_{T,\Omega}^M$  y  $|\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}|_{T,\omega}^M$ , las seminormas de las derivadas temporales correspondientes y las normas  $\|\varepsilon \mathbf{u}(\varepsilon)\|_{H^1(0,T;[H^1(\Omega)]^3)}$  y  $|e_{i||j}(\varepsilon)|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}$  están acotadas independientemente de  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$ .

Además, por la definición de los espacios  $V_M^\#(\Omega)$  y  $V_M^\#(\omega)$  en (6.2.6)–(6.2.7), existe una subsucesión, también denotada por  $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ , y existen  $\mathbf{u} \in H^1(0, T; V_M^\#(\Omega))$ ,  $\mathbf{u}^{-1} = (u_i^{-1}) \in H^1(0, T; V(\Omega))$ ,  $e_{i||j} \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$  y  $\boldsymbol{\xi} \in H^1(0, T; V_M^\#(\omega))$  tales que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\varepsilon) &\rightharpoonup \mathbf{u} \text{ en } H^1(0, T; V_M^\#(\Omega)), \\ \varepsilon \mathbf{u}(\varepsilon) &\rightharpoonup \mathbf{u}^{-1} \text{ en } H^1(0, T; [H^1(\Omega)]^3) \\ \text{por tanto, } \varepsilon \mathbf{u}(\varepsilon) &\rightarrow \mathbf{u}^{-1} \text{ en } H^1(0, T; [L^2(\Omega)]^3), \\ e_{i||j}(\varepsilon) &\rightharpoonup e_{i||j} \text{ en } H^1(0, T; L^2(\Omega)), \\ \partial_3 u_3(\varepsilon) = \varepsilon e_{3||3}(\varepsilon) &\rightarrow 0 \text{ en } H^1(0, T; L^2(\Omega)), \\ \overline{\mathbf{u}(\varepsilon)} &\rightharpoonup \boldsymbol{\xi} \text{ en } H^1(0, T; V_M^\#(\omega)), \end{aligned}$$

cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Tomando  $\mathbf{v} = \mathbf{u}(\varepsilon)$  en (6.2.18), se tiene que

$$\int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx = L(\varepsilon)(\mathbf{u}(\varepsilon)),$$

*c.p.d.* en  $(0, T)$ . Integrando sobre el intervalo  $[0, T]$ , utilizando (4.2.11) y (6.3.1) obtenemos que

$$\int_0^T \left( \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \right) dt \leq \int_0^T L(\varepsilon)(t)(\mathbf{u}(\varepsilon)) dt. \quad (6.3.3)$$

Por un lado, por (6.2.16) y la desigualdad de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned} \int_0^T L(\varepsilon)(\mathbf{u}(\varepsilon))(t) dt &\leq \tilde{K}_0 \int_0^T \left( \sum_{i,j} |e_{i||j}(\varepsilon)|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} dt \\ &\leq \tilde{K}_0 \sqrt{T} \left( \int_0^T \left( \sum_{i,j} |e_{i||j}(\varepsilon)|_{0,\Omega}^2 \right) dt \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

siendo  $\tilde{K}_0 := \int_0^T K_0(t) dt > 0$  (una constante dependiente de las normas  $\|F^{ij}(\varepsilon)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$ ).

Por otro lado, por (4.3.2), (4.2.10) y el paso (i) tenemos que

$$\begin{aligned} c_0^{-2} C_e^{-1} g_0^{1/2} (|\mathbf{u}(\varepsilon)|_{T,\Omega}^M)^2 &\leq C_e^{-1} g_0^{1/2} \int_0^T \left( \sum_{i,j} |e_{i||j}(\varepsilon)|_{0,\Omega}^2 \right) dt \\ &\leq \int_0^T \left( \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \right) dt. \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

Ahora bien, (6.3.3)–(6.3.5) juntos implican que  $\|e_{i||j}(\varepsilon)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$  está acotado y, como consecuencia,  $|\mathbf{u}(\varepsilon)|_{T,\Omega}^M$  y  $|\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}|_{T,\omega}^M \leq |\mathbf{u}(\varepsilon)|_{T,\Omega}^M$  lo están también. Por la desigualdad de tipo Korn en el Teorema 6.1.5, se sigue que  $\|\varepsilon \mathbf{u}(\varepsilon)\|_{L^2(0,T,[H^1(\Omega)]^3)}$  está acotado.

Consideremos ahora  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}(\varepsilon)$  en (6.2.18), entonces,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) \dot{e}_{k||l}(\varepsilon) \dot{e}_{i||j}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx = L(\varepsilon)(\dot{\mathbf{u}}(\varepsilon)),$$

*c.p.d.* en  $(0, T)$ . Integrando sobre el intervalo  $[0, T]$ , utilizando (4.2.10) y (6.3.1) obtenemos que

$$\int_0^T \left( \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) \dot{e}_{k||l}(\varepsilon) \dot{e}_{i||j}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \right) dt \leq \int_0^T L(\varepsilon)(t)(\dot{\mathbf{u}}(\varepsilon)) dt, \quad (6.3.6)$$

que es análogo a (6.3.3) con las componentes contravariantes del tensor de viscosidad en lugar de los de elasticidad. Por tanto, utilizando argumentos similares y (4.2.11), se tiene que  $\|\dot{e}_{i||j}(\varepsilon)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$  están acotados y, como consecuencia,  $|\dot{\mathbf{u}}(\varepsilon)|_{T,\Omega}^M$  y  $|\overline{\dot{\mathbf{u}}(\varepsilon)}|_{T,\omega}^M \leq |\dot{\mathbf{u}}(\varepsilon)|_{T,\Omega}^M$  también lo están. Por la desigualdad de tipo Korn en el Teorema 6.1.5, se sigue que  $\|\varepsilon \dot{\mathbf{u}}(\varepsilon)\|_{L^2(0,T,[H^1(\Omega)]^3)}$  está acotado. Por tanto, hemos verificado las acotaciones *a priori* y las convergencias anunciadas en este paso.

(iii) *Obtenemos las expresiones para los límites  $e_{i||j}$  del paso anterior.*

Sea  $\mathbf{v} = (v_i) \in V(\Omega)$ . Entonces, por las definiciones (4.2.6)–(4.2.8), se tiene que

$$\begin{aligned}\varepsilon e_{\alpha||\beta}(\varepsilon; \mathbf{v}) &\rightarrow 0 \text{ en } L^2(\Omega), \\ \varepsilon e_{\alpha||3}(\varepsilon; \mathbf{v}) &\rightarrow \frac{1}{2} \partial_3 v_\alpha \text{ en } L^2(\Omega), \\ \varepsilon e_{3||3}(\varepsilon; \mathbf{v}) &= \partial_3 v_3 \text{ para todo } \varepsilon > 0.\end{aligned}$$

Tomando  $\mathbf{v} = \varepsilon \mathbf{v} \in V(\Omega)$  en (6.2.18), obtenemos que

$$\begin{aligned}& \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) (\varepsilon e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon, \mathbf{v})) \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) (\varepsilon \dot{e}_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon, \mathbf{v})) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\&= \int_{\Omega} (A^{\alpha\beta\sigma\tau}(\varepsilon) e_{\sigma||\tau}(\varepsilon) + A^{\alpha\beta 33}(\varepsilon) e_{3||3}(\varepsilon)) (\varepsilon e_{\alpha||\beta}(\varepsilon; \mathbf{v})) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\&+ \int_{\Omega} (4A^{\alpha 3\sigma 3}(\varepsilon) e_{\sigma||3}(\varepsilon)) (\varepsilon e_{\alpha||3}(\varepsilon; \mathbf{v})) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\&+ \int_{\Omega} (A^{33\sigma\tau}(\varepsilon) e_{\sigma||\tau}(\varepsilon) + A^{3333}(\varepsilon) e_{3||3}(\varepsilon)) (\varepsilon e_{3||3}(\varepsilon; \mathbf{v})) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\&+ \int_{\Omega} (B^{\alpha\beta\sigma\tau}(\varepsilon) \dot{e}_{\sigma||\tau}(\varepsilon) + B^{\alpha\beta 33}(\varepsilon) \dot{e}_{3||3}(\varepsilon)) (\varepsilon e_{\alpha||\beta}(\varepsilon; \mathbf{v})) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\&+ \int_{\Omega} (4B^{\alpha 3\sigma 3}(\varepsilon) \dot{e}_{\sigma||3}(\varepsilon)) (\varepsilon e_{\alpha||3}(\varepsilon; \mathbf{v})) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\&+ \int_{\Omega} (B^{33\sigma\tau}(\varepsilon) \dot{e}_{\sigma||\tau}(\varepsilon) + B^{3333}(\varepsilon) \dot{e}_{3||3}(\varepsilon)) (\varepsilon e_{3||3}(\varepsilon; \mathbf{v})) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\&= \int_{\Omega} F^{\alpha\beta}(\varepsilon) (\varepsilon e_{\alpha||\beta}(\varepsilon; \mathbf{v})) \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \int_{\Omega} 2F^{\alpha 3}(\varepsilon) (\varepsilon e_{\alpha||3}(\varepsilon; \mathbf{v})) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\&+ \int_{\Omega} F^{33}(\varepsilon) (\varepsilon e_{3||3}(\varepsilon; \mathbf{v})) \sqrt{g(\varepsilon)} dx, \text{ c.p.d. en } (0, T).\end{aligned}$$

Tomemos  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Como consecuencia del comportamiento asintótico de  $\varepsilon e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v})$ , de las funciones  $g(\varepsilon)$  y  $A^{ijkl}(\varepsilon)$  y  $B^{ijkl}(\varepsilon)$  (véanse los Teoremas 4.3.1 y 4.2.2, respectivamente) y las convergencias débiles obtenidas en (ii), deducimos que

$$\begin{aligned}& \int_{\Omega} (2\mu a^{\alpha\sigma} e_{\alpha||3} \partial_3 v_\sigma + (\lambda + 2\mu) e_{3||3} \partial_3 v_3) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} \lambda a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta} \partial_3 v_3 \sqrt{a} dx \\&+ \int_{\Omega} (\rho a^{\alpha\sigma} \dot{e}_{\alpha||3} \partial_3 v_\sigma + (\theta + \rho) \dot{e}_{3||3} \partial_3 v_3) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} \theta a^{\alpha\beta} \dot{e}_{\alpha||\beta} \partial_3 v_3 \sqrt{a} dx \\&= \int_{\Omega} (F^{\alpha 3} \partial_3 v_\alpha + F^{33} \partial_3 v_3) \sqrt{a} dx, \text{ c.t.p. } t \in (0, T).\end{aligned} \tag{6.3.7}$$

Si tomamos  $\mathbf{v} \in V(\Omega)$  con  $v_3$  independiente de  $x_3$ , se tiene que

$$\int_{\Omega} 2\mu a^{\alpha\sigma} e_{\alpha||3} \partial_3 v_\sigma \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} \rho a^{\alpha\sigma} \dot{e}_{\alpha||3} \partial_3 v_\sigma \sqrt{a} dx = \int_{\Omega} F^{\alpha 3} \partial_3 v_\alpha \sqrt{a} dx.$$

Entonces, por el Teorema 4.3.4 esta ecuación nos conduce a

$$2\mu a^{\alpha\sigma} e_{\alpha||3} + \rho a^{\alpha\sigma} \dot{e}_{\alpha||3} = F^{\sigma 3}, \quad (6.3.8)$$

y como  $(a_{\alpha\sigma})^{-1} = a^{\alpha\sigma}$ , obtenemos la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$2\mu e_{\alpha||3} + \rho \dot{e}_{\alpha||3} = a_{\alpha\sigma} F^{\sigma 3}. \quad (6.3.9)$$

**Observación 6.3.2.** Nótese que si eliminamos la dependencia temporal y la viscosidad, es decir  $\rho = 0$  esta ecuación se reduce a la misma estudiada en [30] (véase el Capítulo 5, página 272), esto es, el caso elástico.

Para resolver la ecuación (6.3.9) en el caso más interesante, asumiremos que el coeficiente de viscosidad  $\rho$  es estrictamente positivo. De esta forma, se puede probar que esta ecuación es equivalente a

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( e^{\frac{2\mu}{\rho}t} e_{\alpha||3}(t) \right) = \frac{1}{\rho} a_{\alpha\sigma} e^{\frac{2\mu}{\rho}t} F^{\sigma 3}(t).$$

Integrando con respecto a la variable temporal y utilizando (6.3.1) se tiene que,

$$e_{\alpha||3}(t) = \frac{1}{\rho} a_{\alpha\sigma} \int_0^t e^{-\frac{2\mu}{\rho}(t-s)} F^{\sigma 3}(s) ds \text{ en } \Omega, \forall t \in [0, T]. \quad (6.3.10)$$

Además, de (6.3.9) deducimos que,

$$\dot{e}_{\alpha||3}(t) = \frac{1}{\rho} (a_{\alpha\sigma} F^{\sigma 3}(t) - 2\mu e_{\alpha||3}(t)) \text{ en } \Omega, \text{ c.t.p. } t \in (0, T).$$

Tomemos ahora un  $\mathbf{v} \in V(\Omega)$  tal que  $v_\alpha = 0$ , en (6.3.7). Entonces, se obtiene que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\lambda + 2\mu) e_{3||3} \partial_3 v_3 \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} \lambda a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta} \partial_3 v_3 \sqrt{a} dx \\ & + \int_{\Omega} (\theta + \rho) \dot{e}_{3||3} \partial_3 v_3 \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} \theta a^{\alpha\beta} \dot{e}_{\alpha||\beta} \partial_3 v_3 \sqrt{a} dx = \int_{\Omega} F^{33} \partial_3 v_3 \sqrt{a} dx. \end{aligned} \quad (6.3.11)$$

Aplicando el Teorema 4.3.4, obtenemos la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\lambda a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta} + (\lambda + 2\mu) e_{3||3} + \theta a^{\alpha\beta} \dot{e}_{\alpha||\beta} + (\theta + \rho) \dot{e}_{3||3} = F^{33}. \quad (6.3.12)$$

**Observación 6.3.3.** Una vez más, eliminando la dependencia temporal y la viscosidad, es decir  $\theta = \rho = 0$ , esta ecuación se reduce a la misma estudiada en [30] (véase la página 272), esto es, el caso elástico.

Para resolver la ecuación (6.3.12) en el caso de mayor interés, asumiremos que el coeficiente de viscosidad  $\theta$  es estrictamente positivo. De esta forma, se puede probar que esta ecuación es equivalente a

$$\theta e^{-\frac{\lambda}{\theta}t} \frac{\partial}{\partial t} \left( a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}(t) e^{\frac{\lambda}{\theta}t} \right) = F^{33}(t) - (\theta + \rho) e^{-\frac{\lambda+2\mu}{\theta+\rho}t} \frac{\partial}{\partial t} \left( e_{3||3}(t) e^{\frac{\lambda+2\mu}{\theta+\rho}t} \right). \quad (6.3.13)$$

Integrando con respecto a la variable temporal y utilizando (6.3.1) se tiene que,

$$e_{3||3}(t) e^{\frac{\lambda+2\mu}{\theta+\rho}t} = \frac{1}{\theta + \rho} \int_0^t e^{\frac{\lambda+2\mu}{\theta+\rho}s} F^{33}(s) ds - \frac{\theta}{\theta + \rho} \int_0^t e^{(\frac{\lambda+2\mu}{\theta+\rho} - \frac{\lambda}{\theta})t} \frac{\partial}{\partial s} \left( a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}(s) e^{\frac{\lambda}{\theta}s} \right) ds,$$

que, integrando por partes y simplificando, nos conduce a

$$e_{3||3}(t) = \frac{1}{\theta + \rho} \int_0^t e^{-k(t-s)} F^{33}(s) ds - \frac{\theta}{\theta + \rho} \left( a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}(t) + \Lambda \int_0^t e^{-k(t-s)} a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}(s) ds \right),$$

en  $\Omega$ ,  $\forall t \in [0, T]$ , con  $\Lambda$  y  $k$  definidos en (4.4.13). Además, de (6.3.12) deducimos que,

$$\dot{e}_{3||3}(t) = \frac{1}{\theta + \rho} F^{33}(t) - \frac{\lambda}{\theta + \rho} a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}(t) - \frac{\lambda + 2\mu}{\theta + \rho} e_{3||3}(t) - \frac{\theta}{\theta + \rho} a^{\alpha\beta} \dot{e}_{\alpha||\beta}(t),$$

en  $\Omega$ , c.t.p.  $t \in (0, T)$ .

(iv) La familia  $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  verifica

$$\left( \overline{e_{\alpha||\beta}(\varepsilon)} - \gamma_{\alpha\beta}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}) \right) \rightarrow 0 \text{ en } H^1(0, T; L^2(\omega)) \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (6.3.14)$$

Como consecuencia, la subsucesión considerada en (ii) verifica que

$$\gamma_{\alpha\beta}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}) \rightarrow \overline{e_{\alpha||\beta}} \text{ en } H^1(0, T; L^2(\omega)). \quad (6.3.15)$$

Tomando  $\mathbf{v} = \mathbf{u}(\varepsilon)$  en (4.2.6), integrando con respecto a  $x_3$  en  $[-1, 1]$  y tomando  $\boldsymbol{\eta} = \overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}$  en (4.4.6) se tiene que,

$$\overline{e_{\alpha||\beta}(\varepsilon)} - \gamma_{\alpha\beta}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}) = -\overline{\Gamma_{\alpha\beta}^p(\varepsilon) u_p(\varepsilon)} + \overline{\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma u_\sigma(\varepsilon)} + \overline{b_{\alpha\beta} u_3(\varepsilon)}.$$

Entonces por el comportamiento asintótico de  $\Gamma_{\alpha\beta}^p(\varepsilon)$  (véase el Teorema 4.3.1) se deduce que

$$\overline{e_{\alpha||\beta}(\varepsilon)} - \gamma_{\alpha\beta}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}) = -\overline{\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma,2}(\varepsilon) u_\sigma(\varepsilon)} + \overline{\varepsilon x_3 b_{\beta}^\sigma |_\alpha u_\sigma(\varepsilon)} + \overline{\varepsilon x_3 b_\alpha^\sigma b_{\sigma\beta} u_3(\varepsilon)} \quad (6.3.16)$$

donde las funciones

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma,2}(\varepsilon) := \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma(\varepsilon) - (\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma - \varepsilon x_3 b_\beta^\sigma |_\alpha),$$

verifican que

$$\|\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma,2}(\varepsilon)\|_{0,\infty,\bar{\Omega}} \leq c_2 \varepsilon^2,$$



para todo  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  y una constante  $c_2 > 0$ . Ahora bien, por el apartado (a) del Teorema 5.1.1 y la relación  $\overline{x_3 v} = \frac{1}{2}(1 - x_3^2) \partial_3 v$  (que se verifica para  $v \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$  y por tanto, se puede extender a elementos  $v \in [H^1(\Omega)]^3$  por el apartado (b) del Teorema 5.1.1), se tiene que

$$\|\overline{x_3 v}\|_{H^1(0,T;L^2(\omega))} = \frac{1}{2} \left\| \overline{(1 - x_3^2) \partial_3 v} \right\|_{H^1(0,T;L^2(\omega))} \leq c_3 \|\partial_3 v\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))},$$

con una constante  $c_3 > 0$ . Entonces, deducimos de (6.3.16) que existe una constante  $c_4 > 0$  tal que

$$\left\| \overline{e_{\alpha||\beta}(\varepsilon)} - \gamma_{\alpha\beta}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}) \right\|_{H^1(0,T;L^2(\omega))} \leq c_4 \varepsilon \left( \sum_{\alpha} \|\varepsilon u_{\alpha}(\varepsilon)\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))} + \sum_i \|\partial_3 u_i(\varepsilon)\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))} \right).$$

Ahora, dado que la norma  $\|\varepsilon \mathbf{u}(\varepsilon)\|_{H^1(0,T;[H^1(\Omega)]^3)}$  y la seminorma  $|\mathbf{u}(\varepsilon)|_{T,\omega}^M$  están acotadas por el paso (ii), podemos concluir la convergencia anunciada en este paso para toda la familia  $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ .

(v) *Obtenemos las ecuaciones que verifican los límites  $e_{\alpha||\beta}$  encontrados en el paso (ii).*

Sea  $\mathbf{v} = (v_i) \in V(\Omega)$  independiente de la variable transversal  $x_3$ . Entonces, por las definiciones (4.2.6)–(4.2.8), se tiene que

$$\begin{aligned} e_{\alpha||\beta}(\varepsilon; \mathbf{v}) &\rightarrow \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \text{ en } L^2(\Omega), \\ e_{\alpha||3}(\varepsilon; \mathbf{v}) &\rightarrow \frac{1}{2} \partial_{\alpha} v_3 + b_{\alpha}^{\sigma} v_{\sigma} \text{ en } L^2(\Omega), \\ e_{3||3}(\varepsilon; \mathbf{v}) &= 0 \text{ para todo } \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Consideremos esa función  $\mathbf{v} \in V(\Omega)$  en (6.2.18). Tomando el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , deducimos del miembro de la derecha que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L(\varepsilon)(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \left( F^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) + 2F^{\alpha 3} \left( \frac{1}{2} \partial_{\alpha} v_3 + b_{\alpha}^{\sigma} v_{\sigma} \right) \right) \sqrt{a} dx. \quad (6.3.17)$$

Veamos que ocurre con el miembro de la izquierda. Por el comportamiento asintótico de las funciones  $g(\varepsilon)$  y  $A^{ijkl}(\varepsilon)$  y  $B^{ijkl}(\varepsilon)$  (véanse los Teoremas 4.3.1 y 4.2.2, respectivamente), las convergencias de  $e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v})$  vistas al inicio de este paso y las convergencias débiles de  $e_{i||j}(\varepsilon) \rightharpoonup e_{i||j}$  en  $H^1(0,T;L^2(\Omega))$  del paso (ii), se obtiene que,

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v}) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} B^{ijkl}(0) \dot{e}_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v}) \sqrt{a} dx \\ &= \int_{\Omega} (\lambda a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma})) e_{\sigma||\tau} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \lambda a^{\alpha\beta} e_{3||3} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} 4\mu a^{\alpha\sigma} e_{\sigma||3} \left( \frac{1}{2} \partial_{\alpha} v_3 + b_{\alpha}^{\tau} v_{\tau} \right) \sqrt{a} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega} \left( \theta a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \frac{\rho}{2} (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \right) \dot{e}_{\sigma||\tau} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx \\
& + \int_{\Omega} \theta a^{\alpha\beta} \dot{e}_{3||3} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} 2\rho a^{\alpha\sigma} \dot{e}_{\sigma||3} \left( \frac{1}{2} \partial_{\alpha} v_3 + b_{\alpha}^{\tau} v_{\tau} \right) \sqrt{a} dx, \tag{6.3.18}
\end{aligned}$$

expresión que, utilizando las relaciones estudiadas en el paso (iii), conduce a

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left( \left( \lambda - \frac{\theta}{\theta + \rho} (\theta\Lambda + \lambda) \right) a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \right) e_{\sigma||\tau} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx \\
& + \int_{\Omega} \frac{\theta\Lambda}{\theta + \rho} \left( \int_0^t e^{-k(t-s)} F^{33}(s) ds \right) a^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx \\
& + \int_{\Omega} \left( \frac{\theta\rho}{\theta + \rho} a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \frac{\rho}{2} (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \right) \dot{e}_{\sigma||\tau} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx \\
& + \int_{\Omega} \frac{\theta}{\theta + \rho} F^{33} a^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx - \int_{\Omega} \frac{(\theta\Lambda)^2}{\theta + \rho} \left( \int_0^t e^{-k(t-s)} a^{\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}(s) ds \right) a^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx \\
& + \int_{\Omega} 2F^{\alpha 3} \left( \frac{1}{2} \partial_{\alpha} v_3 + b_{\alpha}^{\sigma} v_{\sigma} \right) \sqrt{a} dx.
\end{aligned}$$

Entonces, simplificando la expresión anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\Omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} e_{\sigma||\tau} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \dot{e}_{\sigma||\tau} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx \\
& - \frac{1}{2} \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\Omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}(s) \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx ds \\
& + \int_{\Omega} \frac{\theta\Lambda}{\theta + \rho} \left( \int_0^t e^{-k(t-s)} F^{33}(s) ds \right) a^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx \\
& + \int_{\Omega} \frac{\theta}{\theta + \rho} F^{33} a^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} 2F^{\alpha 3} \left( \frac{1}{2} \partial_{\alpha} v_3 + b_{\alpha}^{\sigma} v_{\sigma} \right) \sqrt{a} dx,
\end{aligned}$$

donde  $a^{\alpha\beta\sigma\tau}$ ,  $b^{\alpha\beta\sigma\tau}$  y  $c^{\alpha\beta\sigma\tau}$  denotan las componentes contravariantes de los tensores de cuarto orden bidimensionales definidos en (4.4.10)–(4.4.12). Por tanto, esta expresión junto con (6.3.17) nos conduce a

$$\begin{aligned}
& \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \overline{e_{\sigma||\tau}} \gamma_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{v}}) \sqrt{a} dy + \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \dot{\overline{e_{\sigma||\tau}}} \gamma_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{v}}) \sqrt{a} dy \\
& - \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \overline{e_{\sigma||\tau}(s)} \gamma_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{v}}) \sqrt{a} dy ds \\
& = \int_{\omega} \int_{-1}^1 F^{\alpha\beta} dx_3 \gamma_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{v}}) \sqrt{a} dy - \int_{\omega} \int_{-1}^1 \frac{\theta\Lambda}{\theta + \rho} \left( \int_0^t e^{-k(t-s)} F^{33}(s) ds \right) a^{\alpha\beta} dx_3 \gamma_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{v}}) \sqrt{a} dy \\
& - \int_{\omega} \int_{-1}^1 \frac{\theta}{\theta + \rho} F^{33} a^{\alpha\beta} dx_3 \gamma_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{v}}) \sqrt{a} dy = \int_{\omega} \varphi^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{v}}) \sqrt{a} dy,
\end{aligned}$$

donde  $\varphi^{\alpha\beta}$  denota la función real definida en (6.2.22). Ahora bien, dado  $\boldsymbol{\eta} \in V(\omega)$ , existe una función  $\mathbf{v} \in V(\Omega)$  independiente de  $x_3$  tal que  $\bar{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\eta}$ . Por tanto, se verifica la relación:

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \overline{e_{\sigma||\tau}} \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy + \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \overline{e_{\sigma||\tau}} \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy \\ & - \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \overline{e_{\sigma||\tau}(s)} \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy ds = \int_{\omega} \varphi^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy, \end{aligned} \quad (6.3.19)$$

para todo  $\boldsymbol{\eta} \in V(\omega)$ , c.t.p.  $t \in (0, T)$ .

(vi) La subsucesión  $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  de (ii) verifica que

$$\begin{aligned} \varepsilon \mathbf{u}(\varepsilon) &\rightharpoonup \mathbf{0} \text{ en } H^1(0, T; [H^1(\Omega)]^3), \\ \partial_3 u_{\alpha}(\varepsilon) &\rightharpoonup 0 \text{ en } H^1(0, T; L^2(\Omega)), \end{aligned}$$

cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Además, las componentes  $e_{\alpha||\beta}$  son independientes de la variable transversal  $x_3$ .

Por el paso (ii) las funciones  $\mathbf{u}^{-1}(\varepsilon) := \varepsilon \mathbf{u}(\varepsilon) \in H^1(0, T; V(\Omega))$  verifican

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{-1}(\varepsilon) &\rightharpoonup \mathbf{u}^{-1} \text{ en } H^1(0, T; [H^1(\Omega)]^3) \\ \text{y por tanto } \mathbf{u}^{-1}(\varepsilon) &\rightarrow \mathbf{u}^{-1} \text{ en } H^1(0, T; [L^2(\Omega)]^3), \end{aligned} \quad (6.3.20)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{u}^{-1}(\varepsilon)) \rightarrow e_{i||j} \text{ en } H^1(0, T; L^2(\Omega)). \quad (6.3.21)$$

Entonces, por el Teorema 6.1.3,  $\overline{\mathbf{u}^{-1}} \in V_F(\omega)$  y como consecuencia  $\overline{\mathbf{u}^{-1}} = \mathbf{0}$ , ya que por hipótesis  $V_F(\omega) = \{\mathbf{0}\}$ . Por el mismo resultado, se tiene que  $\mathbf{u}^{-1}$  es independiente de  $x_3$ , por tanto  $\mathbf{u}^{-1} = \mathbf{0}$  y así, obtenemos la primera convergencia. Además, se tiene que  $\varepsilon \mathbf{u}(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{0}$  en  $H^1(0, T; [L^2(\Omega)]^3)$ . Ahora bien, por (4.2.7) tenemos que

$$\partial_3 u_{\alpha}(\varepsilon) = 2\varepsilon e_{\alpha||3}(\varepsilon) - \varepsilon \partial_{\alpha} u_3(\varepsilon) + 2\varepsilon \Gamma_{\alpha 3}^{\sigma}(\varepsilon) u_{\sigma}(\varepsilon).$$

Por tanto, teniendo en cuenta las convergencias en el paso (ii), la ya obtenida en este paso y la acotación de la sucesión  $(\Gamma_{\alpha 3}^{\sigma}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  en  $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$  por el Teorema 4.1.12, obtenemos que  $\partial_3 u_{\alpha}(\varepsilon) \rightharpoonup 0$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$ . Además, como  $\mathbf{u}^{-1} = \mathbf{0}$  por (6.3.20)–(6.3.21) y tomando  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{-1}$  en el Teorema 6.1.3, se tiene que  $\partial_3 e_{\alpha||\beta} = -\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^{-1}) = 0$ . Por tanto, las funciones  $e_{\alpha||\beta}$  son independientes de  $x_3$ .

(vii) Se verifican las siguientes convergencias fuertes,

$$\begin{aligned} e_{i||j}(\varepsilon) &\rightarrow e_{i||j} \text{ en } H^1(0, T; L^2(\Omega)), \\ \varepsilon \mathbf{u}(\varepsilon) &\rightarrow \mathbf{0} \text{ en } H^1(0, T; [H^1(\Omega)]^3), \\ \gamma_{\alpha\beta}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}) &\rightarrow \overline{e_{\alpha||\beta}} \text{ en } H^1(0, T; L^2(\omega)), \\ \overline{\mathbf{u}(\varepsilon)} &\rightarrow \boldsymbol{\xi} \text{ en } H^1(0, T; V_M^{\#}(\omega)), \end{aligned}$$

cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Definamos,

$$\begin{aligned}\Psi(\varepsilon) &:= \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon)(e_{k||l}(\varepsilon) - e_{k||l})(e_{i||j}(\varepsilon) - e_{i||j})\sqrt{g(\varepsilon)}dx \\ &\quad + \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon)(\dot{e}_{k||l}(\varepsilon) - \dot{e}_{k||l})(e_{i||j}(\varepsilon) - e_{i||j})\sqrt{g(\varepsilon)}dx \\ &= L(\varepsilon)(\mathbf{u}(\varepsilon)) - \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon)(2e_{k||l}(\varepsilon) - e_{k||l})e_{i||j}\sqrt{g(\varepsilon)}dx \\ &\quad + \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon)(\dot{e}_{k||l}e_{i||j} - \frac{\partial}{\partial t}(e_{k||l}(\varepsilon)e_{i||j}))\sqrt{g(\varepsilon)}dx, \text{ c.p.d. en } (0, T).\end{aligned}$$

Por un lado, tenemos que

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon)(e_{k||l}(\varepsilon) - e_{k||l})(e_{i||j}(\varepsilon) - e_{i||j})\sqrt{g(\varepsilon)}dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon)(e_{k||l}(\varepsilon) - e_{k||l})(e_{i||j}(\varepsilon) - e_{i||j})\sqrt{g(\varepsilon)}dx = \Psi(\varepsilon), \text{ c.t.p. } t \in (0, T).\end{aligned}$$

Integrando en el intervalo  $[0, T]$ , utilizando (4.2.11) y (6.3.1) hallamos que

$$\int_0^T \left( \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon)(e_{k||l}(\varepsilon) - e_{k||l})(e_{i||j}(\varepsilon) - e_{i||j})\sqrt{g(\varepsilon)}dx \right) dt \leq \int_0^T \Psi(\varepsilon)dt. \quad (6.3.22)$$

Ahora, por (4.3.2) y (4.2.10) obtenemos que

$$C_e^{-1} g_0^{1/2} \sum_{i,j} |e_{i||j}(\varepsilon) - e_{i||j}|_{0,\Omega}^2 \leq \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon)(e_{k||l}(\varepsilon) - e_{k||l})(e_{i||j}(\varepsilon) - e_{i||j})\sqrt{g(\varepsilon)}dx.$$

Por tanto, junto con la desigualdad anterior, se tiene que

$$C_e^{-1} g_0^{1/2} \int_0^T \left( \sum_{i,j} |e_{i||j}(\varepsilon) - e_{i||j}|_{0,\Omega}^2 \right) dt \leq \int_0^T \Psi(\varepsilon)dt.$$

Por otra parte, las convergencias fuertes  $F^{ij}(\varepsilon) \rightarrow F^{ij}$  en  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  asumidas por hipótesis y las convergencias débiles  $e_{i||j}(\varepsilon) \rightharpoonup e_{i||j}$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  de (ii) implican que

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L(\varepsilon)(\mathbf{u}(\varepsilon)) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\Omega} F^{\alpha\beta}(\varepsilon)e_{\alpha||\beta}(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)}dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} (2F^{\alpha 3}(\varepsilon)e_{\alpha||3}(\varepsilon) + F^{33}(\varepsilon)e_{3||3})\sqrt{g(\varepsilon)}dx \right)\end{aligned}$$

$$= \int_{\Omega} F^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta} \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} (2F^{\alpha 3} e_{\alpha||3} + F^{33} e_{3||3}) \sqrt{a} dx, \quad (6.3.23)$$

*c.p.d.* en  $(0, T)$ . Ahora bien, por el comportamiento asintótico de las funciones  $g(\varepsilon)$  y las componentes contravariantes de los tensores de cuarto orden  $A^{ijkl}(\varepsilon)$  y  $B^{ijkl}(\varepsilon)$  (véanse los Teoremas 4.3.1 y 4.2.2, respectivamente), se tiene que

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) (2e_{k||l}(\varepsilon) - e_{k||l}) e_{i||j} \sqrt{g(\varepsilon)} dx \right. \\ & \quad \left. - \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) (\dot{e}_{k||l} e_{i||j} - \frac{\partial}{\partial t} (e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j})) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \right) \\ &= \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||l} e_{i||j} \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} B^{ijkl}(0) \dot{e}_{k||l} e_{i||j} \sqrt{a} dx \\ &= \int_{\Omega} (\lambda a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma})) e_{\sigma||\tau} e_{\alpha||\beta} \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} \lambda a^{\alpha\beta} e_{3||3} e_{\alpha||\beta} \sqrt{a} dx \\ & \quad + \int_{\Omega} 4\mu a^{\alpha\sigma} e_{\sigma||3} e_{\alpha||3} \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} (\lambda a^{\sigma\tau} e_{\sigma||\tau} + (\lambda + 2\mu) e_{3||3}) e_{3||3} \sqrt{a} dx \\ & \quad + \int_{\Omega} \left( \theta a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \frac{\rho}{2} (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \right) \dot{e}_{\sigma||\tau} e_{\alpha||\beta} \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} \theta a^{\alpha\beta} \dot{e}_{3||3} e_{\alpha||\beta} \sqrt{a} dx \\ & \quad + \int_{\Omega} 2\rho a^{\alpha\sigma} \dot{e}_{\sigma||3} e_{\alpha||3} \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} (\theta a^{\sigma\tau} \dot{e}_{\sigma||\tau} + (\theta + \rho) \dot{e}_{3||3}) e_{3||3} \sqrt{a} dx, \end{aligned}$$

expresión que, sustituyendo los resultados obtenidos en el paso (iii) y simplificando, conduce a

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \overline{e_{\sigma||\tau}} \overline{e_{\alpha||\beta}} \sqrt{a} dy + \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \overline{\dot{e}_{\sigma||\tau}} \overline{e_{\alpha||\beta}} \sqrt{a} dy - \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \overline{e_{\sigma||\tau}(s)} \overline{e_{\alpha||\beta}} \sqrt{a} dy ds \\ & \quad + \int_{\omega} \int_{-1}^1 \left( \frac{\theta}{\theta + \rho} F^{33} a^{\alpha\beta} + \frac{\theta \Lambda}{\theta + \rho} \int_0^t e^{-k(t-s)} F^{33}(s) ds a^{\alpha\beta} \right) dx_3 \overline{e_{\alpha||\beta}} \sqrt{a} dy \\ & \quad + \int_{\Omega} (2F^{\alpha 3} e_{\alpha||3} + F^{33} e_{3||3}) \sqrt{a} dx. \end{aligned}$$

Por tanto, junto con (6.3.23), tenemos que

$$\begin{aligned} \Psi := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Psi(\varepsilon) &= \int_{\omega} \varphi^{\alpha\beta} \overline{e_{\alpha||\beta}} \sqrt{a} dy - \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \overline{e_{\sigma||\tau}} \overline{e_{\alpha||\beta}} \sqrt{a} dy - \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \overline{\dot{e}_{\sigma||\tau}} \overline{e_{\alpha||\beta}} \sqrt{a} dy \\ & \quad + \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \overline{e_{\sigma||\tau}(s)} \overline{e_{\alpha||\beta}} \sqrt{a} dy ds, \end{aligned} \quad (6.3.24)$$

con  $\varphi^{\alpha\beta}$  definida en (6.2.22). Ahora bien, como  $\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)} \in V(\omega)$ , para cada  $\varepsilon > 0$ , podemos tomar  $\boldsymbol{\eta} = \overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}$  en (6.3.19) y obtener que

$$\int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \overline{e_{\sigma||\tau}} \gamma_{\alpha\beta}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}) \sqrt{a} dy + \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \overline{\dot{e}_{\sigma||\tau}} \gamma_{\alpha\beta}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}) \sqrt{a} dy$$

$$- \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \overline{e_{\sigma||\tau}(s)} \gamma_{\alpha\beta}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}) \sqrt{a} dy ds = \int_{\omega} \varphi^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}) \sqrt{a} dy. \quad (6.3.25)$$

Tomando en (6.3.25) el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , junto con las convergencias débiles estudiadas en el paso (iv), concluimos de la ecuación (6.3.24) que  $\Psi = 0$ . Como consecuencia, aplicando el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue en (6.3.22), se verifican las convergencias fuertes  $e_{i||j}(\varepsilon) \rightarrow e_{i||j}$  en  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . Análogamente, definamos

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(\varepsilon) &:= \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon)(e_{k||l}(\varepsilon) - e_{k||l})(\dot{e}_{i||j}(\varepsilon) - \dot{e}_{i||j}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &\quad + \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon)(\dot{e}_{k||l}(\varepsilon) - \dot{e}_{k||l})(\dot{e}_{i||j}(\varepsilon) - \dot{e}_{i||j}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &= L(\varepsilon)(\dot{\mathbf{u}}(\varepsilon)) + \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon)(e_{k||l} \dot{e}_{i||j} - \frac{\partial}{\partial t}(e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j})) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &\quad - \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon)(2\dot{e}_{k||l}(\varepsilon) - \dot{e}_{k||l}) \dot{e}_{i||j} \sqrt{g(\varepsilon)} dx \quad c.p.d. \text{ en } (0, T). \end{aligned}$$

Se tiene que,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon)(e_{k||l}(\varepsilon) - e_{k||l})(e_{i||j}(\varepsilon) - e_{i||j}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &\quad + \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon)(\dot{e}_{k||l}(\varepsilon) - \dot{e}_{k||l})(\dot{e}_{i||j}(\varepsilon) - \dot{e}_{i||j}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx = \tilde{\Psi}(\varepsilon), \quad c.p.d. \text{ en } (0, T). \end{aligned}$$

Integrando en el intervalo  $[0, T]$ , utilizando (4.2.10) y (6.3.1) obtenemos que

$$\int_0^T \left( \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon)(\dot{e}_{k||l}(\varepsilon) - \dot{e}_{k||l})(\dot{e}_{i||j}(\varepsilon) - \dot{e}_{i||j}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \right) dt \leq \int_0^T \tilde{\Psi}(\varepsilon) dt.$$

Ahora, por (4.2.11) y (4.3.2) se tiene que

$$C_v^{-1} g_0^{1/2} \sum_{i,j} |\dot{e}_{i||j}(\varepsilon) - \dot{e}_{i||j}|_{0,\Omega}^2 \leq \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon)(\dot{e}_{k||l}(\varepsilon) - \dot{e}_{k||l})(\dot{e}_{i||j}(\varepsilon) - \dot{e}_{i||j}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx.$$

Por tanto, junto con la desigualdad anterior, hallamos que

$$C_v^{-1} g_0^{1/2} \int_0^T \left( \sum_{i,j} |\dot{e}_{i||j}(\varepsilon)(t) - \dot{e}_{i||j}(t)|_{0,\Omega}^2 \right) dt \leq \int_0^T \tilde{\Psi}(\varepsilon) dt, \quad (6.3.26)$$

cuya expresión es similar a la obtenida en (6.3.22). Por tanto, aplicando argumentos análogos a los utilizados allí, se prueba que

$$\tilde{\Psi} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\Psi}(\varepsilon) = \int_{\omega} \varphi^{\alpha\beta} \overline{\dot{e}_{\alpha||\beta}} \sqrt{a} dy - \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \overline{\dot{e}_{\sigma||\tau}} \overline{\dot{e}_{\alpha||\beta}} \sqrt{a} dy - \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \overline{\dot{e}_{\sigma||\tau}} \overline{\dot{e}_{\alpha||\beta}} \sqrt{a} dy$$

$$+ \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \overline{e_{\sigma||\tau}(s)} \overline{\dot{e}_{\alpha||\beta}(t)} \sqrt{a} dy ds, \text{ c.t.p. } t \in (0, T). \quad (6.3.27)$$

Ahora, como  $\overline{\dot{\mathbf{u}}(\varepsilon)} \in V(\omega)$ , para cada  $\varepsilon > 0$ , tomamos  $\boldsymbol{\eta} = \overline{\dot{\mathbf{u}}(\varepsilon)}$  en (6.3.19) y observamos que

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \overline{e_{\sigma||\tau}} \gamma_{\alpha\beta}(\overline{\dot{\mathbf{u}}(\varepsilon)}) \sqrt{a} dy + \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \overline{e_{\sigma||\tau}} \dot{\gamma}_{\alpha\beta}(\overline{\dot{\mathbf{u}}(\varepsilon)}) \sqrt{a} dy \\ & - \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \overline{e_{\sigma||\tau}(s)} \gamma_{\alpha\beta}(\overline{\dot{\mathbf{u}}(\varepsilon)}) \sqrt{a} dy ds = \int_{\omega} \varphi^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(\overline{\dot{\mathbf{u}}(\varepsilon)}) \sqrt{a} dy. \end{aligned} \quad (6.3.28)$$

Tomando en (6.3.28) el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  y teniendo en cuenta las convergencias débiles estudiadas en (iv), concluimos de (6.3.27) que  $\tilde{\Psi} = 0$ . Nuevamente, aplicando el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue en (6.3.26), obtenemos que se verifican las convergencias fuertes  $\dot{e}_{i||j}(\varepsilon) \rightarrow \dot{e}_{i||j}$  en  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . Por tanto, concluimos que  $e_{i||j}(\varepsilon) \rightarrow e_{i||j}$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$ .

Siguiendo con la demostración de las restantes convergencias, sea  $\mathbf{v} = \mathbf{u}^{-1}(\varepsilon) = \varepsilon \mathbf{u}(\varepsilon)$ . Entonces, por (6.1.5) y el paso (ii), existen dos constantes  $\tilde{C}, \hat{C} > 0$  tales que

$$\begin{aligned} & \|\partial_3 e_{\alpha||\beta}(\varepsilon) + \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^{-1}(\varepsilon))\|_{H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))} \leq \tilde{C} \left( \varepsilon \sum_i \|e_{i||3}(\varepsilon)\|_{H^1(0, T; L^2(\Omega))} \right. \\ & \left. + \varepsilon \sum_{\alpha} \|\varepsilon u_{\alpha}(\varepsilon)\|_{H^1(0, T; L^2(\Omega))} + \varepsilon \|\varepsilon u_3(\varepsilon)\|_{H^1(0, T; H^1(\Omega))} \right) \leq \hat{C} \varepsilon. \end{aligned}$$

Además, como  $e_{\alpha||\beta}(\varepsilon) \rightarrow e_{\alpha||\beta}$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  por el paso anterior, y las funciones  $e_{\alpha||\beta}$  son independientes de  $x_3$  (véase el paso (iv)) tenemos que

$$\partial_3 e_{\alpha||\beta}(\varepsilon) \rightarrow \partial_3 e_{\alpha||\beta} = 0 \text{ en } H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)),$$

que por tanto, por la desigualdad anterior implica que

$$\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^{-1}(\varepsilon)) \rightarrow 0 \text{ en } H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Ahora, aplicando el Teorema 6.1.3 se deduce que

$$\mathbf{u}^{-1}(\varepsilon) = \varepsilon \mathbf{u}(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{0} \text{ en } H^1(0, T; [H^1(\Omega)]^3),$$

obteniendo la segunda convergencia anunciada en este paso.

A continuación, por el apartado (a) del Teorema 5.1.1, las convergencias fuertes  $e_{i||j}(\varepsilon) \rightarrow e_{i||j}$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  implican que  $\overline{e_{\alpha||\beta}(\varepsilon)} \rightarrow \overline{e_{\alpha||\beta}}$  en  $H^1(0, T; L^2(\omega))$ . Por tanto, por el paso (iv), tenemos que,

$$\gamma_{\alpha\beta}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}) \rightarrow \overline{e_{\alpha||\beta}} \text{ en } H^1(0, T; L^2(\omega)).$$



Como consecuencia  $(\gamma_{\alpha\beta}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}))_{\varepsilon>0}$  es una sucesión de Cauchy en  $H^1(0, T; L^2(\omega))$ . Ahora, como se verifica la igualdad

$$|\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)} - \overline{\mathbf{u}(\varepsilon')}|_{T, \omega}^M = \left( \sum_{\alpha, \beta} \int_0^T |\gamma_{\alpha\beta}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}(t)) - \gamma_{\alpha\beta}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon')}(t))|_{\omega}^2 dt \right)^{1/2}, \text{ con } \varepsilon, \varepsilon' > 0,$$

y la correspondientes para las derivadas temporales asociadas, deducimos la convergencia fuerte  $\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)} \rightarrow \boldsymbol{\xi}$  en  $H^1(0, T; V_M^\#(\omega))$ , concluyendo la demostración de este paso.

(viii) El límite  $\boldsymbol{\xi}(t) \in V_M^\#(\omega) \forall t \in [0, T]$  hallado en (vii) verifica el problema:

$$\begin{aligned} B_M^\#(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) &= L_M^\#(\boldsymbol{\eta}) \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in V_M^\#(\omega), \text{ c.p.d. en } (0, T), \\ \boldsymbol{\xi}(0, \cdot) &= \boldsymbol{\xi}_0(\cdot), \end{aligned}$$

el cual tiene una única solución. Como consecuencia, se verifica la convergencia  $\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)} \rightarrow \boldsymbol{\xi}$  en  $H^1(0, T; V_M^\#(\omega))$  para toda la familia  $(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)})_{\varepsilon>0}$ .

Sea  $\boldsymbol{\eta} \in V(\omega)$ . Por los pasos (v) y (vii) y que  $\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)} \in H^1(0, T; V(\omega))$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_M(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}, \boldsymbol{\eta}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy + \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}(s)) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy ds \right) \\ &= \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \overline{e_{\sigma||\tau}} \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy + \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \overline{e_{\sigma||\tau}} \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy \\ &\quad - \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \overline{e_{\sigma||\tau}(s)} \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy ds = L_M(\boldsymbol{\eta}) \quad \text{c.p.d. en } (0, T). \end{aligned}$$

Además, nuevamente teniendo en cuenta los resultados vistos en (vii) obtenemos lo siguiente:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_M(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}, \boldsymbol{\eta}) = B_M^\#(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = L_M(\boldsymbol{\eta}), \forall \boldsymbol{\eta} \in V(\omega), \text{ c.p.d. en } (0, T),$$

por tanto,  $B_M^\#(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = L_M^\#(\boldsymbol{\eta}) \forall \boldsymbol{\eta} \in V_M^\#(\omega)$ , c.p.d. en  $(0, T)$ , por la definición de las extensiones continuas  $B_M^\#$  y  $L_M^\#$  en el Problema 6.2.7. La existencia y unicidad de solución es consecuencia del Teorema 6.2.9. Esto completa la demostración del apartado (b) de este teorema.

(ix) Sea  $\Omega$  un dominio en  $\mathbb{R}^3$ . Dado  $\mathbf{v} = (v_i) \in H^1(0, T; [L^2(\Omega)]^3)$ , definimos las distribuciones,

$$e_{ij}(\mathbf{v}) := \frac{1}{2}(\partial_i v_j + \partial_j v_i) \in H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)). \quad (6.3.29)$$

Considérese una sucesión de funciones  $\mathbf{v}^k = (v_i^k) \in H^1(0, T; [L^2(\Omega)]^3)$  tal que  $\mathbf{v}^k \rightarrow \mathbf{0}$  en  $H^1(0, T; [H^{-1}(\Omega)]^3)$  y  $e_{ij}(\mathbf{v}^k) \rightarrow 0$  en  $H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . Entonces,  $\mathbf{v}^k \rightarrow \mathbf{0}$  en  $H^1(0, T; [L^2(\Omega)]^3)$ .

La demostración de este paso, sigue argumentos similares a los realizados en el paso (ix) de la demostración del Teorema 5.6-1, [30]. Por completitud, escribimos aquí la demostración adaptada al caso que nos interesa. En primer lugar, recordamos una implicación que se puede consultar en la referencia [3]:

$$\{w \in H^{-2}(\Omega) \text{ y } \partial_i w \in H^{-2}(\Omega)\} \Rightarrow w \in H^{-1}(\Omega), \quad (6.3.30)$$

si  $\Omega$  es un dominio de  $\mathbb{R}^n$ , donde  $H^{-2}(\Omega)$  denota el espacio dual de  $H_0^2(\Omega)$ . Sea  $\mathbf{v} = (v_i)$  tal que

$$\mathbf{v} \in H^1(0, T; [H^{-1}(\Omega)]^3) \text{ y } e_{ij}(\mathbf{v}) \in H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Es conocido que si,  $w \in H^{-1}(\Omega)$  entonces  $\partial_j w \in H^{-2}(\Omega)$ , por tanto tenemos:

$$\begin{aligned} \partial_j v_i &\in H^{-2}(\Omega), & \partial_k (\partial_j v_i) &= (\partial_k e_{ij}(\mathbf{v}) + \partial_j e_{ik}(\mathbf{v}) - \partial_i e_{jk}(\mathbf{v})) \in H^{-2}(\Omega), \\ \partial_j \dot{v}_i &\in H^{-2}(\Omega), & \partial_k (\partial_j \dot{v}_i) &= (\partial_k e_{ij}(\dot{\mathbf{v}}) + \partial_j e_{ik}(\dot{\mathbf{v}}) - \partial_i e_{jk}(\dot{\mathbf{v}})) \in H^{-2}(\Omega), \end{aligned}$$

y por (6.3.30) concluimos que  $\partial_j v_i \in H^{-1}(\Omega)$  y  $\partial_j \dot{v}_i \in H^{-1}(\Omega)$ , o lo que es lo mismo,  $\partial_j v_i \in H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$ . Utilizando el Lema de J.L. Lions (véase, por ejemplo, el Teorema 3.2 en el Capítulo III de [48]), concluimos que  $\mathbf{v} \in H^1(0, T; [L^2(\Omega)]^3)$ . En otras palabras, análogamente a lo estudiado en [30], se tiene que

$$\{\mathbf{v} = (v_i) \in H^1(0, T; [H^{-1}(\Omega)]^3); e_{ij}(\mathbf{v}) \in H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))\} = H^1(0, T; [L^2(\Omega)]^3).$$

Entonces, aplicando el Teorema del grafo cerrado (véase, por ejemplo, el Teorema 2.9 en [14]) existe una constante  $c > 0$  tal que se verifica la siguiente desigualdad,

$$\|\mathbf{v}\|_{H^1(0, T; [L^2(\Omega)]^3)} \leq c \left( \|\mathbf{v}\|_{H^1(0, T; [H^{-1}(\Omega)]^3)} + \sum_{i,j} \|e_{ij}(\mathbf{v})\|_{H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))} \right),$$

para todo  $\mathbf{v} \in H^1(0, T; [L^2(\Omega)]^3)$ . Como consecuencia de esta desigualdad se deduce el resultado buscado en este paso.

(x) *Se verifican las siguientes convergencias:*

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\varepsilon) &\rightarrow \mathbf{u} \text{ en } H^1(0, T; V_M^\#(\Omega)), \\ \partial_3 u_\alpha(\varepsilon) &\rightarrow 0 \text{ en } H^1(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Para obtener la primera convergencia es suficiente con probar que  $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  y su derivada temporal, son sucesiones de Cauchy con respecto a la norma  $|\cdot|_{T, \Omega}^M$ . Por su definición tenemos que,

$$\int_0^T (|\mathbf{u}(\varepsilon)(t) - \mathbf{u}(\varepsilon')(t)|_\Omega^M)^2 dt = \int_0^T \left( \sum_{\alpha, \beta} |\gamma_{\alpha\beta}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}(t)) - \gamma_{\alpha\beta}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon')}(t))|_{0, \omega}^2 \right) dt$$

$$+ \int_0^T \left( \sum_i |\partial_3 u_i(\varepsilon)(t) - \partial_3 u_i(\varepsilon')(t)|_{0,\Omega}^2 \right) dt \quad (6.3.31)$$

y la igualdad correspondiente para la familia de las derivadas temporales. Comencemos probando que  $\partial_3 u_\alpha(\varepsilon) \rightarrow 0$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$ . Esta convergencia se verificará si  $\partial_3 \mathbf{u}'(\varepsilon) \rightarrow 0$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$ , con

$$\mathbf{u}'(\varepsilon) = (u_1(\varepsilon), u_2(\varepsilon), 0). \quad (6.3.32)$$

Por el paso (ix), probar esto es lo mismo que demostrar las siguientes convergencias,

$$\partial_3 \mathbf{u}'(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ en } H^1(0, T; [H^{-1}(\Omega)]^3), \quad (6.3.33)$$

$$e_{ij}(\partial_3 \mathbf{u}'(\varepsilon)) \rightarrow 0 \text{ en } H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)). \quad (6.3.34)$$

Por la expresión (4.2.7), se puede obtener que

$$\partial_3 u_\alpha(\varepsilon) = 2\varepsilon e_{\alpha||3}(\varepsilon) - \varepsilon \partial_\alpha u_3(\varepsilon) + 2\varepsilon \Gamma_{\alpha 3}^\sigma(\varepsilon) u_\sigma(\varepsilon). \quad (6.3.35)$$

Por tanto, dado que la sucesión  $(\Gamma_{\alpha 3}^\sigma(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  está acotada en  $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$  (véase el Teorema 4.3.1) y dado que se verifican las convergencias  $\varepsilon e_{\alpha||3}(\varepsilon) \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon u_i(\varepsilon) \rightarrow 0$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  por los pasos (vi) y (vii), respectivamente, se concluye que

$$\partial_3 u_\alpha(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ en } H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)). \quad (6.3.36)$$

Entonces se verifica la convergencia (6.3.33). Para demostrar las restantes convergencias, en primer lugar tenemos que  $e_{33}(\partial_3 \mathbf{u}'(\varepsilon)) = \partial_3 e_{33}(\mathbf{u}'(\varepsilon)) = 0$  por (6.3.32). Ahora bien, el comportamiento asintótico de las funciones  $\Gamma_{\alpha 3}^\sigma(\varepsilon)$  (véase el Teorema 4.3.1) y las convergencias  $e_{i||j}(\varepsilon) \rightarrow e_{i||j}$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  (véase el paso (viii)) implican que (véase (4.2.7)),

$$(\partial_3 u_\alpha(\varepsilon) + \varepsilon \partial_\alpha u_3(\varepsilon) + 2\varepsilon b_\alpha^\sigma u_\sigma(\varepsilon)) \rightarrow 0 \text{ en } H^1(0, T; L^2(\Omega)),$$

por tanto,

$$(\partial_{33} u_\alpha(\varepsilon) + \varepsilon \partial_{\alpha 3} u_3(\varepsilon) + 2\varepsilon b_\alpha^\sigma \partial_3 u_\sigma(\varepsilon)) \rightarrow 0 \text{ en } H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Como  $\partial_3 u_3(\varepsilon) \rightarrow 0$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  y  $\varepsilon u_\sigma(\varepsilon) \rightarrow 0$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  (véanse los pasos (ii) y (vi), respectivamente) se tiene que

$$2e_{\alpha 3}(\partial_3 \mathbf{u}'(\varepsilon)) = \partial_{33} u_\alpha(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ en } H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Ahora, por el paso (vi) se tiene que  $e_{\alpha||\beta}(\varepsilon) \rightarrow e_{\alpha||\beta}$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  y  $\partial_3 e_{\alpha||\beta} = 0$ , entonces inferimos que  $\partial_3 e_{\alpha||\beta}(\varepsilon) \rightarrow 0$  en  $H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$ . Por tanto,

$$\partial_3 e_{\alpha||\beta}(\varepsilon) = (\partial_3 e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}(\varepsilon)) - \partial_3 (\Gamma_{\alpha\beta}^p(\varepsilon) u_p(\varepsilon))) \rightarrow 0 \text{ en } H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Como  $\Gamma_{\alpha\beta}^p(\varepsilon) \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$  (por definición, véanse (4.1.12) y (4.2.2)), entonces  $\Gamma_{\alpha\beta}^p(\varepsilon)u_p(\varepsilon) \in H^1(0, T; H^1(\Omega))$ . Además,

$$\begin{aligned}\partial_3(\Gamma_{\alpha\beta}^p(\varepsilon)u_p(\varepsilon)) &= \partial_3\Gamma_{\alpha\beta}^p(\varepsilon)u_p(\varepsilon) + \Gamma_{\alpha\beta}^p(\varepsilon)\partial_3u_p(\varepsilon), \\ \Gamma_{\alpha\beta}^p(\varepsilon)\partial_3u_p(\varepsilon) &\rightarrow 0 \text{ en } H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)),\end{aligned}$$

ya que  $\partial_3u_p(\varepsilon) \rightarrow 0$  en  $H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$  (véase el paso (ii) y (6.3.36)). Ahora bien, las estimaciones  $\|\partial_3\Gamma_{\alpha\beta}^p(\varepsilon)\|_{0,\infty,\bar{\Omega}} \leq C\varepsilon$ , con una constante  $C > 0$  (véase el Teorema 4.3.1) y las convergencias  $\varepsilon\mathbf{u}(\varepsilon) \rightarrow 0$  en  $H^1(0, T; [L^2(\Omega)]^3)$  (véase el paso (vi)) implican que

$$\partial_3\Gamma_{\alpha\beta}^p(\varepsilon)u_p(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ en } H^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

Por tanto,  $e_{\alpha\beta}(\partial_3\mathbf{u}'(\varepsilon)) = \partial_3e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}(\varepsilon)) \rightarrow 0$  en  $H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$ . De esta forma, completamos la demostración de las convergencias (6.3.34). Entonces, junto con (6.3.33) se tiene por el paso (ix) que  $\partial_3u_\alpha(\varepsilon) \rightarrow 0$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$ . Como  $\partial_3u_3(\varepsilon) \rightarrow 0$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  y  $\gamma_{\alpha\beta}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}) \rightarrow \overline{e_{\alpha\beta}}$  en  $H^1(0, T; L^2(\omega))$  por los pasos (ii) y (vii), concluimos de la igualdad (6.3.31) la demostración de este paso.

(xi) Toda la familia  $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  converge fuertemente a  $\mathbf{u}$  en el espacio  $H^1(0, T; V_M^\#(\Omega))$ .

La familia  $(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)})_{\varepsilon>0}$  converge fuertemente en  $H^1(0, T; V_M^\#(\omega))$  por el paso (viii) y  $\partial_3\mathbf{u}(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{0}$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  para una cierta subsucesión (véanse los pasos (ii) y (x)). Entonces, como el límite de esa sucesión es único, toda la familia  $(\partial_3\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  converge en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$ . Por tanto, por la definición de la norma  $|\cdot|_{T,\Omega}^M$ ,  $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  se trata de una sucesión de Cauchy en el espacio de Hilbert  $H^1(0, T; V_M^\#(\Omega))$  (ya que  $V_M^\#(\Omega)$  es un espacio de Hilbert en virtud de la Proposición 6.2.3), por tanto, concluimos la demostración del paso. Así, queda demostrado el apartado (a) del teorema.

Por tanto, la demostración del teorema está completa.  $\square$

En lo que sigue, probaremos los resultados de convergencia correspondientes para justificar el modelo bidimensional de una membrana generalizada viscoelástica del segundo tipo, enunciado en el Problema 6.2.8. En primer lugar, denotaremos por  $\tilde{\mathbf{v}}$  a la clase de equivalencia del elemento  $\mathbf{v} \in V(\Omega)$  en el espacio cociente  $V(\Omega)/V_0(\Omega)$ ; de la misma forma, denotaremos por  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$  a la clase de equivalencia del elemento  $\boldsymbol{\eta} \in V(\omega)$  en el espacio cociente  $V(\omega)/V_0(\omega)$ . Análogamente, utilizaremos notaciones similares para designar las clases de equivalencia en los espacios completos  $\tilde{V}_M^\#(\Omega)$  y  $\tilde{V}_M^\#(\omega)$  definidos en (6.2.8)–(6.2.9), respectivamente. Para facilitar la lectura, en el caso de promedios de funciones, utilizaremos la notación  $\bar{\mathbf{v}}$  para denotar a la clase de equivalencia del elemento  $\bar{\mathbf{v}}$ .

**Teorema 6.3.4.** *Supongamos que  $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^3(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$  y sea  $\varepsilon_0$  definido como en el Teorema 4.1.4. Consideremos una familia de láminas membranas generalizadas del segundo tipo de grosor  $2\varepsilon$  que tiende a cero y teniendo cada una la misma superficie media  $S = \boldsymbol{\theta}(\bar{\omega})$ . Supongamos que están sometidas a una condición de contorno de fijación a lo largo de una parte de la frontera lateral, con el mismo conjunto  $\boldsymbol{\theta}(\gamma_0)$  como su línea curva y bajo el efecto de unas fuerzas admisibles. Para todo  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , sea  $\mathbf{u}(\varepsilon)$  la única solución del Problema 6.2.6. Entonces, existe  $\tilde{\mathbf{u}} \in H^1(0, T; \tilde{V}_M^\#(\Omega))$  y  $\tilde{\boldsymbol{\xi}} \in H^1(0, T; \tilde{V}_M^\#(\omega))$  tal que*

(a)  $\tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon) \rightarrow \tilde{\mathbf{u}}$  en  $H^1(0, T; \tilde{V}_M^\#(\Omega))$ , cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

(b)  $\overline{\tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon)} := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon) dx_3 \rightarrow \tilde{\boldsymbol{\xi}}$  en  $H^1(0, T; \tilde{V}_M^\#(\omega))$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Además, el promedio  $\tilde{\mathbf{u}} := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \tilde{\mathbf{u}} dx_3 = \tilde{\boldsymbol{\xi}}$  verifica el Problema 6.2.8.

*Demostración.* La demostración de este teorema sigue prácticamente los mismos argumentos utilizado en la demostración del Teorema 6.3.1. A continuación indicaremos únicamente las modificaciones que deben ser consideradas. Dividiremos, por tanto, la demostración en varios pasos enumerados desde (i) hasta (xi).

(i) Este apartado coincide con el paso (i) de la demostración del Teorema 6.3.1.

(ii) *Acotaciones a priori y extracción de sucesiones débilmente convergentes.* Las seminormas  $|\mathbf{u}(\varepsilon)|_{T, \Omega}^M$  y  $|\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}|_{T, \omega}^M$ , por tanto las normas  $|\tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon)|_{T, \Omega}^M$  y  $|\overline{\tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon)}|_{T, \omega}^M$ , las seminormas de las derivadas temporales correspondientes y las normas  $\|\varepsilon \mathbf{u}(\varepsilon)\|_{H^1(0, T; [H^1(\Omega)]^3)}$  y  $|e_{i||j}(\varepsilon)|_{H^1(0, T; L^2(\Omega))}$  están acotadas independientemente de  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$ .

Además, por la definición de los espacios  $\tilde{V}_M^\#(\Omega)$  y  $\tilde{V}_M^\#(\omega)$  en (6.2.8)–(6.2.9), existe una subsucesión, también denotada por  $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$ , y existen  $\tilde{\mathbf{u}} \in H^1(0, T; \tilde{V}_M^\#(\Omega))$ ,  $\mathbf{u}^{-1} = (u_i^{-1}) \in H^1(0, T; V(\Omega))$ ,  $e_{i||j} \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$  y  $\tilde{\boldsymbol{\xi}} \in H^1(0, T; \tilde{V}_M^\#(\omega))$  tales que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon) &\rightharpoonup \tilde{\mathbf{u}} \text{ en } H^1(0, T; \tilde{V}_M^\#(\Omega)), \\ \varepsilon \mathbf{u}(\varepsilon) &\rightharpoonup \mathbf{u}^{-1} \text{ en } H^1(0, T; [H^1(\Omega)]^3) \\ \text{por tanto, } \varepsilon \mathbf{u}(\varepsilon) &\rightharpoonup \mathbf{u}^{-1} \text{ en } H^1(0, T; [L^2(\Omega)]^3), \\ e_{i||j}(\varepsilon) &\rightharpoonup e_{i||j} \text{ en } H^1(0, T; L^2(\Omega)), \\ \partial_3 u_3(\varepsilon) = \varepsilon e_{3||3}(\varepsilon) &\rightarrow 0 \text{ en } H^1(0, T; L^2(\Omega)), \\ \overline{\tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon)} &\rightharpoonup \tilde{\boldsymbol{\xi}} \text{ en } H^1(0, T; \tilde{V}_M^\#(\omega)), \end{aligned}$$

cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

La demostración es análoga a la del paso (ii) en el Teorema 6.3.1.

(iii)–(vi) Estos apartados coinciden con los pasos (iii) – (vi) de la demostración del Teorema 6.3.1.

(vii) *Se verifican las siguientes convergencias fuertes,*

$$\begin{aligned} e_{i||j}(\varepsilon) &\rightarrow e_{i||j} \text{ en } H^1(0, T; L^2(\Omega)), \\ \varepsilon \mathbf{u}(\varepsilon) &\rightarrow \mathbf{0} \text{ en } H^1(0, T; [H^1(\Omega)]^3), \\ \gamma_{\alpha\beta}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}) &\rightarrow \overline{e_{\alpha||\beta}} \text{ en } H^1(0, T; L^2(\omega)), \\ \overline{\tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon)} &\rightarrow \tilde{\boldsymbol{\xi}} \text{ en } H^1(0, T; \tilde{V}_M^\#(\omega)), \end{aligned}$$

cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

La demostración es análoga a la del paso (vii) en el Teorema 6.3.1, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon) - \tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon')|_{T,\omega}^M &= |\overline{\mathbf{u}}(\varepsilon) - \overline{\mathbf{u}}(\varepsilon')|_{T,\omega}^M \\ &= \left( \sum_{\alpha,\beta} \int_0^T |\gamma_{\alpha\beta}(\overline{\mathbf{u}}(\varepsilon)(t)) - \gamma_{\alpha\beta}(\overline{\mathbf{u}}(\varepsilon')(t))|_\omega^2 dt \right)^{1/2}, \text{ con } \varepsilon, \varepsilon' > 0, \end{aligned}$$

y la correspondiente igualdad para las derivadas temporales asociadas.

(viii) El límite  $\xi(t) \in \tilde{V}_M^\#(\omega) \forall t \in [0, T]$  hallado en (vii) verifica el problema:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_M^\#(\xi, \tilde{\eta}) &= \tilde{L}_M^\#(\tilde{\eta}) \quad \forall \tilde{\eta} \in \tilde{V}_M^\#(\omega), \text{ c.p.d. en } (0, T), \\ \tilde{\xi}(0, \cdot) &= \tilde{\xi}_0(\cdot), \end{aligned}$$

el cual tiene unicidad de solución. Como consecuencia, se verifica la convergencia  $\overline{\tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon)} \rightarrow \tilde{\xi}$  en  $H^1(0, T; \tilde{V}_M^\#(\omega))$  para toda la familia  $(\overline{\tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon)})_{\varepsilon > 0}$ .

Sea  $\eta \in V(\omega)$ . Por los pasos (v) y (vii) y que  $\overline{\mathbf{u}}(\varepsilon) \in H^1(0, T; V(\omega))$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_M(\overline{\mathbf{u}}(\varepsilon), \eta) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\overline{\mathbf{u}}(\varepsilon)) \gamma_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy + \int_\omega b^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\overline{\mathbf{u}}(\varepsilon)) \gamma_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_\omega c^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\overline{\mathbf{u}}(\varepsilon)(s)) \gamma_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy ds \right) \\ &= \int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau} \overline{e_{\sigma||\tau}} \gamma_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy + \int_\omega b^{\alpha\beta\sigma\tau} \overline{e_{\sigma||\tau}} \gamma_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy \\ &\quad - \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_\omega c^{\alpha\beta\sigma\tau} \overline{e_{\sigma||\tau}(s)} \gamma_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy ds = L_M(\eta) \text{ c.p.d. en } (0, T). \end{aligned}$$

Como  $\tilde{B}_M(\overline{\tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon)}, \tilde{\eta}) = B_M(\overline{\mathbf{u}}(\varepsilon), \eta)$  y  $\tilde{L}_M(\tilde{\eta}) = L_M(\eta)$  por la definición de las formas  $\tilde{B}_M$  y  $\tilde{L}_M$  en (6.2.24)–(6.2.25), respectivamente, se tiene que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{B}_M(\overline{\tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon)}, \tilde{\eta}) = \tilde{L}_M(\tilde{\eta}), \quad \forall \tilde{\eta} \in \{V(\omega)/V_0(\omega)\}, \text{ c.p.d. en } (0, T).$$

Por otra parte, por el apartado (vii) obtenemos lo siguiente

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{B}_M(\overline{\tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon)}, \tilde{\eta}) = \tilde{B}_M^\#(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = \tilde{L}_M(\tilde{\eta}), \quad \forall \tilde{\eta} \in \{V(\omega)/V_0(\omega)\}, \text{ c.p.d. en } (0, T),$$

por tanto,  $\tilde{B}_M^\#(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = \tilde{L}_M^\#(\tilde{\eta}) \forall \tilde{\eta} \in \tilde{V}_M^\#(\omega)$ , c.p.d. en  $(0, T)$ , por la definición de las extensiones continuas  $\tilde{B}_M^\#$  y  $\tilde{L}_M^\#$  en el Problema 6.2.8. La existencia y unicidad de solución es consecuencia del Teorema 6.2.10.

(ix) Este apartado coincide con el paso (ix) de la demostración del Teorema 6.3.1.



(x) Se verifican las siguientes convergencias,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon) &\rightarrow \tilde{\mathbf{u}} \text{ en } H^1(0, T; \tilde{V}_M^\#(\Omega)), \\ \partial_3 u_\alpha(\varepsilon) &\rightarrow 0 \text{ en } H^1(0, T; L^2(\Omega)).\end{aligned}$$

Para la primera convergencia es suficiente con probar que  $(\tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  y su derivada temporal, son sucesiones de Cauchy con respecto a la norma  $|\cdot|_{T,\Omega}^M$ . Por su definición tenemos que,

$$\begin{aligned}\int_0^T (|\tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon)(t) - \tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon')(t)|_\Omega^M)^2 dt &= \int_0^T (|\mathbf{u}(\varepsilon)(t) - \mathbf{u}(\varepsilon')(t)|_\Omega^M)^2 dt \\ &= \int_0^T \left( \sum_{\alpha,\beta} |\gamma_{\alpha\beta}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)(t)}) - \gamma_{\alpha\beta}(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon')(t)})|_{0,\omega}^2 \right) dt + \int_0^T \left( \sum_i |\partial_3 u_i(\varepsilon)(t) - \partial_3 u_i(\varepsilon')(t)|_{0,\Omega}^2 \right) dt\end{aligned}$$

y la igualdad análoga para la familia de las derivadas temporales. Por tanto, el resto de la demostración sigue los argumentos considerados en el apartado (x) de la demostración del Teorema 6.3.4.

(xi) Toda familia  $(\tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  converge fuertemente a  $\tilde{\mathbf{u}}$  en el espacio  $H^1(0, T; \tilde{V}_M^\#(\Omega))$ .

La familia  $(\overline{\tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon)})_{\varepsilon>0}$  converge fuertemente en  $H^1(0, T; \tilde{V}_M^\#(\omega))$  por el paso (viii) y  $\partial_3 \mathbf{u}(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{0}$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  para una cierta subsucesión (véanse los pasos (ii) y (x)). Entonces, como el límite de esa sucesión es único, toda la familia  $(\partial_3 \mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  converge en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$ . Por tanto, por la definición de la norma  $|\cdot|_{T,\Omega}^M$ ,  $(\tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  se trata de una sucesión de Cauchy en el espacio de Hilbert  $H^1(0, T; \tilde{V}_M^\#(\Omega))$  (ya que  $\tilde{V}_M^\#(\Omega)$  es un espacio de Hilbert en virtud de la Proposición 6.2.3), por tanto, concluimos la demostración del paso.

Por tanto, la demostración del teorema está completa.  $\square$

**Observación 6.3.5.** Al igual que comentamos en el Capítulo 5, nótese que las hipótesis (6.3.1) implican en particular (4.4.5) y (4.4.4) como consecuencia de (4.4.2), es decir, se cumplen las propiedades consideradas en el análisis asintótico formal realizado en el Capítulo 4. En efecto, podríamos debilitar la hipótesis (5.3.2) asumiendo que las deformaciones iniciales son de orden  $\varepsilon^2$ . De esta forma, realizando algunas modificaciones en las demostraciones de los Teoremas 6.3.1 y 6.3.4 se podrían obtener las mismas conclusiones.

En vista de las convergencias estudiadas en los teoremas anteriores, podemos analizar el comportamiento asintótico del campo tensorial de tensiones escaladas para una membrana generalizada viscoelástica (del primer o segundo tipo), siguiendo los argumentos estudiados en [40], donde los autores muestran resultados de convergencias para las tensiones en láminas elásticas lineales y no lineales. En el siguiente resultado, veremos que, en efecto, las componentes del tensor de tensiones escalado definido en (4.2.14) tienen límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . A diferencia de las convergencias estudiadas para el caso de la membrana elíptica viscoelástica en el Teorema 5.3.10, en el caso de la membrana generalizada el caso de



tensiones planas se obtendrá si y solo si los límites de las fuerzas admisibles definidas en la Sección 6.2 son independientes de la variable transversal  $x_3$  y, en particular, las componentes  $F^{i3} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$  son idénticamente nulas.

Cabe destacar nuevamente que, como consecuencia de la expresión obtenida para los límites de las componentes covariantes del tensor de deformaciones (véase el paso (iii) de la demostración del Teorema 6.3.1), un término de memoria larga estará presente en el límite de las tensiones escaladas, cuando en el modelo tridimensional de partida las tensiones definidas en (4.1.5) presentaban únicamente un término de memoria corta.

**Teorema 6.3.6.** *Asumamos las hipótesis consideradas en el Teorema 6.3.1 (Teorema 6.3.4 si la membrana generalizada es del segundo tipo). Entonces se verifican las siguientes convergencias:*

$$\sigma^{ij}(\varepsilon) \rightarrow \sigma^{ij,0} \text{ en } L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , donde,

$$\begin{aligned} \sigma^{\alpha\beta,0} &:= \frac{1}{2}a^{\alpha\beta\sigma\tau}e_{\sigma||\tau} + \frac{1}{2}b^{\alpha\beta\sigma\tau}\dot{e}_{\sigma||\tau} - \frac{1}{2}\int_0^t e^{-k(t-s)}c^{\alpha\beta\sigma\tau}e_{\sigma||\tau}(s)ds \\ &\quad + \frac{\theta\Lambda}{\theta + \rho}\int_0^t e^{-k(t-s)}F^{33}(s)a^{\alpha\beta}ds + \frac{\theta}{\theta + \rho}F^{33}a^{\alpha\beta}, \\ \sigma^{\alpha 3,0} &:= F^{\alpha 3}, \\ \sigma^{33,0} &:= F^{33}. \end{aligned}$$

*Demostración.* Teniendo en cuenta la definición de las tensiones escaladas en (4.2.14), el comportamiento asintótico de  $A^{ijkl}(\varepsilon)$ ,  $B^{ijkl}(\varepsilon)$  (véase el Teorema 4.2.2), las convergencias fuertes  $e_{i||j}(\varepsilon) \rightarrow e_{i||j}$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  y las relaciones obtenidas en el apartado (iii) de la demostración del Teorema 6.3.1 (o del Teorema 6.3.4 si la membrana generalizada es del segundo tipo), se tiene por un lado que

$$\begin{aligned} \sigma^{\alpha\beta,0} &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma^{\alpha\beta}(\varepsilon) = A^{\alpha\beta\sigma\tau}(0)e_{\sigma||\tau} + \lambda a^{\alpha\beta}e_{3||3} + B^{\alpha\beta\sigma\tau}(0)\dot{e}_{\sigma||\tau} + \theta a^{\alpha\beta}\dot{e}_{3||3} = \\ &= (\lambda a^{\alpha\beta}a^{\sigma\tau} + \mu(a^{\alpha\sigma}a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau}a^{\beta\sigma}))e_{\sigma||\tau} + \lambda a^{\alpha\beta}e_{3||3} \\ &\quad + \left(\theta a^{\alpha\beta}a^{\sigma\tau} + \frac{\rho}{2}(a^{\alpha\sigma}a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau}a^{\beta\sigma})\right)\dot{e}_{\sigma||\tau} + \theta a^{\alpha\beta}\dot{e}_{3||3} \\ &= \frac{1}{2}a^{\alpha\beta\sigma\tau}e_{\sigma||\tau} + \frac{1}{2}b^{\alpha\beta\sigma\tau}\dot{e}_{\sigma||\tau} - \frac{1}{2}\int_0^t e^{-k(t-s)}c^{\alpha\beta\sigma\tau}e_{\sigma||\tau}(s)ds \\ &\quad + \frac{\theta\Lambda}{\theta + \rho}\int_0^t e^{-k(t-s)}F^{33}(s)a^{\alpha\beta}ds + \frac{\theta}{\theta + \rho}F^{33}a^{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

en  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , siguiendo operaciones análogas a las realizadas en la demostración del Teorema 6.3.1, en particular en los términos de la igualdad (6.3.18). Por otro lado, teniendo en cuenta los argumentos mencionados, se obtiene que

$$\sigma^{\alpha 3,0} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma^{\alpha 3}(\varepsilon) = A^{\alpha 3\sigma 3}(0)e_{\sigma||3} + B^{\alpha 3\sigma 3}(0)\dot{e}_{\sigma||3} = \mu a^{\alpha\sigma}e_{\sigma||3} + \frac{\rho}{2}a^{\alpha\sigma}\dot{e}_{\sigma||3} = F^{\alpha 3},$$

$$\begin{aligned}\sigma^{33,0} &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma^{33}(\varepsilon) = A^{33\sigma\tau}(0)e_{\sigma||\tau} + A^{3333}(0)e_{3||3} + B^{33\sigma\tau}(0)\dot{e}_{\sigma||\tau} + B^{3333}(0)\dot{e}_{3||3} \\ &= \lambda a^{\sigma\tau}e_{\sigma||\tau} + (\lambda + 2\mu)e_{3||3} + \theta a^{\sigma\tau}\dot{e}_{\sigma||\tau} + (\theta + \rho)\dot{e}_{3||3} = F^{33},\end{aligned}$$

en  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , siguiendo las operaciones que condujeron a las ecuaciones (6.3.8)-(6.3.12), respectivamente.  $\square$

A continuación, estudiaremos los resultados de convergencia en términos de las incógnitas desescaladas centrándonos en el problema de la membrana generalizada del primer tipo, siendo extensibles los mismos resultados a las membranas de segundo tipo simplemente sustituyendo el espacio de compleción correspondiente definido en la Sección 6.2. Por el desescalado definido en (6.2.26), tenemos que para cada  $\varepsilon > 0$ ,  $\xi^\varepsilon := \xi$  en  $H^1(0, T; V_M^\#(\omega))$ . Como no podemos considerar el desescalado de cada componente, ya que dicha igualdad se entiende en el espacio abstracto correspondiente, probaremos el siguiente resultado de convergencia:

**Teorema 6.3.7.** *Sea  $\theta \in C^3(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$ . Consideremos la familia de láminas membrana generalizadas viscoelásticas del primer tipo con un espesor de  $2\varepsilon$  que tiende a cero y donde cada una de ellas tiene la misma superficie media  $S = \theta(\bar{\omega})$ . Supongamos que están sometidas a una condición de contorno de fijación a lo largo de una parte de su cara lateral teniendo como curva media el mismo conjunto  $\theta(\gamma_0)$  y bajo el efecto de las fuerzas admisibles (véase la Sección 6.2).*

*Sean  $\mathbf{u}^\varepsilon = (u_i^\varepsilon) \in H^1(0, T; V(\Omega^\varepsilon))$  y  $\xi^\varepsilon = (\xi_i^\varepsilon) \in H^1(0, T; V_M^\#(\omega))$  para cada  $\varepsilon > 0$  las soluciones de los Problemas 4.1.5 y 6.2.12, respectivamente. Además, sea  $\xi = (\xi_i) \in H^1(0, T; V_M(\omega))$  la solución del Problema 6.2.7. Entonces tenemos que,*

$$\xi^\varepsilon = \xi \quad \text{y} \quad \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon dx_3 \rightarrow \xi \quad \text{en } H^1(0, T; V_M^\#(\omega)) \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0,$$

*Demostración.* Nótese que,

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon dx_3 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{u}(\varepsilon) dx_3 = \overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}.$$

Por tanto, aplicando el Teorema 6.3.1 concluimos el resultado.  $\square$



## Capítulo 7

# Justificación matemática del problema de la lámina flexural viscoelástica

En los Capítulos 5 y 6, hemos justificado el modelo bidimensional de una lámina viscoelástica de tipo membrana derivado en el Capítulo 4. Las condiciones que asumíamos en esos capítulos, nos conducían a que el espacio de desplazamientos inextensionales,

$$V_F(\omega) = \{\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times H^2(\omega); \eta_i = \partial_\nu \eta_3 = 0 \text{ en } \gamma_0, \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) = 0 \text{ en } \omega\},$$

contenía únicamente el elemento trivial  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ . Por tanto, en este capítulo consideraremos el caso donde el espacio  $V_F(\omega)$  contiene funciones no nulas. De esta forma, completaremos la justificación matemática de los problemas bidimensionales identificados en el Capítulo 4, presentando en lo que sigue los resultados de convergencia para lo que denominábamos como problema de una lámina flexural viscoelástica, definido sobre el espacio  $V_F(\omega)$ .

Así pues, consideremos una familia de láminas viscoelásticas lineales con espesor  $2\varepsilon$  y supongamos que la condición de contorno de fijación se toma en una porción de la frontera lateral  $\gamma_0$ . En este capítulo veremos que, si la densidad de fuerzas volumétricas aplicadas es  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  y la densidad de fuerzas superficiales es  $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ , la solución del problema variacional escalado en coordenadas curvilíneas,  $\mathbf{u}(\varepsilon)$ , definida sobre el dominio de referencia  $\Omega = \omega \times (-1, 1)$  para cada  $t \in [0, T]$ , converge a un límite  $\mathbf{u} = (u_i)$  en  $H^1(0, T; [H^1(\Omega)]^3)$ , cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Además, veremos que este límite es independiente de la variable transversal  $x_3$ . También probaremos que el promedio  $\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{u} dx_3$  pertenece al espacio  $H^1(0, T; V_F(\omega))$  y verifica la ecuación bidimensional de una lámina flexural viscoelástica.

Una vez más seguiremos la notación y estilo de [30], en particular, el Capítulo 6, dedicado a la justificación de las ecuaciones bidimensionales de una lámina flexural elástica. La existencia y unicidad de solución de esas ecuaciones también se puede encontrar en [36]. La justificación matemática, por su parte, se puede encontrar en [34].

Comenzaremos este capítulo introduciendo en la Sección 7.1 una desigualdad de tipo Korn que será necesaria para asegurar la existencia e unicidad de solución del problema bidimensional de la lámina flexural viscoelástica. Además en esta sección mostraremos también la versión desescalada de dicho problema. Por último, en la Sección 7.2 mostraremos

los resultados principales de este capítulo, esto es, la justificación matemática del modelo de lámina flexural viscoelástica propuesto.

## 7.1. Ecuaciones bidimensionales de una lámina flexural viscoelástica

Empecemos recordando una desigualdad de tipo Korn para láminas lineales. Este resultado será útil para demostrar la existencia y unicidad de solución del problema bidimensional de una lámina flexural. La demostración de esta desigualdad puede consultarse, por ejemplo, en el Teorema 2.6-4, [30]. Previamente a su enunciado, recordemos  $V_K(\omega)$  el espacio definido en (6.2.2), por

$$V_K(\omega) := \{\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times H^2(\omega); \eta_i = \partial_\nu \eta_3 = 0 \text{ en } \gamma_0\}.$$

Además, dado  $\boldsymbol{\eta} \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times H^2(\omega)$  recordamos las definiciones de  $\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \in L^2(\boldsymbol{\eta})$  y  $\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \in L^2(\omega)$  en (4.4.6) y (4.4.7) que denotan, respectivamente, las componentes covariantes del tensor de cambio de métrica linealizado y del tensor de cambio de curvatura linealizado asociado a un desplazamiento  $\eta_i \mathbf{a}^i$  de la superficie  $S = \boldsymbol{\theta}(\bar{\omega})$ .

**Teorema 7.1.1.** *Sean  $\omega$  un dominio en  $\mathbb{R}^2$ ,  $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^3(\omega; \mathbb{R}^3)$  una aplicación inyectiva tal que los dos vectores  $\mathbf{a}_\alpha = \partial_\alpha \boldsymbol{\theta}$  son linealmente independientes en todo punto de  $\bar{\omega}$ ,  $\gamma_0$  un subconjunto  $\gamma$ -medible de  $\gamma = \partial\omega$  de medida no nula. Entonces, existe una constante  $c > 0$  tal que:*

$$\left( \sum_{\alpha} \|\eta_\alpha\|_{1,\omega}^2 + \|\eta_3\|_{2,\omega}^2 \right)^{1/2} \leq c \left( \sum_{\alpha,\beta} |\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})|_{0,\omega}^2 + \sum_{\alpha,\beta} |\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})|_{0,\omega}^2 \right)^{1/2}, \quad (7.1.1)$$

para todo  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in V_K(\omega)$ .

De aquí en adelante y en lo que resta de capítulo, supondremos que la densidad de fuerzas volumétricas es de orden  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  y la densidad de fuerzas superficiales es de orden  $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ . En esta sección escribiremos el problema variacional (escalado y desescalado) para la lámina flexural viscoelástica y probaremos la existencia y unicidad de solución. Nótese que, a diferencia del problema de la membrana viscoelástica, no será necesaria la introducción de espacios compleción adicionales en este problema, ya que el espacio  $V_F(\omega)$  es un espacio completo con respecto a la norma usual de  $[H^1(\omega)]^3$ .

Por tanto, recordemos el problema variacional bidimensional para una lámina flexural viscoelástica (véase el apartado (c) del Teorema 4.4.1):

**Problema 7.1.2.** *Hallar  $\boldsymbol{\xi} : [0, T] \times \omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que,*

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\xi}(t, \cdot) \in V_F(\omega) \quad \forall t \in [0, T], \\ &\frac{1}{3} \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\xi}) \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy + \frac{1}{3} \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\sigma\tau}(\dot{\boldsymbol{\xi}}) \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{3} \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\xi}(s)) \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy ds \\
& = \int_{\omega} p^{i,2} \eta_i \sqrt{a} dy \quad \forall \boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in V_F(\omega), \text{ c.t.p. } t \in (0, T), \\
& \boldsymbol{\xi}(0, \cdot) = \boldsymbol{\xi}_0(\cdot),
\end{aligned}$$

donde  $a^{\alpha\beta\sigma\tau}$ ,  $b^{\alpha\beta\sigma\tau}$  y  $c^{\alpha\beta\sigma\tau}$  denotan las componentes contravariantes de los tensores bidimensionales de cuarto orden, definidos en (4.4.10)–(4.4.12) y

$$p^{i,2}(t) := \int_{-1}^1 f^{i,2}(t) dx_3 + h_+^{i,3}(t) + h_-^{i,3}(t) \quad \text{con} \quad h_{\pm}^{i,3}(t, \cdot) = h^{i,3}(t, \cdot, \pm 1). \quad (7.1.2)$$

El Problema 7.1.2 está bien definido y podemos probar la existencia y unicidad de solución. En efecto, tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 7.1.3.** Sean  $\omega$  un dominio en  $\mathbb{R}^2$ ,  $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^3(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$  una aplicación inyectiva tal que los dos vectores  $\mathbf{a}_{\alpha} = \partial_{\alpha} \boldsymbol{\theta}$  son linealmente independientes en todo punto de  $\bar{\omega}$ . Sean  $f^{i,2} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $h^{i,3} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$ , donde  $\Gamma_1 := \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ . Sea  $\boldsymbol{\xi}_0 \in V_F(\omega)$ . Entonces el Problema 7.1.2, tiene solución única  $\boldsymbol{\xi} \in H^1(0, T; V_F(\omega))$ . Además, si  $\dot{f}^{i,3} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $\dot{h}^{i,3} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$ , entonces  $\boldsymbol{\xi} \in H^2(0, T; V_F(\omega))$ .

*Demostración.* Consideremos las formas bilineales  $a, b, c : V_F(\omega) \times V_F(\omega) \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por,

$$\begin{aligned}
a(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) &:= \frac{1}{3} \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\xi}) \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy, \\
b(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) &:= \frac{1}{3} \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\xi}) \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy, \\
c(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) &:= \frac{1}{3} \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\xi}) \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy,
\end{aligned}$$

para todo  $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in V_F(\omega)$ . Dado que  $p^{i,2} \in L^2(0, T; L^2(\omega))$  y que las formas bilineales  $a$  y  $b$  son elípticas, teniendo en cuenta la elipticidad de los tensores bidimensionales (véase el Teorema 4.4.5) y la desigualdad de tipo Korn (7.1.1), podemos considerar el Problema 7.1.2 en el marco de la formulación (4.3.8)–(4.3.9). Así, siguiendo argumentos análogos a los de la demostración del Teorema 4.3.15, deducimos que el Problema 7.1.2 tiene solución única  $\boldsymbol{\xi} \in H^1(0, T; V_F(\omega))$ . Si además, tenemos regularidad adicional para  $f^{i,2}$  y  $h^{i,3}$ , podemos concluir que  $\boldsymbol{\xi} \in H^2(0, T; V_F(\omega))$ .  $\square$

Además, en vista de los escalados de las incógnitas en (4.2.1), definimos para cada  $\varepsilon > 0$  las componentes covariantes  $\xi_i^{\varepsilon} : \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}$  del campo de desplazamientos  $\boldsymbol{\xi}^{\varepsilon} : \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  de la superficie media  $S$  de la lámina tomando:

$$\xi_i^{\varepsilon} := \xi_i \quad \text{y} \quad \xi^{\varepsilon} := \xi_i^{\varepsilon} \mathbf{a}^i. \quad (7.1.3)$$

Por tanto, podemos escribir el problema variacional desescalado para una lámina flexural viscoelástica:

**Problema 7.1.4.** Hallar  $\xi^\varepsilon : [0, T] \times \omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tal que,

$$\begin{aligned} \xi^\varepsilon(t, \cdot) &\in V_F(\omega) \quad \forall t \in [0, T], \\ \frac{\varepsilon^3}{3} \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau, \varepsilon} \rho_{\sigma\tau}(\xi^\varepsilon) \rho_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy &+ \frac{\varepsilon^3}{3} \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau, \varepsilon} \rho_{\sigma\tau}(\dot{\xi}^\varepsilon) \rho_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy \\ &- \frac{\varepsilon^3}{3} \int_0^t e^{-k^\varepsilon(t-s)} \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau, \varepsilon} \rho_{\sigma\tau}(\xi^\varepsilon(s)) \rho_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy ds \\ &= \int_{\omega} p^{i, \varepsilon} \eta_i \sqrt{a} dy \quad \forall \eta = (\eta_i) \in V_F(\omega), \text{ c.p.d. en } (0, T), \\ \xi^\varepsilon(0, \cdot) &= \xi_0^\varepsilon(\cdot), \end{aligned}$$

donde

$$p^{i, \varepsilon}(t) := \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f^{i, \varepsilon}(t) dx_3^\varepsilon + h_+^{i, \varepsilon}(t) + h_-^{i, \varepsilon}(t) \quad \text{con} \quad h_\pm^{i, \varepsilon}(t, \cdot) = h^{i, \varepsilon}(t, \cdot, \pm \varepsilon),$$

y además,  $a^{\alpha\beta\sigma\tau, \varepsilon}$ ,  $b^{\alpha\beta\sigma\tau, \varepsilon}$  y  $c^{\alpha\beta\sigma\tau, \varepsilon}$  denotan las versiones desescaladas de las componentes contravariantes de los tensores bidimensionales de cuarto orden (5.2.2)–(5.2.4),  $k^\varepsilon$  es la constante definida en (5.2.6).

**Observación 7.1.5.** Recordemos que las definiciones de  $a^{\alpha\beta\sigma\tau, \varepsilon}$ ,  $b^{\alpha\beta\sigma\tau, \varepsilon}$ ,  $c^{\alpha\beta\sigma\tau, \varepsilon}$  y  $k^\varepsilon$  coinciden con sus versiones escaladas introducidas en (4.4.10)–(4.4.13) teniendo en cuenta la hipótesis asumidas para los coeficientes de Lamé y de viscosidad en (4.1.18) y (4.1.19), respectivamente.

**Teorema 7.1.6.** Sean  $\omega$  un dominio  $\mathbb{R}^2$ ,  $\theta \in \mathcal{C}^2(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$  una aplicación inyectiva tal que los dos vectores  $\mathbf{a}_\alpha = \partial_\alpha \theta$  son linealmente independientes en todo punto de  $\bar{\omega}$ . Sean  $f^{i, \varepsilon} \in L^2(0, T; L^2(\Omega^\varepsilon))$ ,  $h^{i, \varepsilon} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1^\varepsilon))$ , donde  $\Gamma_1^\varepsilon := \Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon$ . Sea  $\xi_0^\varepsilon \in V_F(\omega)$ . Entonces el Problema 7.1.4, tiene una única solución  $\xi^\varepsilon \in H^1(0, T; V_F(\omega))$ . Además, si  $\dot{f}^{i, \varepsilon} \in L^2(0, T; L^2(\Omega^\varepsilon))$ ,  $\dot{h}^{i, \varepsilon} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1^\varepsilon))$ , entonces  $\xi^\varepsilon \in H^2(0, T; V_F(\omega))$ .

*Demostración.* La demostración de este teorema es análoga a la del Teorema 7.1.3.  $\square$

En la Figura 7.1 podemos observar algunas ilustraciones de ejemplos de láminas flexurales. Como se puede comprobar en el Capítulo 6, [30], una placa sometida a una condición de contorno en una porción de su frontera lateral, también corresponde a un ejemplo de lámina flexural.

## 7.2. Resultados de convergencia cuando $\varepsilon \rightarrow 0$

Comenzaremos esta sección recordando el problema tridimensional escalado de una lámina viscoelástica, del cual estudiaremos la convergencia cuando  $\varepsilon$  tiende a cero. Por tanto, sea  $\mathbf{u}(\varepsilon)$  la única solución del Problema 4.2.9 con  $p = 2$  (véase el Teorema 4.3.14 para  $p = 2$ ), que se escribe como:



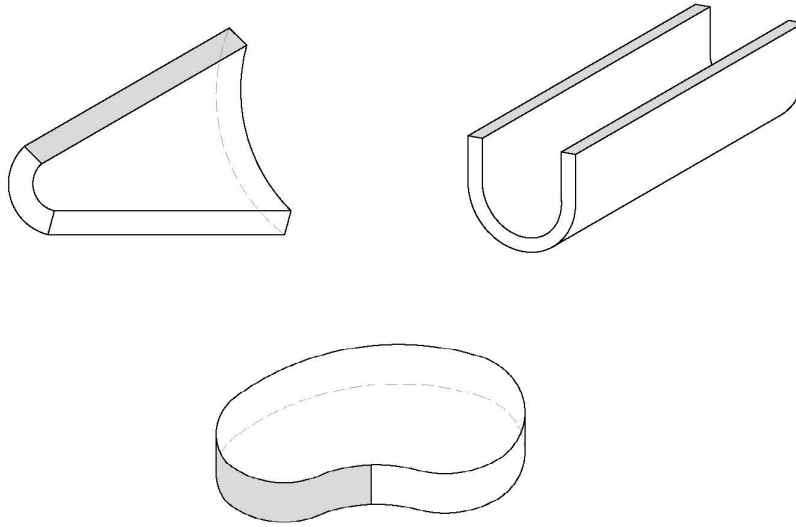


Figura 7.1: Ejemplos de láminas flexurales. La zona sombreada indica el conjunto donde se considera la condición de contorno de fijación.

**Problema 7.2.1.** Hallar  $\mathbf{u}(\varepsilon) : [0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tal que,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\varepsilon)(t, \cdot) &\in V(\Omega) \quad \forall t \in [0, T], \\ \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx &+ \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) \dot{e}_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &= \varepsilon^2 \int_{\Omega} f^i v_i \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \varepsilon^2 \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^i v_i \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega), \text{ c.p.d. en } (0, T), \quad (7.2.1) \\ \mathbf{u}(\varepsilon)(0, \cdot) &= \mathbf{u}_0(\varepsilon)(\cdot), \end{aligned}$$

**Observación 7.2.2.** Nótese que hemos identificado  $f^i \equiv f^{i,2}$  y  $h^i \equiv h^{i,3}$  para simplificar la notación.

Para cada  $\varepsilon > 0$ , supondremos que la condición inicial de las deformaciones linealizadas escaladas es

$$e_{i||j}(\varepsilon)(0, \cdot) = 0, \quad (7.2.2)$$

es decir, el dominio se encuentra en su estado natural sin deformaciones al inicio del periodo de observación.

A continuación presentaremos el resultado principal de este capítulo. Veremos que la incógnita tridimensional escalada  $\mathbf{u}(\varepsilon)$ , solución del Problema 7.2.1, converge cuando  $\varepsilon$  tiende a cero a un límite  $\mathbf{u}$  independiente de la variable transversal  $x_3$ . Además, podremos identificar el promedio de este límite con la solución  $\xi = \bar{\mathbf{u}}$  del Problema 7.1.2.

**Teorema 7.2.3.** *Supongamos que  $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^3(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$  y sea  $\varepsilon_0$  definido como en el Teorema 4.1.4. Consideremos una familia de láminas flexurales de espesor  $2\varepsilon$  que tiende a cero, teniendo cada una la misma superficie media  $S = \boldsymbol{\theta}(\bar{\omega})$ . Supongamos que están sometidas a una condición de contorno de fijación sobre una parte de su cara lateral, con el mismo conjunto  $\boldsymbol{\theta}(\gamma_0)$  como curva media. Además, asumamos (7.2.2) y las hipótesis en los datos establecidas en el Teorema 7.1.3. Para todo  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , sea  $\mathbf{u}(\varepsilon)$  la solución del problema escalado tridimensional 7.2.1. Entonces, existe una función  $\mathbf{u} = (u_i) \in H^1(0, T; [H^1(\Omega)]^3)$ , tal que:*

(a)  $\mathbf{u}(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{u}$  en  $H^1(0, T; [H^1(\Omega)]^3)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

(b)  $\mathbf{u} := (u_i)$  es independiente de la variable transversal  $x_3$ .

Además, el promedio  $\bar{\mathbf{u}} := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{u} dx_3 = \boldsymbol{\xi}$  verifica el Problema 7.1.2.

*Demostración.* Seguiremos la misma estructura que la demostración del Teorema 6.2-1, [30]. Por tanto, dividiremos la demostración en varias partes, enumeradas de (i) a (vi).

(i) *Acotaciones a priori y extracción de subsucesiones convergentes.*

Las normas  $\| \frac{1}{\varepsilon} e_{i||j}(\varepsilon) \|_{H^1(0, T; L^2(\Omega))}$  y  $\| \mathbf{u}(\varepsilon) \|_{H^1(0, T; [H^1(\Omega)]^3)}$  están acotadas independientemente de  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ , donde  $\varepsilon_1 > 0$  viene dado en el Teorema 6.1.5. Consecuentemente, existe una subsucesión, también denotada por  $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$ , y funciones  $e_{i||j}^1 \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $\mathbf{u} \in H^1(0, T; [H^1(\Omega)]^3)$ , verificando que  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  en  $\Gamma_0$ , tales que:

$$\mathbf{u}(\varepsilon) \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ en } H^1(0, T; [H^1(\Omega)]^3) \quad (7.2.3)$$

$$\text{y por tanto } \mathbf{u}(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{u} \text{ en } H^1(0, T; [L^2(\Omega)]^3), \quad (7.2.4)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} e_{i||j}(\varepsilon) \rightharpoonup e_{i||j}^1 \text{ en } H^1(0, T; L^2(\Omega)). \quad (7.2.5)$$

Para la demostración de este paso, tomamos  $\mathbf{v} = \mathbf{u}(\varepsilon)(t, \cdot)$  en (7.2.1) para obtener que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) \dot{e}_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &= \varepsilon^2 \int_{\Omega} f^i u_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \varepsilon^2 \int_{\Gamma_1} h^i u_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma, \text{ c.p.d. en } (0, T), \end{aligned}$$

que es equivalente a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &= \varepsilon^2 \int_{\Omega} f^i u_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \varepsilon^2 \int_{\Gamma_1} h^i u_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma, \text{ c.p.d. en } (0, T). \end{aligned}$$

Ahora, si integramos sobre el intervalo  $[0, T]$  y utilizamos (4.2.11) y (7.2.2), se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left( \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \right) dt \\ & \leq \varepsilon^2 \int_0^T \left( \int_{\Omega} f^i u_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \int_{\Gamma_1} h^i u_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma \right) dt. \end{aligned} \quad (7.2.6)$$

Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (4.3.2), existe una constante  $\hat{c} > 0$  dependiente de las normas  $|f^i|_{0,\Omega}$ ,  $|h^i|_{L^2(\Gamma_1)}$  y la norma del operador traza de  $H^1(\Omega)$  a  $L^2(\Gamma_1)$ , tal que

$$\left| \int_{\Omega} f^i u_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \int_{\Gamma_1} h^i u_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma \right| \leq \hat{c} \|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_{1,\Omega}, \quad (7.2.7)$$

para todo  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  y todo  $t \in [0, T]$ . Por otra parte, utilizando (4.2.10), (4.3.2) y (6.1.14) (véase el Teorema 6.1.5) obtenemos que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \geq g_0^{1/2} C_e |e_{k||l}(\varepsilon)|_{0,\Omega}^2 \\ & \geq g_0^{1/2} C_e C^{-2} \varepsilon^2 \|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_{1,\Omega}^2. \end{aligned} \quad (7.2.8)$$

Entonces las expresiones (7.2.6)–(7.2.8) juntas y la desigualdad de Cauchy-Schwarz implican que

$$g_0^{1/2} C_e C^{-2} \varepsilon^2 \|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_{L^2(0,T;[H^1(\Omega)]^3)}^2 \leq \hat{c} \varepsilon^2 \int_0^T \|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_{1,\Omega} dt \leq \hat{c} \sqrt{T} \varepsilon^2 \|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_{L^2(0,T;[H^1(\Omega)]^3)}.$$

Por tanto, concluimos que existe una constante  $\tilde{k}_1 > 0$  independiente de  $\varepsilon$  tal que,

$$\|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_{L^2(0,T;[H^1(\Omega)]^3)} \leq \tilde{k}_1.$$

Como consecuencia, por las desigualdades (7.2.6)–(7.2.8) podemos confirmar que se verifican las acotaciones de las normas  $\left\| \frac{1}{\varepsilon} e_{i||j}(\varepsilon) \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$ .

A continuación, tomamos  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}(\varepsilon)(t, \cdot)$  en (7.2.1) y tenemos que,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon) \dot{e}_{i||j}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) \dot{e}_{k||l}(\varepsilon) \dot{e}_{i||j}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ & = \varepsilon^2 \int_{\Omega} f^i \dot{u}_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \varepsilon^2 \int_{\Gamma_1} h^i \dot{u}_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma, \quad \text{c.p.d. en } (0, T), \end{aligned}$$

la cual es equivalente a

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) \dot{e}_{k||l}(\varepsilon) \dot{e}_{i||j}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx$$

$$= \varepsilon^2 \int_{\Omega} f^i \dot{u}_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \varepsilon^2 \int_{\Gamma_1} h^i \dot{u}_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma, \text{ c.p.d. en } (0, T).$$

Integrando sobre el intervalo  $[0, T]$  y utilizando (4.2.10) y (7.2.2), se obtiene que

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left( \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) \dot{e}_{k||l}(\varepsilon) \dot{e}_{i||j}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \right) dt \\ & \leq \varepsilon^2 \int_0^T \left( \int_{\Omega} f^i \dot{u}_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \int_{\Gamma_1} h^i \dot{u}_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma \right) dt. \end{aligned} \quad (7.2.9)$$

Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (4.3.2), de nuevo tenemos que existe una constante  $c > 0$  dependiendo de las normas  $|f^i|_{0,\Omega}$ ,  $|h^i|_{L^2(\Gamma_1)}$  y de la norma del operador traza de  $H^1(\Omega)$  a  $L^2(\Gamma^1)$ , tal que

$$\left| \int_{\Omega} f^i \dot{u}_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \int_{\Gamma^1} h^i \dot{u}_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma \right| \leq c \|\dot{\mathbf{u}}(\varepsilon)\|_{1,\Omega}, \quad (7.2.10)$$

para todo  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  y todo  $t \in [0, T]$ . Por otra parte, utilizando (4.2.11), (4.3.2) y (6.1.14) obtenemos que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) \dot{e}_{k||l}(\varepsilon) \dot{e}_{i||j}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \geq g_0^{1/2} C_v |\dot{e}_{k||l}(\varepsilon)|_{0,\Omega}^2 \\ & \geq g_0^{1/2} C_v C^{-2} \varepsilon^2 \|\dot{\mathbf{u}}(\varepsilon)\|_{1,\Omega}^2. \end{aligned} \quad (7.2.11)$$

Por tanto, (7.2.9)–(7.2.11) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz implican que

$$g_0^{1/2} C_v C^{-2} \varepsilon^2 \|\dot{\mathbf{u}}(\varepsilon)\|_{L^2(0,T;[H^1(\Omega)]^3)}^2 \leq c \varepsilon^2 \int_0^T \|\dot{\mathbf{u}}(\varepsilon)\|_{1,\Omega}^2 dt \leq c \sqrt{T} \varepsilon^2 \|\dot{\mathbf{u}}(\varepsilon)\|_{L^2(0,T;[H^1(\Omega)]^3)}.$$

Así, concluimos que existe una constante  $\tilde{k}_2 > 0$  independiente de  $\varepsilon$  tal que

$$\|\dot{\mathbf{u}}(\varepsilon)\|_{L^2(0,T;[H^1(\Omega)]^3)} \leq \tilde{k}_2.$$

Como consecuencia de las desigualdades (7.2.9)–(7.2.11) podemos confirmar que se verifican las acotaciones de las normas  $\left\| \frac{1}{\varepsilon} \dot{e}_{i||j}(\varepsilon) \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$ . Entonces se cumplen las convergencias débiles anunciadas en este paso.

(ii) El límite  $\mathbf{u}$  obtenido en el paso anterior es independiente de la variable transversal  $x_3$  y su promedio  $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{u} dx_3 = \bar{\mathbf{u}} \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times H^2(\omega)$  es tal que  $\bar{u}_i = \partial_\nu \bar{u}_3 = 0$  en  $\gamma_0$  y  $\gamma_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{u}}) = 0$  en  $\omega$  para todo  $t \in [0, T]$ .

Este paso es consecuencia del paso (i) y el Teorema 6.1.3 y con esto, concluimos la demostración del apartado (b) de este teorema.

(iii) Obtenemos la relación entre los límites  $e_{i||j}^1$  hallados en (i) y los límites  $\mathbf{u} := (u_i)$ . Por un lado, por el Teorema 6.1.3 tenemos que  $-\partial_3 e_{\alpha||\beta}^1 = \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u})$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$ . Por otro lado, como consecuencia de la definición de las deformaciones escaladas en (4.2.6)–(4.2.8), se obtienen las convergencias:

$$\varepsilon e_{\alpha||\beta}(\varepsilon; \mathbf{v}) \rightarrow 0 \text{ en } L^2(\Omega), \quad (7.2.12)$$

$$\varepsilon e_{\alpha||3}(\varepsilon; \mathbf{v}) \rightarrow \frac{1}{2} \partial_3 v_\alpha \text{ en } L^2(\Omega), \quad (7.2.13)$$

$$\varepsilon e_{3||3}(\varepsilon; \mathbf{v}) = \partial_3 v_3 \text{ para todo } \varepsilon > 0. \quad (7.2.14)$$

Utilizando la formulación variacional (7.2.1) y teniendo en cuenta (4.1.26), (4.2.4) y (4.2.5), se deduce que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon, \mathbf{v}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) \dot{e}_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon, \mathbf{v}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} (A^{\alpha\beta\sigma\tau}(\varepsilon) e_{\sigma||\tau}(\varepsilon) + A^{\alpha\beta 33}(\varepsilon) e_{3||3}(\varepsilon)) (\varepsilon e_{\alpha||\beta}(\varepsilon; \mathbf{v})) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} 4A^{\alpha 3\sigma 3}(\varepsilon) e_{\sigma||3}(\varepsilon) (\varepsilon e_{\alpha||3}(\varepsilon; \mathbf{v})) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} (A^{33\sigma\tau}(\varepsilon) e_{\sigma||\tau}(\varepsilon) + A^{3333}(\varepsilon) e_{3||3}(\varepsilon)) (\varepsilon e_{3||3}(\varepsilon; \mathbf{v})) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} (B^{\alpha\beta\sigma\tau}(\varepsilon) \dot{e}_{\sigma||\tau}(\varepsilon) + B^{\alpha\beta 33}(\varepsilon) \dot{e}_{3||3}(\varepsilon)) (\varepsilon e_{\alpha||\beta}(\varepsilon; \mathbf{v})) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} 4B^{\alpha 3\sigma 3}(\varepsilon) \dot{e}_{\sigma||3}(\varepsilon) (\varepsilon e_{\alpha||3}(\varepsilon; \mathbf{v})) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} (B^{33\sigma\tau}(\varepsilon) \dot{e}_{\sigma||\tau}(\varepsilon) + B^{3333}(\varepsilon) \dot{e}_{3||3}(\varepsilon)) (\varepsilon e_{3||3}(\varepsilon; \mathbf{v})) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &= \varepsilon^2 \int_{\Omega} f^i v_i \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \varepsilon^2 \int_{\Gamma_1} h^i v_i \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega), \text{ c.p.d. en } (0, T). \end{aligned}$$

Tomamos el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Teniendo en cuenta el comportamiento asintótico de las componentes contravariantes de los tensores de cuarto orden  $A^{ijkl}(\varepsilon)$ ,  $B^{ijkl}(\varepsilon)$  (véase el Teorema 4.2.2),  $g(\varepsilon)$  (véase el Teorema 4.3.1), las convergencias (7.2.12)–(7.2.14) y las convergencias débiles del paso (i), obtenemos la siguiente ecuación integral:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (2\mu a^{\alpha\sigma} e_{\alpha||3}^1 \partial_3 v_\sigma + (\lambda + 2\mu) e_{3||3}^1 \partial_3 v_3) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} \lambda a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}^1 \partial_3 v_3 \sqrt{a} dx \\ &+ \int_{\Omega} (\rho a^{\alpha\sigma} \dot{e}_{\alpha||3}^1 \partial_3 v_\sigma + (\theta + \rho) \dot{e}_{3||3}^1 \partial_3 v_3) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} \theta a^{\alpha\beta} \dot{e}_{\alpha||\beta}^1 \partial_3 v_3 \sqrt{a} dx = 0, \quad (7.2.15) \end{aligned}$$

c.p.d. en  $(0, T)$ . Por un lado, si tomamos  $\mathbf{v} \in V(\Omega)$  tal que  $v_2 = v_3 = 0$  y utilizamos el Teorema 4.3.4, tenemos que

$$2\mu a^{\alpha 1} e_{\alpha||3}^1 + \rho a^{\alpha 1} \dot{e}_{\alpha||3}^1 = 0, \text{ c.p.d. en } (0, T). \quad (7.2.16)$$

Por otra parte, si tomamos  $\mathbf{v} \in V(\Omega)$  tal que  $v_1 = v_3 = 0$  y utilizamos el Teorema 4.3.4, tenemos que

$$2\mu a^{\alpha 2} e_{\alpha||3}^1 + \rho a^{\alpha 2} \dot{e}_{\alpha||3}^1 = 0, \text{ c.p.d. en } (0, T). \quad (7.2.17)$$

Multiplicando (7.2.16) por  $a^{22}$  y (7.2.17) por  $-a^{21}$  y sumando ambas expresiones obtenemos que

$$2\mu (a^{22}a^{11} - a^{21}a^{12}) e_{1||3}^1 + \rho (a^{22}a^{11} - a^{21}a^{12}) \dot{e}_{1||3}^1 = 2\mu a e_{1||3}^1 + \rho a \dot{e}_{1||3}^1 = 0,$$

c.p.d. en  $(0, T)$ , por (4.1.9). Ahora, por la condición inicial (7.2.2) y las convergencias débiles de (i), deducimos que  $e_{1||3}^1(0, \cdot) = 0$  y por tanto,

$$e_{1||3}^1(t) = 0 \text{ en } \Omega, \forall t \in [0, T].$$

Multiplicando (7.2.16) por  $a^{12}$  y (7.2.17) por  $-a^{11}$  y sumando ambas expresiones obtenemos que

$$2\mu a e_{2||3}^1 + \rho a \dot{e}_{2||3}^1 = 0, \text{ c.p.d. en } (0, T).$$

Entonces por la condición inicial (7.2.2) y las convergencias débiles de (i), deducimos que  $e_{2||3}^1(0, \cdot) = 0$  y por tanto,

$$e_{2||3}^1(t) = 0 \text{ en } \Omega, \forall t \in [0, T].$$

Tomando  $\mathbf{v} \in V(\Omega)$  tal que  $v_\alpha = 0$  en (7.2.15), obtenemos que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\lambda a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}^1 + (\lambda + 2\mu) e_{3||3}^1) \partial_3 v_3 \sqrt{a} dx \\ & + \int_{\Omega} (\theta a^{\alpha\beta} \dot{e}_{\alpha||\beta}^1 + (\theta + \rho) \dot{e}_{3||3}^1) \partial_3 v_3 \sqrt{a} dx = 0, \end{aligned}$$

para todo  $v_3 \in H^1(\Omega)$  con  $v_3 = 0$  en  $\Gamma_0$  y c.p.d. en  $(0, T)$ . Aplicando el Teorema 4.3.4, obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$\lambda a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}^1 + (\lambda + 2\mu) e_{3||3}^1 + \theta a^{\alpha\beta} \dot{e}_{\alpha||\beta}^1 + (\theta + \rho) \dot{e}_{3||3}^1 = 0. \quad (7.2.18)$$

**Observación 7.2.4.** Nótese que eliminando la dependencia temporal y la viscosidad, esto es tomando  $\theta = \rho = 0$ , esta ecuación conduce a la estudiada en [30] (página 312, Capítulo 6), esto es, el caso elástico.

Para resolver la ecuación (4.4.21) en el caso más interesante, asumiremos que el coeficiente de viscosidad  $\theta$  es estrictamente positivo. Así, podemos demostrar que esta ecuación es equivalente a

$$\theta e^{-\frac{\lambda}{\theta}t} \frac{\partial}{\partial t} \left( a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}^1 e^{\frac{\lambda}{\theta}t} \right) = -(\theta + \rho) e^{-\frac{\lambda+2\mu}{\theta+\rho}t} \frac{\partial}{\partial t} \left( e_{3||3}^1 e^{\frac{\lambda+2\mu}{\theta+\rho}t} \right).$$

Integrando con respecto a la variable temporal y utilizando (7.2.2) (teniendo en cuenta las convergencias débiles de (i)) hallamos que,

$$e_{3||3}^1 e^{\frac{\lambda+2\mu}{\theta+\rho}t} = -\frac{\theta}{\theta+\rho} \int_0^t e^{(\frac{\lambda+2\mu}{\theta+\rho}-\frac{\lambda}{\theta})s} \frac{\partial}{\partial s} \left( a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}^1(s) e^{\frac{\lambda}{\theta}s} \right) ds.$$

Ahora integrando por partes y simplificando, concluimos que,

$$e_{3||3}^1(t) = -\frac{\theta}{\theta+\rho} \left( a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}^1(t) + \Lambda \int_0^t e^{-k(t-s)} a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}^1(s) ds \right), \quad (7.2.19)$$

en  $\Omega$ ,  $\forall t \in [0, T]$  con  $\Lambda$  y  $k$  constantes definidas en (4.4.13). Además, de (7.2.18) obtenemos que,

$$\dot{e}_{3||3}^1(t) = -\frac{\lambda}{\theta+\rho} a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}^1(t) - \frac{\lambda+2\mu}{\theta+\rho} e_{3||3}^1(t) - \frac{\theta}{\theta+\rho} a^{\alpha\beta} \dot{e}_{\alpha||\beta}^1(t), \quad (7.2.20)$$

en  $\Omega$ , c.t.p.  $t \in (0, T)$ .

(iv) La función  $\bar{\mathbf{u}} := (\bar{u}_i)$  verifica el Problema 7.1.2, el cual tiene solución única por el Teorema 7.1.3. Como consecuencia, las convergencias  $\mathbf{u}(\varepsilon) \rightharpoonup \mathbf{u}$  en  $H^1(0, T; [H^1(\Omega)]^3)$  y  $\mathbf{u}(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{u}$  en  $H^1(0, T; [L^2(\Omega)]^3)$  se verifican para toda la familia  $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$  (como la solución  $\bar{\mathbf{u}}$  es única, también lo es  $\mathbf{u}$  ya que es independiente de  $x_3$  por el paso (ii)).

La función  $\bar{\mathbf{u}}$  pertenece al espacio  $V_F(\omega)$ , para todo  $t \in [0, T]$  por el paso (ii). Dado  $\boldsymbol{\eta} \in V_F(\omega)$ , sea  $\mathbf{v}(\varepsilon) = (v_i(\varepsilon))$  definido en casi todo punto de  $\Omega$  para todo  $\varepsilon > 0$  como sigue (al igual que el caso elástico seguiremos la idea tomada de [105]):

$$v_\alpha(\varepsilon) := \eta_\alpha - \varepsilon x_3 \theta_\alpha, \text{ con } \theta_\alpha := \partial_\alpha \eta_3 + 2b_\alpha^\sigma \eta_\sigma, \quad (7.2.21)$$

$$v_3(\varepsilon) := \eta_3. \quad (7.2.22)$$

Entonces, tomando ese  $\mathbf{v}(\varepsilon) \in V(\Omega)$  tenemos que  $e_{3||3}(\varepsilon; \mathbf{v}(\varepsilon)) = 0$  para todo  $\varepsilon > 0$  (véase (4.2.8)). Probemos que para una función  $\boldsymbol{\eta} \in V_F(\omega)$ , identificada donde sea necesario con una función en el espacio  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)$ , se verifica lo siguiente:

$$\mathbf{v}(\varepsilon) \rightarrow \boldsymbol{\eta} \text{ en } [H^1(\Omega)]^3, \quad (7.2.23)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha||\beta}(\varepsilon; \mathbf{v}(\varepsilon)) \rightarrow (-x_3 \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})) \text{ en } L^2(\Omega), \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (7.2.24)$$

$$\left( \frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha||3}(\varepsilon; \mathbf{v}(\varepsilon)) \right)_{\varepsilon>0} \text{ converge en } L^2(\Omega). \quad (7.2.25)$$

La primera relación se verifica por la definición de  $\mathbf{v}(\varepsilon)$  en (7.2.21)–(7.2.22). Utilizando el hecho de que  $\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) = 0$  (ya que  $\boldsymbol{\eta} \in V_F(\omega)$ ) obtenemos tras algunos cálculos (véase (6.1.3)) que,

$$e_{\alpha||\beta}^1(\varepsilon; \mathbf{v}(\varepsilon)) := \frac{1}{\varepsilon} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}(\varepsilon)) + x_3 b_{\beta|\alpha}^\sigma v_\sigma(\varepsilon) + x_3 b_\alpha^\sigma b_{\sigma\beta} v_3(\varepsilon)$$



$$\begin{aligned}
&= -x_3 \left( \frac{1}{2} (\partial_\beta \theta_\alpha + \partial_\alpha \theta_\beta) - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \theta_\sigma - b_{\beta|\alpha}^\sigma \eta_\sigma - b_\alpha^\sigma b_{\sigma\beta} \eta_3 \right) - \varepsilon x_3^2 b_{\beta|\alpha}^\sigma \theta_\sigma \\
&= -x_3 \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) - \varepsilon x_3^2 b_{\beta|\alpha}^\sigma \theta_\sigma.
\end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando el Teorema 6.1.2 tenemos que

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha||\beta}(\varepsilon; \mathbf{v}(\varepsilon)) - e_{\alpha||\beta}^1(\varepsilon; \mathbf{v}(\varepsilon)) \right|_{0,\Omega} \leq c_1 \varepsilon \sum_{\alpha} |v_\alpha(\varepsilon)|_{0,\Omega},$$

y por tanto,

$$\frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha||\beta}(\varepsilon; \mathbf{v}(\varepsilon)) \rightarrow -x_3 \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \in L^2(\Omega).$$

También podemos obtener después de algunos cálculos que

$$\frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha||3}(\varepsilon; \mathbf{v}(\varepsilon)) = -\frac{1}{\varepsilon} (\Gamma_{\alpha 3}^\sigma(\varepsilon) + b_\alpha^\sigma) \eta_\sigma + x_3 \Gamma_{\alpha 3}^\sigma(\varepsilon) \theta_\sigma,$$

que junto con el comportamiento asintótico de las funciones  $\Gamma_{\alpha 3}^\sigma(\varepsilon)$  (véase el Teorema 4.3.1), implican que  $(\frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha||3}(\varepsilon; \mathbf{v}(\varepsilon)))_{\varepsilon>0}$  converge en  $L^2(\Omega)$ .

Ahora, fijamos  $\boldsymbol{\eta} \in V_F(\omega)$  y tomemos  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\varepsilon)$  en (7.2.1), con  $\mathbf{v}(\varepsilon) = (v_i(\varepsilon))$  definido como en (7.2.21)–(7.2.22), para obtener que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v}(\varepsilon)) \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) \dot{e}_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v}(\varepsilon)) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\
&= \int_{\Omega} \left( A^{\alpha\beta\sigma\tau}(\varepsilon) \left( \frac{1}{\varepsilon} e_{\sigma||\tau}(\varepsilon) \right) + A^{\alpha\beta 33}(\varepsilon) \left( \frac{1}{\varepsilon} e_{3||3}(\varepsilon) \right) \right) \left( \frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha||\beta}(\varepsilon; \mathbf{v}(\varepsilon)) \right) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\
&\quad + \int_{\Omega} 4A^{\alpha 3\sigma 3}(\varepsilon) \left( \frac{1}{\varepsilon} e_{\sigma||3}(\varepsilon) \right) \left( \frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha||3}(\varepsilon; \mathbf{v}(\varepsilon)) \right) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \left( A^{33\sigma\tau}(\varepsilon) \left( \frac{1}{\varepsilon} e_{\sigma||\tau}(\varepsilon) \right) + A^{3333}(\varepsilon) \left( \frac{1}{\varepsilon} e_{3||3}(\varepsilon) \right) \right) \left( \frac{1}{\varepsilon} e_{3||3}(\varepsilon; \mathbf{v}(\varepsilon)) \right) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \left( B^{\alpha\beta\sigma\tau}(\varepsilon) \left( \frac{1}{\varepsilon} \dot{e}_{\sigma||\tau}(\varepsilon) \right) + B^{\alpha\beta 33}(\varepsilon) \left( \frac{1}{\varepsilon} \dot{e}_{3||3}(\varepsilon) \right) \right) \left( \frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha||\beta}(\varepsilon; \mathbf{v}(\varepsilon)) \right) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\
&\quad + \int_{\Omega} 4B^{\alpha 3\sigma 3}(\varepsilon) \left( \frac{1}{\varepsilon} \dot{e}_{\sigma||3}(\varepsilon) \right) \left( \frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha||3}(\varepsilon; \mathbf{v}(\varepsilon)) \right) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \left( B^{33\sigma\tau}(\varepsilon) \left( \frac{1}{\varepsilon} \dot{e}_{\sigma||\tau}(\varepsilon) \right) + B^{3333}(\varepsilon) \left( \frac{1}{\varepsilon} \dot{e}_{3||3}(\varepsilon) \right) \right) \left( \frac{1}{\varepsilon} e_{3||3}(\varepsilon; \mathbf{v}(\varepsilon)) \right) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\
&= \int_{\Omega} f^i v_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \int_{\Gamma_1} h^i v_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma.
\end{aligned}$$

Tomemos el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Por el comportamiento asintótico de las funciones  $\mathbf{v}(\varepsilon)$  y  $\frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha||\beta}(\varepsilon; \mathbf{v}(\varepsilon))$  en (7.2.23)–(7.2.25),  $A^{ijkl}(\varepsilon)$ ,  $B^{ijkl}(\varepsilon)$ ,  $g(\varepsilon)$  (véanse los Teoremas 4.2.2 y

4.3.1), las convergencias débiles del paso (i) y que  $e_{\alpha||\beta}^1 = 0$  (véase el paso (iii)) se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A^{\alpha\beta\sigma\tau}(0) e_{\sigma||\tau}^1(-x_3 \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} A^{\alpha\beta 33}(0) e_{3||3}^1(-x_3 \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})) \sqrt{a} dx \\ & + \int_{\Omega} B^{\alpha\beta\sigma\tau}(0) \dot{e}_{\sigma||\tau}^1(-x_3 \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} B^{\alpha\beta 33}(0) \dot{e}_{3||3}^1(-x_3 \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})) \sqrt{a} dx \\ & = \left( \int_{\Omega} f^i \eta_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_1} h^i \eta_i \sqrt{a} d\Gamma \right). \end{aligned}$$

Entonces, utilizando las relaciones (7.2.19)–(7.2.20) del paso (iii), obtenemos que,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( \left( \lambda - \frac{\theta}{\theta + \rho} (\theta \Lambda + \lambda) \right) a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \right) e_{\sigma||\tau}^1(-x_3 \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})) \sqrt{a} dx \\ & + \int_{\Omega} \left( \frac{\theta \rho}{\theta + \rho} a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \frac{\rho}{2} (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \right) \dot{e}_{\sigma||\tau}^1(-x_3 \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})) \sqrt{a} dx \\ & - \int_{\Omega} \frac{(\theta \Lambda)^2}{\theta + \rho} \left( \int_0^t e^{-k(t-s)} a^{\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}^1(s) ds \right) a^{\alpha\beta} (-x_3 \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta})) \sqrt{a} dx \\ & = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} x_3 a^{\alpha\beta\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}^1 \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} x_3 b^{\alpha\beta\sigma\tau} \dot{e}_{\sigma||\tau}^1 \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t e^{-k(t-s)} \left( \int_{\Omega} x_3 c^{\alpha\beta\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}^1(s) \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx \right) ds \\ & = \int_{\omega} p^i \eta_i \sqrt{a} dy, \end{aligned}$$

con  $p^i$  definido en (7.1.2) y donde  $a^{\alpha\beta\sigma\tau}$ ,  $b^{\alpha\beta\sigma\tau}$  y  $c^{\alpha\beta\sigma\tau}$  denotan las componentes contravariantes de los tensores bidimensionales de cuarto orden definidos en (4.4.10)–(4.4.12). Ahora, recordemos que en el paso (iii) obtuvimos que  $-\partial_3 e_{\alpha||\beta}^1 = \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u})$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$ . Por tanto, como  $\mathbf{u}$  es independiente de  $x_3$  (véase el paso (ii)), tenemos que las funciones  $e_{\alpha||\beta}^1$  son de la forma

$$e_{\alpha||\beta}^1 = \Upsilon_{\alpha\beta} - x_3 \rho_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{u}}), \quad (7.2.26)$$

con  $\Upsilon_{\alpha\beta} \in H^1(0, T; L^2(\omega))$  (independientes de  $x_3$ ). Por tanto, de la ecuación anterior hallamos que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} x_3^2 a^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{u}}) \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} x_3^2 b^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\alpha\beta}(\dot{\bar{\mathbf{u}}}) \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx \\ & - \frac{1}{2} \int_0^t e^{-k(t-s)} \left( \int_{\Omega} x_3^2 c^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{u}}(s)) \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx \right) ds \\ & = \int_{\omega} p^i \eta_i \sqrt{a} dy, \end{aligned} \quad (7.2.27)$$

y como  $\int_{-1}^1 x_3^2 dx_3 = \frac{2}{3}$ , concluimos que  $\bar{\mathbf{u}}$  verifica el Problema 7.1.2.

(v) Se verifican las convergencias fuertes  $\frac{1}{\varepsilon}e_{i||j}(\varepsilon) \rightarrow e_{i||j}^1$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$ . Además, como los límites  $e_{i||j}^1$  son únicos, entonces estas convergencias se verifican para toda la familia  $(\frac{1}{\varepsilon}e_{i||j}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ .

En efecto, definamos:

$$\begin{aligned}\Psi(\varepsilon) &:= \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) \left( \frac{1}{\varepsilon}e_{k||l}(\varepsilon) - e_{k||l}^1 \right) \left( \frac{1}{\varepsilon}e_{i||j}(\varepsilon) - e_{i||j}^1 \right) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &\quad + \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) \left( \frac{1}{\varepsilon}\dot{e}_{k||l}(\varepsilon) - \dot{e}_{k||l}^1 \right) \left( \frac{1}{\varepsilon}e_{i||j}(\varepsilon) - e_{i||j}^1 \right) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &= \int_{\Omega} f^i u_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \int_{\Gamma_1} h^i u_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) \left( \frac{2}{\varepsilon}e_{k||l}(\varepsilon) - e_{k||l}^1 \right) e_{i||j}^1 \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &\quad + \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) \left( \dot{e}_{k||l}^1 e_{i||j}^1 - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} (e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}^1) \right) \sqrt{g(\varepsilon)} dx. \quad (7.2.28)\end{aligned}$$

Por un lado tenemos que,

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) \left( \frac{1}{\varepsilon}e_{k||l}(\varepsilon) - e_{k||l}^1 \right) \left( \frac{1}{\varepsilon}e_{i||j}(\varepsilon) - e_{i||j}^1 \right) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) \left( \frac{1}{\varepsilon}e_{k||l}(\varepsilon) - e_{k||l}^1 \right) \left( \frac{1}{\varepsilon}e_{i||j}(\varepsilon) - e_{i||j}^1 \right) \sqrt{g(\varepsilon)} dx = \Psi(\varepsilon),\end{aligned}$$

c.t.p.  $t \in (0, T)$ . Integrando con respecto a la variable temporal en el intervalo  $[0, T]$ , utilizando (4.2.11) y (7.2.2) se tiene que,

$$\int_0^T \left( \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) \left( \frac{1}{\varepsilon}e_{k||l}(\varepsilon) - e_{k||l}^1 \right) \left( \frac{1}{\varepsilon}e_{i||j}(\varepsilon) - e_{i||j}^1 \right) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \right) dt \leq \int_0^T \Psi(\varepsilon) dt.$$

Ahora, por (4.2.10) y (4.3.2) obtenemos que,

$$C_e^{-1} g_0^{1/2} \sum_{i,j} \left| \frac{1}{\varepsilon}e_{i||j}(\varepsilon) - e_{i||j}^1 \right|_{0,\Omega}^2 \leq \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) \left( \frac{1}{\varepsilon}e_{k||l}(\varepsilon) - e_{k||l}^1 \right) \left( \frac{1}{\varepsilon}e_{i||j}(\varepsilon) - e_{i||j}^1 \right) \sqrt{g(\varepsilon)} dx.$$

Por tanto, junto con la desigualdad anterior tenemos que,

$$C_e^{-1} g_0^{1/2} \int_0^T \left( \sum_{i,j} \left| \frac{1}{\varepsilon}e_{i||j}(\varepsilon) - e_{i||j}^1 \right|_{0,\Omega}^2 \right) dt \leq \int_0^T \Psi(\varepsilon) dt. \quad (7.2.29)$$

Tomemos el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  en (7.2.28). Teniendo en cuenta las convergencias débiles estudiadas en (i) y los comportamientos asintóticos de las funciones  $A^{ijkl}(\varepsilon)$ ,  $B^{ijkl}(\varepsilon)$  y  $g(\varepsilon)$  (véanse los Teoremas 4.2.2 y 4.3.1), se tiene que

$$\Psi := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Psi(\varepsilon) = \int_{\Omega} f^i u_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_1} h^i u_i \sqrt{a} d\Gamma$$

$$-\int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||t}^1 e_{i||j}^1 \sqrt{a} dx - \int_{\Omega} B^{ijkl}(0) \dot{e}_{k||t}^1 e_{i||j}^1 \sqrt{a} dx, \quad (7.2.30)$$

*c.t.p.*  $t \in (0, T)$ . Ahora, por las expresiones de  $A^{ijkl}(0)$  y  $B^{ijkl}(0)$  (véase el Teorema 4.2.2) y que  $e_{\alpha||3}^1 = 0$  (véase el paso (iii)), se obtiene que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||t}^1 e_{i||j}^1 \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} B^{ijkl}(0) \dot{e}_{k||t}^1 e_{i||j}^1 \sqrt{a} dx \\ &= \int_{\Omega} (\lambda a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma})) e_{\sigma||\tau}^1 e_{\alpha||\beta}^1 \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} \lambda a^{\alpha\beta} e_{3||3}^1 e_{\alpha||\beta}^1 \sqrt{a} dx \\ &+ \int_{\Omega} (\lambda a^{\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}^1 + (\lambda + 2\mu) e_{3||3}^1) e_{3||3}^1 \sqrt{a} dx \\ &+ \int_{\Omega} \left( \theta a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \frac{\rho}{2} (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \right) \dot{e}_{\sigma||\tau}^1 e_{\alpha||\beta}^1 \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} \theta a^{\alpha\beta} \dot{e}_{3||3}^1 e_{\alpha||\beta}^1 \sqrt{a} dx \\ &+ \int_{\Omega} (\theta a^{\sigma\tau} \dot{e}_{\sigma||\tau}^1 + (\theta + \rho) \dot{e}_{3||3}^1) e_{3||3}^1 \sqrt{a} dx, \quad c.t.p. \quad t \in (0, T). \end{aligned}$$

Substituyendo las relaciones (7.2.19)–(7.2.20) estudiadas en el paso (iii), se tiene que esta expresión es equivalente a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( \left( \lambda - \frac{\theta}{\theta + \rho} (\theta\Lambda + \lambda) \right) a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \right) e_{\sigma||\tau}^1 e_{\alpha||\beta}^1 \sqrt{a} dx \\ &+ \int_{\Omega} \left( \frac{\theta\rho}{\theta + \rho} a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \frac{\rho}{2} (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \right) \dot{e}_{\sigma||\tau}^1 e_{\alpha||\beta}^1 \sqrt{a} dx \\ &- \int_{\Omega} \frac{(\theta\Lambda)^2}{\theta + \rho} \int_0^t e^{-k(t-s)} a^{\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}^1(s) ds a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}^1(t) \sqrt{a} dx, \end{aligned}$$

y así, de (7.2.30) deducimos que

$$\begin{aligned} \Psi &= \int_{\omega} p^i \bar{u}_i \sqrt{a} dy - \frac{1}{2} \int_{\Omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}^1 e_{\alpha||\beta}^1 \sqrt{a} dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \dot{e}_{\sigma||\tau}^1 e_{\alpha||\beta}^1 \sqrt{a} dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\Omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}^1(s) e_{\alpha||\beta}^1(t) \sqrt{a} dx ds, \quad c.t.p. \quad t \in (0, T), \end{aligned} \quad (7.2.31)$$

con  $a^{\alpha\beta\sigma\tau}$ ,  $b^{\alpha\beta\sigma\tau}$  y  $c^{\alpha\beta\sigma\tau}$  definidos en (4.4.10)–(4.4.12). Ahora, por (7.2.26), se tiene que,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}^1 e_{\alpha||\beta}^1 \sqrt{a} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \dot{e}_{\sigma||\tau}^1 e_{\alpha||\beta}^1 \sqrt{a} dx \\ &- \frac{1}{2} \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\Omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}^1(s) e_{\alpha||\beta}^1(t) \sqrt{a} dx ds, \\ &= \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \Upsilon_{\sigma\tau} \Upsilon_{\alpha\beta} \sqrt{a} dy + \frac{1}{3} \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\sigma\tau}(\bar{\mathbf{u}}) \rho_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{u}}) \sqrt{a} dy + \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \dot{\Upsilon}_{\sigma\tau} \Upsilon_{\alpha\beta} \sqrt{a} dy \\ &+ \frac{1}{3} \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\sigma\tau}(\dot{\bar{\mathbf{u}}}) \rho_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{u}}) \sqrt{a} dy - \int_0^t e^{-k(t-s)} \left( \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \Upsilon_{\sigma\tau}(s) \Upsilon_{\alpha\beta}(t) \sqrt{a} dy \right) ds \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{3} \int_0^t e^{-k(t-s)} \left( \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\sigma\tau}(\bar{\mathbf{u}}(s)) \rho_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{u}}(t)) \sqrt{a} dy \right) ds, \text{ c.p.d. en } (0, T). \quad (7.2.32)$$

Por el paso (iv),  $\bar{\mathbf{u}}$  verifica la ecuación del Problema 7.1.2, luego de (7.2.31) deducimos que,

$$\begin{aligned} \Psi = & - \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \Upsilon_{\sigma\tau} \Upsilon_{\alpha\beta} \sqrt{a} dy - \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \dot{\Upsilon}_{\sigma\tau} \Upsilon_{\alpha\beta} \sqrt{a} dy \\ & + \int_0^t e^{-k(t-s)} \left( \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \Upsilon_{\sigma\tau}(s) \Upsilon_{\alpha\beta}(t) \sqrt{a} dy \right) ds, \text{ c.p.d. en } (0, T). \end{aligned} \quad (7.2.33)$$

Por (7.2.29) tenemos que  $\int_0^T \Psi(\varepsilon) dt \geq 0$  para todo  $\varepsilon > 0$ , entonces  $\int_0^T \Psi dt \geq 0$ . Para probar la desigualdad opuesta, definamos un tensor  $\Upsilon := (\Upsilon_{ij}) \in \mathbb{S}^3$ , tal que  $\Upsilon_{\alpha\beta}$  denotan los elementos introducidos en la relación (7.2.26),  $\Upsilon_{\alpha 3} := 0$  y donde  $\Upsilon_{33} \in H^1(0, T; L^2(\omega))$  viene dado por la expresión,

$$\Upsilon_{33}(t) := -\frac{\theta}{\theta + \rho} \left( a^{\alpha\beta} \Upsilon_{\alpha\beta}(t) + \Lambda \int_0^t e^{-k(t-s)} a^{\alpha\beta} \Upsilon_{\alpha\beta}(s) ds \right), \quad (7.2.34)$$

en  $\Omega$ ,  $\forall t \in [0, T]$ , y con  $\Lambda$  y  $k$  definidos en (4.4.13). Como consecuencia, tenemos que

$$\dot{\Upsilon}_{33}(t) = -\frac{\lambda}{\theta + \rho} a^{\alpha\beta} \Upsilon_{\alpha\beta}(t) - \frac{\lambda + 2\mu}{\theta + \rho} \Upsilon_{33}(t) - \frac{\theta}{\theta + \rho} a^{\alpha\beta} \dot{\Upsilon}_{\alpha\beta}(t), \quad (7.2.35)$$

en  $\Omega$ , c.t.p.  $t \in (0, T)$ . Teniendo esto en cuenta y utilizando las expresiones de  $A^{ijkl}(0)$  y  $B^{ijkl}(0)$  (véase el Teorema 4.2.2), tenemos que,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) \Upsilon_{kl} \Upsilon_{ij} \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} B^{ijkl}(0) \dot{\Upsilon}_{kl} \Upsilon_{ij} \sqrt{a} dx \\ &= \int_{\Omega} (\lambda a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma})) \Upsilon_{\sigma\tau} \Upsilon_{\alpha\beta} \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} \lambda a^{\alpha\beta} \Upsilon_{33} \Upsilon_{\alpha\beta} \sqrt{a} dx \\ &+ \int_{\Omega} (\lambda a^{\sigma\tau} \Upsilon_{\sigma\tau} + (\lambda + 2\mu) \Upsilon_{33}) \Upsilon_{33} \sqrt{a} dx \\ &+ \int_{\Omega} \left( \theta a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \frac{\rho}{2} (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \right) \dot{\Upsilon}_{\sigma\tau} \Upsilon_{\alpha\beta} \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} \theta a^{\alpha\beta} \dot{\Upsilon}_{33} \Upsilon_{\alpha\beta} \sqrt{a} dx \\ &+ \int_{\Omega} \left( \theta a^{\sigma\tau} \dot{\Upsilon}_{\sigma\tau} + (\theta + \rho) \dot{\Upsilon}_{33} \right) \Upsilon_{33} \sqrt{a} dx, \text{ c.t.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (7.2.36)$$

la cual, utilizando las expresiones (7.2.34)–(7.2.35), nos conduce a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( \left( \lambda - \frac{\theta}{\theta + \rho} (\theta \Lambda + \lambda) \right) a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \right) \Upsilon_{\sigma\tau} \Upsilon_{\alpha\beta} \sqrt{a} dx \\ &+ \int_{\Omega} \left( \frac{\theta \rho}{\theta + \rho} a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \frac{\rho}{2} (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \right) \dot{\Upsilon}_{\sigma\tau} \Upsilon_{\alpha\beta} \sqrt{a} dx \end{aligned}$$

$$- \int_{\Omega} \frac{(\theta\Lambda)^2}{\theta + \rho} \left( \int_0^t e^{-k(t-s)} a^{\sigma\tau} \Upsilon_{\sigma\tau}(s) ds \right) a^{\alpha\beta} \Upsilon_{\alpha\beta}(t) \sqrt{a} dx, \quad (7.2.37)$$

y así,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) \Upsilon_{kl} \Upsilon_{ij} \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} B^{ijkl}(0) \dot{\Upsilon}_{kl} \Upsilon_{ij} \sqrt{a} dx \\ &= \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \Upsilon_{\sigma\tau} \Upsilon_{\alpha\beta} \sqrt{a} dy + \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \dot{\Upsilon}_{\sigma\tau} \Upsilon_{\alpha\beta} \sqrt{a} dy \\ & \quad - \int_0^t e^{-k(t-s)} \left( \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \Upsilon_{\sigma\tau}(s) \Upsilon_{\alpha\beta}(t) \sqrt{a} dy \right) ds, \text{ c.p.d. en } (0, T). \end{aligned}$$

Por tanto, de (7.2.33) deducimos que,

$$\Psi = - \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) \Upsilon_{kl} \Upsilon_{ij} \sqrt{a} dx - \int_{\Omega} B^{ijkl}(0) \dot{\Upsilon}_{kl} \Upsilon_{ij} \sqrt{a} dx. \quad (7.2.38)$$

Ahora bien, dado que las funciones  $\Upsilon_{\alpha\beta}$  son independientes de  $x_3$  y  $e_{i||j}^1(0, \cdot) = 0$  por (7.2.2) y las convergencias débiles obtenidas en el paso (i), entonces  $\rho_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{u}}(0, \cdot))$  debe ser cero y, como consecuencia,  $\Upsilon_{\alpha\beta}(0, \cdot) = 0$ . Además, por (7.2.34) tenemos que  $\Upsilon_{33}(0, \cdot) = 0$ . Por tanto, si integramos (7.2.38) sobre el intervalo  $[0, T]$  y tenemos en cuenta las condiciones iniciales  $\Upsilon_{ij}(0, \cdot) = 0$  y la elipticidad de los tensores  $(A^{ijkl}(0))$  y  $(B^{ijkl}(0))$  (véase (4.2.12)), se tiene que  $\int_0^T \Psi(s) ds \leq 0$ , por lo que concluimos que,

$$\int_0^T \Psi(s) ds = 0.$$

Por tanto, por (7.2.29) podemos afirmar que se verifican las convergencias fuertes  $\frac{1}{\varepsilon} e_{i||j}(\varepsilon) \rightarrow e_{i||j}^1$  en  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Por otra parte, definimos:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(\varepsilon) &:= \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) \left( \frac{1}{\varepsilon} e_{k||l}(\varepsilon) - e_{k||l}^1 \right) \left( \frac{1}{\varepsilon} \dot{e}_{i||j}(\varepsilon) - \dot{e}_{i||j}^1 \right) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ & \quad + \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) \left( \frac{1}{\varepsilon} \dot{e}_{k||l}(\varepsilon) - \dot{e}_{k||l}^1 \right) \left( \frac{1}{\varepsilon} \dot{e}_{i||j}(\varepsilon) - \dot{e}_{i||j}^1 \right) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ &= \int_{\Omega} f^i \dot{u}_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \int_{\Gamma_1} h^i \dot{u}_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma \\ & \quad + \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) \left( e_{k||l}^1 \dot{e}_{i||j}^1 - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} (e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}^1) \right) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ & \quad - \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) \left( \frac{2}{\varepsilon} \dot{e}_{k||l}(\varepsilon) - \dot{e}_{k||l}^1 \right) \dot{e}_{i||j}^1 \sqrt{g(\varepsilon)} dx. \end{aligned}$$

Fijándonos en la primera igualdad tenemos que,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) \left( \frac{1}{\varepsilon} e_{k||l}(\varepsilon) - e_{k||l}^1 \right) \left( \frac{1}{\varepsilon} e_{i||j}(\varepsilon) - e_{i||j}^1 \right) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ & + \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) \left( \frac{1}{\varepsilon} \dot{e}_{k||l}(\varepsilon) - \dot{e}_{k||l}^1 \right) \left( \frac{1}{\varepsilon} \dot{e}_{i||j}(\varepsilon) - \dot{e}_{i||j}^1 \right) \sqrt{g(\varepsilon)} dx = \tilde{\Psi}(\varepsilon), \text{ c.t.p. } t \in (0, T). \end{aligned}$$

Integrando con respecto a la variable temporal sobre el intervalo  $[0, T]$ , utilizando (4.2.10) y (7.2.2) obtenemos que,

$$\int_0^T \left( \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) \left( \frac{1}{\varepsilon} \dot{e}_{k||l}(\varepsilon) - \dot{e}_{k||l}^1 \right) \left( \frac{1}{\varepsilon} \dot{e}_{i||j}(\varepsilon) - \dot{e}_{i||j}^1 \right) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \right) dt \leq \int_0^T \tilde{\Psi}(\varepsilon) dt.$$

Ahora, por (4.2.11) y (4.3.2) se tiene que,

$$C_v^{-1} g_0^{1/2} \sum_{i,j} \left| \frac{1}{\varepsilon} \dot{e}_{i||j}(\varepsilon) - \dot{e}_{i||j}^1 \right|_{0,\Omega}^2 \leq \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) \left( \frac{1}{\varepsilon} \dot{e}_{k||l}(\varepsilon) - \dot{e}_{k||l}^1 \right) \left( \frac{1}{\varepsilon} \dot{e}_{i||j}(\varepsilon) - \dot{e}_{i||j}^1 \right) \sqrt{g(\varepsilon)} dx.$$

Por tanto, junto con la desigualdad anterior se deduce que,

$$C_v^{-1} g_0^{1/2} \int_0^T \left( \sum_{i,j} \left| \frac{1}{\varepsilon} \dot{e}_{i||j}(\varepsilon)(t) - \dot{e}_{i||j}^1(t) \right|_{0,\Omega}^2 \right) dt \leq \int_0^T \tilde{\Psi}(\varepsilon) dt, \quad (7.2.39)$$

cuya expresión es similar a (7.2.29). Por tanto, utilizando argumentos similares, deducimos que,

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi} &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\Psi}(\varepsilon) = \int_{\Omega} f^i \dot{u}_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_1} h^i \dot{u}_i \sqrt{a} d\Gamma \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}^1 \dot{e}_{\alpha||\beta}^1 \sqrt{a} dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \dot{e}_{\sigma||\tau}^1 \dot{e}_{\alpha||\beta}^1 \sqrt{a} dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\Omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}^1(s) \dot{e}_{\alpha||\beta}^1(t) \sqrt{a} dx ds, \text{ c.t.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (7.2.40)$$

Ahora, realizando cálculos similares a los hechos anteriormente, teniendo en cuenta la derivada temporal de la expresión (7.2.26) y tomando  $\boldsymbol{\eta} = \dot{\mathbf{u}}$  en (7.2.27), hallamos que,

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi} &= - \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \Upsilon_{\sigma\tau} \dot{\Upsilon}_{\alpha\beta} \sqrt{a} dy - \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \dot{\Upsilon}_{\sigma\tau} \dot{\Upsilon}_{\alpha\beta} \sqrt{a} dy \\ & + \int_0^t e^{-k(t-s)} \left( \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \Upsilon_{\sigma\tau}(s) \dot{\Upsilon}_{\alpha\beta}(t) \sqrt{a} dy \right) ds, \text{ c.p.d. en } (0, T). \end{aligned} \quad (7.2.41)$$



Nuevamente, teniendo en cuenta la definición del tensor  $\Upsilon := (\Upsilon_{ij}) \in \mathbb{S}^3$  donde  $\Upsilon_{\alpha 3} = 0$  y  $\Upsilon_{33}$  viene dado por (7.2.34) y repitiendo cálculos análogos a los realizados en (7.2.36)–(7.2.37) hallamos que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) \Upsilon_{kl} \dot{\Upsilon}_{ij} \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} B^{ijkl}(0) \dot{\Upsilon}_{kl} \dot{\Upsilon}_{ij} \sqrt{a} dx \\ &= \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \Upsilon_{\sigma\tau} \dot{\Upsilon}_{\alpha\beta} \sqrt{a} dy + \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \dot{\Upsilon}_{\sigma\tau} \dot{\Upsilon}_{\alpha\beta} \sqrt{a} dy \\ & \quad - \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \Upsilon_{\sigma\tau}(s) \dot{\Upsilon}_{\alpha\beta}(t) \sqrt{a} dy ds, \text{ c.p.d. en } (0, T). \end{aligned}$$

Por tanto, de (7.2.41) obtenemos que,

$$\tilde{\Psi} = - \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) \Upsilon_{kl} \dot{\Upsilon}_{ij} \sqrt{a} dx - \int_{\Omega} B^{ijkl}(0) \dot{\Upsilon}_{kl} \dot{\Upsilon}_{ij} \sqrt{a} dx. \quad (7.2.42)$$

Si integramos (7.2.42) en  $[0, T]$  y tenemos en cuenta las condiciones iniciales  $\Upsilon_{ij}(0, \cdot) = 0$  y la elipticidad de los tensores  $(A^{ijkl}(0))$  y  $(B^{ijkl}(0))$  (véase (4.2.12)), se tiene que  $\int_0^T \tilde{\Psi}(s) ds \leq 0$  y así concluimos que

$$\int_0^T \tilde{\Psi}(s) ds = 0.$$

Por tanto, por (7.2.39) tenemos que se verifican las convergencias fuertes  $\frac{1}{\varepsilon} \dot{e}_{i||j}(\varepsilon) \rightarrow \dot{e}_{i||j}^1$  en  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . De esta forma, concluimos que  $\frac{1}{\varepsilon} e_{i||j}(\varepsilon) \rightarrow e_{i||j}^1$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$ , cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . En particular, esta convergencia implica que  $\frac{1}{\varepsilon} e_{i||j}(\varepsilon) \rightarrow e_{i||j}^1$  en  $L^2(\Omega)$  para todo  $t \in [0, T]$ . Entonces, si tomamos el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  en la primera igualdad de (7.2.28) se deduce que  $\Psi = 0$ . Por tanto, aplicando el Teorema 4.3.15, podemos asegurar que la ecuación (7.2.33) (con  $\Psi = 0$ ) implica que  $\Upsilon_{\alpha\beta}(t) = 0$  para todo  $t \in [0, T]$ . Esto además, nos conduce a que (véase (7.2.26)),

$$e_{\alpha||\beta}^1 = -x_3 \rho_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{u}}), \quad (7.2.43)$$

es decir, las funciones  $e_{\alpha||\beta}^1$  están unívocamente determinadas, ya que  $\bar{\mathbf{u}}$  es única (véase el paso (iv)). Como consecuencia, por las relaciones halladas en (iii) obtenemos que las funciones  $e_{i||3}$  también son únicas. Entonces, las convergencias fuertes obtenidas en este paso se verifican para toda la familia  $(\frac{1}{\varepsilon} e_{i||j}(\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$ .

(vi) *Se verifica la convergencia fuerte  $\mathbf{u}(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{u}$  en  $H^1(0, T; [H^1(\Omega)]^3)$ .*

Como  $\frac{1}{\varepsilon} e_{i||j}(\varepsilon) \rightarrow e_{i||j}^1$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  por el paso (v) tenemos que

$$\frac{1}{\varepsilon} \partial_3 e_{i||j}(\varepsilon) \rightarrow \partial_3 e_{i||j}^1 \in H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Además, por el Teorema 6.1.2 se tiene que,

$$\left( \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}(\varepsilon)) + \frac{1}{\varepsilon} \partial_3 e_{i||j}(\varepsilon) \right) \rightarrow 0 \text{ en } H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Por tanto, se deduce que,

$$\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}(\varepsilon)) \rightarrow -\partial_3 e_{i||j}^1 \text{ en } H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)),$$

esto es, la familia  $(\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}(\varepsilon)))_{\varepsilon>0}$  converge en  $H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$ , entonces obtenemos la convergencia deseada aplicando el apartado (e) del Teorema 6.1.3. De esta forma, obtenemos la demostración del apartado (a) de este teorema.

Por tanto, hemos completado la demostración del teorema.  $\square$

**Observación 7.2.5.** Al igual que comentamos en los Capítulos 5 y 6, nótese que las hipótesis (7.2.2) implican en particular (4.4.5) y (4.4.4) como consecuencia de (4.4.2), es decir, se cumplen las propiedades consideradas en el análisis asintótico formal realizado en el Capítulo 4. En efecto, podríamos debilitar la hipótesis (5.3.2) asumiendo que las deformaciones iniciales son de orden  $\varepsilon^2$ . De esta forma, realizando algunas modificaciones en la demostración del Teorema 7.2.3 podríamos obtener las mismas conclusiones.

**Observación 7.2.6.** Nótese que el Problema 7.1.4 se puede obtener de la misma forma tomando los mismos escalados para la incógnita (desplazamientos), pero tomando las siguientes hipótesis en los datos:

$$\begin{aligned} \lambda^\varepsilon &= \varepsilon^r \lambda, & \mu^\varepsilon &= \varepsilon^r \mu, \\ \theta^\varepsilon &= \varepsilon^r \theta, & \rho^\varepsilon &= \varepsilon^r \rho, \\ f^{i,\varepsilon}(t, \mathbf{x}^\varepsilon) &= \varepsilon^{2+r} f^i(t, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \text{ con } \mathbf{x}^\varepsilon = \pi^\varepsilon(\mathbf{x}) \in \Omega^\varepsilon, \forall t \in [0, T], \\ h^{i,\varepsilon}(t, \mathbf{x}^\varepsilon) &= \varepsilon^{3+r} h^i(t, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_+ \cup \Gamma_-, \text{ con } \mathbf{x}^\varepsilon = \pi^\varepsilon(\mathbf{x}) \in \Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon, \forall t \in [0, T], \end{aligned}$$

donde las constantes  $\lambda \geq 0$  y  $\mu, \theta, \rho > 0$  y las funciones  $f^i \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$  y  $h^i \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-))$  son independientes de  $\varepsilon$  y  $r$  denota un número real arbitrario.

Al igual que hemos realizado en capítulos anteriores de esta memoria, en vista de las convergencias estudiadas en el teorema anterior, podemos analizar el comportamiento asintótico del campo tensorial de tensiones escaladas para una lámina flexural viscoelástica, siguiendo los argumentos estudiados en [40], donde los autores muestran resultados de convergencias para las tensiones en láminas elásticas lineales y no lineales. En el siguiente resultado, veremos que las componentes del tensor de tensiones escalado definido en (4.2.14) tienen límite nulo cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  y, por tanto, obtendremos convergencias a términos de menor orden, es decir, las correcciones correspondientes a cada componente (para el caso elástico véase el Teorema 8, [40]).

**Teorema 7.2.7.** *Asumamos las hipótesis consideradas en los Teoremas 4.2.7 y 7.2.3. Entonces se verifican las siguientes convergencias:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \sigma^{\alpha\beta}(\varepsilon) &\rightarrow \sigma^{\alpha\beta,1} \text{ en } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ \frac{1}{\varepsilon^2} \sigma^{i3}(\varepsilon) &\rightarrow \sigma^{i3,2} \text{ en } L^2(0, T; H^1(-1, 1; H^{-1}(\omega))), \end{aligned}$$

cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , siendo,

$$\begin{aligned} \sigma^{\alpha\beta,1} &:= -\frac{x_3}{2} \tilde{\sigma}^{\alpha\beta,1}, \\ \sigma^{\alpha 3,2} &:= \frac{x_3^2 - 1}{4} \tilde{\sigma}_{||\beta}^{\alpha\beta,1}, \\ \sigma^{33,2} &:= \frac{x_3^2 - 1}{4} \tilde{\sigma}^{\alpha\beta,1} b_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

con,

$$\tilde{\sigma}^{\alpha\beta,1} := a^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\sigma\tau}(\bar{\mathbf{u}}) + b^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\sigma\tau}(\dot{\bar{\mathbf{u}}}) - \int_0^t e^{-k(t-s)} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \rho_{\sigma\tau}(\bar{\mathbf{u}}(s)) ds, \quad (7.2.44)$$

y donde las funciones,

$$\tilde{\sigma}_{||\sigma}^{\alpha\beta,1} := \partial_\sigma \sigma^{\alpha\beta,1} + \Gamma_{\sigma\tau}^\alpha \sigma^{\beta\tau,1} + \Gamma_{\sigma\tau}^\beta \sigma^{\alpha\tau,1}, \quad (7.2.45)$$

son las derivadas covariantes de primer orden de este campo tensorial.

*Demostración.* Teniendo en cuenta la definición de las tensiones escaladas en (4.2.14) y las convergencias  $\frac{1}{\varepsilon} e_{i||j}(\varepsilon) \rightarrow e_{i||j}^1$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  (véase el paso (v) de la demostración del Teorema 7.2.3) es claro que

$$\sigma^{ij}(\varepsilon) = A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon) + B^{ijkl}(\varepsilon) \dot{e}_{k||l}(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ en } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Por tanto, estudiemos las correcciones correspondientes a cada una de las componentes del campo de tensiones escalado. En primer lugar, por el comportamiento asintótico de  $A^{ijkl}(\varepsilon)$ ,  $B^{ijkl}(\varepsilon)$  (véase el Teorema 4.2.2), las convergencias fuertes  $\frac{1}{\varepsilon} e_{i||j}(\varepsilon) \rightarrow e_{i||j}^1$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  y las expresiones (7.2.19)–(7.2.20) se tiene que

$$\begin{aligned} \sigma^{\alpha\beta,1} &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\varepsilon} \sigma^{\alpha\beta}(\varepsilon) \right) = A^{\alpha\beta\sigma\tau}(0) e_{\sigma||\tau}^1 + A^{\alpha\beta 33}(0) e_{3||3}^1 + B^{\alpha\beta\sigma\tau}(0) \dot{e}_{\sigma||\tau}^1 + B^{\alpha\beta 33}(0) \dot{e}_{3||3}^1 \\ &= (\lambda a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma})) e_{\sigma||\tau}^1 + \lambda a^{\alpha\beta} e_{3||3}^1 \\ &\quad + \left( \theta a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \frac{\rho}{2}(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \right) \dot{e}_{\sigma||\tau}^1 + \theta a^{\alpha\beta} \dot{e}_{3||3}^1 \\ &= (\lambda a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma})) e_{\sigma||\tau}^1 + \lambda a^{\alpha\beta} e_{3||3}^1 \\ &\quad + \left( \theta a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \frac{\rho}{2}(a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \right) \dot{e}_{\sigma||\tau}^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( -\frac{\lambda\theta}{\theta+\rho} a^{\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}^1 - \frac{\theta(\lambda+2\mu)}{\theta+\rho} e_{3||3}^1 - \frac{\theta^2}{\theta+\rho} a^{\sigma\tau} \dot{e}_{\sigma||\tau}^1 \right) a^{\alpha\beta} \\
& = \left( \left( \lambda - \frac{\theta}{\theta+\rho} (\lambda + \theta\Lambda) \right) a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \mu (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \right) e_{\sigma||\tau}^1 \\
& \quad + \left( \left( \theta - \frac{\theta^2}{\theta+\rho} \right) a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + \frac{\rho}{2} (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma}) \right) \dot{e}_{\sigma||\tau}^1 \\
& \quad - \frac{(\theta\Lambda)^2}{\theta+\rho} \int_0^t e^{-k(t-s)} a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}^1(s) ds \\
& = \frac{1}{2} a^{\alpha\beta\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}^1 + \frac{1}{2} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \dot{e}_{\sigma||\tau}^1 - \frac{1}{2} \int_0^t e^{-k(t-s)} c^{\alpha\beta\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}^1(s) ds,
\end{aligned}$$

en  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , que teniendo en cuenta (7.2.43) y (7.2.44), se puede escribir como,

$$\sigma^{\alpha\beta,1} = -\frac{x_3}{2} \tilde{\sigma}^{\alpha\beta,1},$$

Además, se tiene que,

$$\frac{1}{\varepsilon} \sigma^{\alpha\beta}(\varepsilon) \rightarrow -\frac{x_3}{2} \tilde{\sigma}^{\alpha\beta,1} \text{ en } L^2(0, T; \mathbb{L}^2), \quad (7.2.46)$$

pues  $L^2(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^2 := L^2(-1, 1; H^{-1}(\omega))$  y también,

$$\frac{1}{\varepsilon} \partial_\beta \sigma^{\alpha\beta}(\varepsilon) \rightarrow -\frac{x_3}{2} \partial_\beta \tilde{\sigma}^{\alpha\beta,1} \text{ en } L^2(0, T; \mathbb{L}^2). \quad (7.2.47)$$

En segundo lugar, por el comportamiento asintótico de  $A^{ijkl}(\varepsilon)$ ,  $B^{ijkl}(\varepsilon)$  (véase el Teorema 4.2.2), las convergencias fuertes  $\frac{1}{\varepsilon} e_{i||j}(\varepsilon) \rightarrow e_{i||j}^1$  en  $H^1(0, T; L^2(\Omega))$  y que  $e_{\sigma||3}^1 = 0$  (véanse los pasos (v) y (iii), respectivamente, de la demostración del Teorema 7.2.3) se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\varepsilon} \sigma^{\alpha 3}(\varepsilon) \right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( A^{\alpha 3 kl}(\varepsilon) \frac{1}{\varepsilon} e_{k||l}(\varepsilon) + B^{\alpha 3 kl}(\varepsilon) \frac{1}{\varepsilon} \dot{e}_{k||l}(\varepsilon) \right) \\
&= 2A^{\alpha 3 \sigma 3}(0) e_{\sigma||3}^1 + A^{\alpha 3 33}(0) e_{3||3}^1 + 2B^{\alpha 3 \sigma 3}(0) \dot{e}_{\sigma||3}^1 + B^{\alpha 3 33}(0) \dot{e}_{3||3}^1 = 0.
\end{aligned}$$

en  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . En particular,

$$\frac{1}{\varepsilon} \sigma^{\alpha 3}(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ en } L^2(0, T; \mathbb{L}^2). \quad (7.2.48)$$

Entonces, calculemos las correcciones de orden dos correspondientes a estas componentes del campo de tensiones escalado. Teniendo en cuenta la condición de contorno escalada (4.2.21), podemos escribir

$$\int_{-1}^{x_3} \partial_3 \sigma^{i3}(\varepsilon)(\mathbf{y}, s) ds = \sigma^{i3}(\varepsilon)(\mathbf{y}, x_3) + h_-^i(\varepsilon)(\mathbf{y}). \quad (7.2.49)$$

Por otra parte, de la ecuación de equilibrio escalada (4.2.19), se tiene para  $i = \alpha$  que

$$-\sigma_{||j}^{\alpha j}(\varepsilon) = -\sigma_{||\beta}^{\alpha\beta}(\varepsilon) - \sigma_{||3}^{\alpha 3}(\varepsilon) = f^\alpha(\varepsilon).$$

Entonces, de la expresión (4.2.23) para  $i = \alpha$  y  $j = 3$  teniendo en cuenta que  $\Gamma_{3q}^3(\varepsilon) = \Gamma_{33}^\alpha(\varepsilon) = 0$  (véase el (4.1.25)) y (4.2.22) deducimos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \partial_3 \sigma^{\alpha 3}(\varepsilon) &= \sigma_{||3}^{\alpha 3}(\varepsilon) - \Gamma_{p3}^\alpha(\varepsilon) \sigma^{p3}(\varepsilon) - \Gamma_{3q}^3(\varepsilon) \sigma^{\alpha q}(\varepsilon) = -\sigma_{||\beta}^{\alpha\beta}(\varepsilon) - f^\alpha(\varepsilon) - \Gamma_{p3}^\alpha(\varepsilon) \sigma^{p3}(\varepsilon) \\ &= -f^\alpha(\varepsilon) - \partial_\beta \sigma^{\alpha\beta}(\varepsilon) - \Gamma_{p\beta}^\alpha(\varepsilon) \sigma^{p\beta}(\varepsilon) - \Gamma_{\beta q}^\beta(\varepsilon) \sigma^{\alpha q}(\varepsilon) - \Gamma_{p3}^\alpha(\varepsilon) \sigma^{p3}(\varepsilon) \\ &= -f^\alpha(\varepsilon) - \left( \partial_\beta \sigma^{\alpha\beta}(\varepsilon) + \Gamma_{\tau\beta}^\alpha(\varepsilon) \sigma^{\tau\beta}(\varepsilon) + \Gamma_{\beta\tau}^\beta(\varepsilon) \sigma^{\alpha\tau}(\varepsilon) \right) \\ &\quad - \left( 2\Gamma_{\beta 3}^\alpha(\varepsilon) \sigma^{\beta 3}(\varepsilon) + \Gamma_{\beta 3}^\beta(\varepsilon) \sigma^{\alpha 3}(\varepsilon) \right). \end{aligned} \quad (7.2.50)$$

Integrando (7.2.50) con respecto a la variable transversal  $x_3$  en  $[-1, x_3]$ , teniendo en cuenta la relación (7.2.49) (para  $i = \alpha$ ) y multiplicando por  $\frac{1}{\varepsilon}$  se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-1}^{x_3} \partial_3 \sigma^{\alpha 3}(\varepsilon)(\mathbf{y}, s) ds &= \frac{1}{\varepsilon^2} \sigma^{\alpha 3}(\varepsilon)(\mathbf{y}, x_3) + \frac{1}{\varepsilon^2} h_-^\alpha(\varepsilon)(\mathbf{y}) = \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} \int_{-1}^{x_3} \left( f^\alpha(\varepsilon) + \partial_\beta \sigma^{\alpha\beta}(\varepsilon) + \Gamma_{\tau\beta}^\alpha(\varepsilon) \sigma^{\tau\beta}(\varepsilon) + \Gamma_{\beta\tau}^\beta(\varepsilon) \sigma^{\alpha\tau}(\varepsilon) \right. \\ &\quad \left. + 2\Gamma_{\beta 3}^\alpha(\varepsilon) \sigma^{\beta 3}(\varepsilon) + \Gamma_{\beta 3}^\beta(\varepsilon) \sigma^{\alpha 3}(\varepsilon) \right) (\mathbf{y}, s) ds. \end{aligned} \quad (7.2.51)$$

Recordemos que para el caso de la lámina flexural viscoelástica asumimos que  $f^i(\varepsilon) = \varepsilon^2 f^{i,2}$  y  $h^i(\varepsilon) = \varepsilon^3 h^{i,3}$ . Por tanto, de (7.2.51) deducimos, teniendo en cuenta (7.2.46)–(7.2.48) y las convergencias de los símbolos de Christoffel en el Teorema 4.3.1, que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} \sigma^{\alpha 3}(\varepsilon)(\mathbf{y}, x_3) &\rightarrow \sigma^{\alpha 3,2}(\mathbf{y}, x_3) := \int_{-1}^{x_3} \frac{s}{2} \left( \partial_\beta \tilde{\sigma}^{\alpha\beta,1} + \Gamma_{\tau\beta}^\alpha \tilde{\sigma}^{\tau\beta,1} + \Gamma_{\beta\tau}^\beta \tilde{\sigma}^{\alpha\tau,1} \right) (\mathbf{y}) ds \\ &= \frac{x_3^2 - 1}{4} \left( \partial_\beta \tilde{\sigma}^{\alpha\beta,1}(\mathbf{y}) + \Gamma_{\tau\beta}^\alpha(\mathbf{y}) \tilde{\sigma}^{\tau\beta,1}(\mathbf{y}) + \Gamma_{\beta\tau}^\beta(\mathbf{y}) \tilde{\sigma}^{\alpha\tau,1}(\mathbf{y}) \right) \\ &= \frac{x_3^2 - 1}{4} \tilde{\sigma}_{||\beta}^{\alpha\beta,1}(\mathbf{y}), \end{aligned}$$

en  $L^2(0, T; \mathbb{L}^2)$ , con  $\tilde{\sigma}_{||\beta}^{\alpha\beta,1}$  definido en (7.2.45). Además, por los mismos argumentos, deducimos de (7.2.50) que

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \partial_3 \sigma^{\alpha 3}(\varepsilon) \rightarrow \partial_3 \sigma^{\alpha 3,2} := \frac{x_3}{2} \tilde{\sigma}_{||\beta}^{\alpha\beta,1} \text{ en } L^2(0, T; \mathbb{L}^2),$$

y como consecuencia, podemos concluir que

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \sigma^{\alpha 3}(\varepsilon) \rightarrow \frac{x_3^2 - 1}{4} \tilde{\sigma}_{||\beta}^{\alpha\beta,1} \text{ en } L^2(0, T; \mathbb{H}^1), \quad (7.2.52)$$

donde  $\mathbb{H} := H^1(-1, 1; H^{-1}(\omega))$ .

Por último,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\varepsilon} \sigma^{33}(\varepsilon) \right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( A^{33kl}(\varepsilon) \frac{1}{\varepsilon} e_{k||l}(\varepsilon) + B^{33kl}(\varepsilon) \frac{1}{\varepsilon} \dot{e}_{k||l}(\varepsilon) \right) \\ &= A^{33\sigma\tau}(0) e_{\sigma||\tau}^1 + A^{3333}(0) e_{3||3}^1 + B^{33\sigma\tau}(0) \dot{e}_{\sigma||\tau}^1 + B^{3333}(0) \dot{e}_{3||3}^1 \\ &= \lambda a^{\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}^1 + (\lambda + 2\mu) e_{3||3}^1 + \theta a^{\sigma\tau} \dot{e}_{\sigma||\tau}^1 + (\theta + \rho) \dot{e}_{3||3}^1 = 0, \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta (7.2.18). En particular,

$$\frac{1}{\varepsilon} \sigma^{33}(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ en } L^2(0, T; \mathbb{L}^2). \quad (7.2.53)$$

Calculemos entonces el corrector correspondiente. De la ecuación de equilibrio escalada (4.2.19) para  $i = 3$  se tiene que  $-\sigma_{||j}^{3j}(\varepsilon) = -\sigma_{||\beta}^{3\beta}(\varepsilon) - \sigma_{||3}^{33}(\varepsilon) = f^3(\varepsilon)$ . Por tanto, de (4.2.23) para  $i = j = 3$  teniendo en cuenta (4.2.22) y (4.1.25) se tiene que

$$\frac{1}{\varepsilon} \partial_3 \sigma^{33}(\varepsilon) = -f^3(\varepsilon) - \left( \partial_\beta \sigma^{3\beta}(\varepsilon) + \Gamma_{\alpha\beta}^3(\varepsilon) \sigma^{\alpha\beta}(\varepsilon) + \Gamma_{p\beta}^\beta(\varepsilon) \sigma^{p3}(\varepsilon) \right). \quad (7.2.54)$$

Integrando esta expresión con respecto a  $x_3$  en  $[-1, x_3]$ , teniendo en cuenta (7.2.49) y multiplicando por  $\frac{1}{\varepsilon}$  se deduce que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-1}^{x_3} \partial_3 \sigma^{33}(\varepsilon)(\mathbf{y}, s) ds &= \frac{1}{\varepsilon^2} \sigma^{33}(\mathbf{y}, x_3) + \frac{1}{\varepsilon^2} h_-^3(\varepsilon)(\mathbf{y}) \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} \int_{-1}^{x_3} \left( f^3(\varepsilon) + \partial_\beta \sigma^{3\beta}(\varepsilon) + \Gamma_{\alpha\beta}^3(\varepsilon) \sigma^{\alpha\beta}(\varepsilon) + \Gamma_{p\beta}^\beta(\varepsilon) \sigma^{p3}(\varepsilon) \right) (\mathbf{y}, s) ds. \end{aligned} \quad (7.2.55)$$

Por tanto, recordando el orden de las fuerzas aplicadas asumido para el caso de la lámina flexural, las convergencias (7.2.46), (7.2.48) (y que  $\frac{1}{\varepsilon} \partial_\beta \sigma^{3\beta}(\varepsilon) \rightarrow 0$  en  $L^2(0, T; \mathbb{L}^2)$ ) y las de los símbolos de Christoffel en el Teorema 4.3.1, deducimos de (7.2.55) y (7.2.54), respectivamente, que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} \sigma^{33}(\mathbf{y}, x_3) &\rightarrow \sigma^{33,1}(\mathbf{y}, x_3) := \int_{-1}^{x_3} \frac{s}{2} b_{\alpha\beta}(\mathbf{y}) \tilde{\sigma}^{\alpha\beta,1}(\mathbf{y}) ds = \frac{x_3^2 - 1}{4} \tilde{\sigma}^{\alpha\beta,1}(\mathbf{y}) b_{\alpha\beta}(\mathbf{y}), \\ \frac{1}{\varepsilon} \partial_3 \sigma^{33} &\rightarrow \partial_3 \sigma^{33,1} := \frac{x_3}{2} \tilde{\sigma}^{\alpha\beta,1} b_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

en  $L^2(0, T; \mathbb{L}^2)$ . Como consecuencia se deduce entonces que

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \sigma^{33} \rightarrow \frac{x_3^2 - 1}{4} \tilde{\sigma}^{\alpha\beta,1} b_{\alpha\beta} \text{ en } L^2(0, T; \mathbb{H}^1).$$

□

**Observación 7.2.8.** *A diferencia de la convergencia del campo de tensiones escaladas obtenida para los casos de la membrana elíptica viscoelástica (Teorema 5.3.10) y de la membrana generalizada viscoelástica (Teorema 6.3.6), observamos que los límites obtenidos de las tensiones escaladas del problema de la lámina flexural no dependen de las fuerzas aplicadas que actúan sobre la lámina.*

A continuación, estudiaremos las convergencias en términos de las incógnitas desescaladas. Las convergencias  $\mathbf{u}(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{u}$  en  $H^1(0, T; [H^1(\Omega)]^3)$  del Teorema 7.2.3, los escalados  $u_i^\varepsilon(t, \mathbf{x}^\varepsilon) =: u_i(\varepsilon)(t, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}^\varepsilon = \pi^\varepsilon(\mathbf{x}) \in \bar{\Omega}^\varepsilon, \forall t \in [0, T]$  (véase (4.2.1)), los desescalados  $\xi_i^\varepsilon := \xi_i$  (véase (7.1.3)) para cada  $\varepsilon > 0$  y el Teorema 5.1.1 juntos, conducen a las siguientes convergencias:

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u_i^\varepsilon dx_3^\varepsilon \rightarrow \xi_i \quad \text{en } H^1(0, T; H^1(\omega)).$$

Además, podemos probar el siguiente teorema en relación a las convergencias de los promedios de las componentes tangencial y normal del campo vectorial de desplazamientos:

**Teorema 7.2.9.** *Supongamos que  $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^3(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$ . Consideremos una familia de láminas flexurales viscoelásticas con espesor  $2\varepsilon$  que tiende a cero, teniendo la misma superficie media  $S = \boldsymbol{\theta}(\bar{\omega})$  y asumamos las hipótesis en los datos consideradas en el Teorema 7.1.3.*

*Sean  $\mathbf{u}^\varepsilon = (u_i^\varepsilon) \in H^1(0, T; V(\Omega^\varepsilon))$  y  $\boldsymbol{\xi}^\varepsilon = (\xi_i^\varepsilon) \in H^1(0, T; V_F(\omega))$  para cada  $\varepsilon > 0$  las soluciones de los Problemas 4.1.5 y 7.1.4, respectivamente. Además, sea  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_i) \in H^1(0, T; V_F(\omega))$  la solución del Problema 7.1.2. Entonces:*

$$\begin{aligned} \xi_\alpha^\varepsilon &= \xi_\alpha \quad \text{y así} \quad \xi_\alpha^\varepsilon \mathbf{a}^\alpha = \xi_\alpha \mathbf{a}^\alpha \quad \text{en } H^1(0, T; [H^1(\omega)]^3), \forall \varepsilon > 0, \\ \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u_\alpha^\varepsilon \mathbf{g}^{\alpha, \varepsilon} dx_3^\varepsilon &\rightarrow \xi_\alpha \mathbf{a}^\alpha \quad \text{en } H^1(0, T; [H^1(\omega)]^3) \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \xi_3^\varepsilon &= \xi_3 \quad \text{y así} \quad \xi_3^\varepsilon \mathbf{a}^3 = \xi_3 \mathbf{a}^3 \quad \text{en } H^1(0, T; [H^2(\omega)]^3), \forall \varepsilon > 0, \\ \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u_3^\varepsilon \mathbf{g}^{3, \varepsilon} dx_3^\varepsilon &\rightarrow \xi_3 \mathbf{a}^3 \quad \text{en } H^1(0, T; [H^1(\omega)]^3) \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

*Demostración.* La demostración de este teorema es similar a la del Teorema 5.3.11. Como  $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^3(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$  los campos vectoriales  $\mathbf{g}^\alpha(\varepsilon) : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definidos por  $\mathbf{g}^\alpha(\varepsilon) := \mathbf{g}^{\alpha, \varepsilon}(\mathbf{x}^\varepsilon)$  para todo  $\mathbf{x}^\varepsilon = \pi(\mathbf{x}) \in \bar{\Omega}^\varepsilon$  son tal que  $\mathbf{g}^\alpha(\varepsilon) - \mathbf{a}^\alpha = \mathcal{O}(\varepsilon)$ , donde los campos  $\mathbf{a}^\alpha$  se identifican con vectores definidos sobre todo el conjunto  $\bar{\Omega}$ . Ahora bien, tenemos que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u_\alpha^\varepsilon \mathbf{g}^{\alpha, \varepsilon} dx_3^\varepsilon - \xi_\alpha \mathbf{a}^\alpha &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u_\alpha(\varepsilon) \mathbf{g}^\alpha(\varepsilon) dx_3 - \xi_\alpha \mathbf{a}^\alpha \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u_\alpha(\varepsilon) (\mathbf{g}^\alpha(\varepsilon) - \mathbf{a}^\alpha) dx_3 - (\overline{u_\alpha(\varepsilon)} - \xi_\alpha) \mathbf{a}^\alpha. \end{aligned}$$



Por un lado, como  $u_\alpha(\varepsilon) \rightarrow u_\alpha$  en  $H^1(0, T; H^1(\Omega))$  y  $\mathbf{g}^\alpha(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{a}^\alpha$  en  $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$  implican que

$$u_\alpha(\varepsilon)(\mathbf{g}^\alpha(\varepsilon) - \mathbf{a}^\alpha) \rightarrow \mathbf{0} \text{ en } H^1(0, T; [H^1(\Omega)]^3),$$

por tanto, aplicando el apartado (b) del Teorema 5.1.1 obtenemos que

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 u_\alpha(\varepsilon)(\mathbf{g}^\alpha(\varepsilon) - \mathbf{a}^\alpha) dx_3 \rightarrow \mathbf{0} \text{ en } H^1(0, T; [H^1(\omega)]^3),$$

y utilizando el mismo argumento se tiene que  $(\overline{u_\alpha(\varepsilon)} - \xi_\alpha) \mathbf{a}^\alpha \rightarrow \mathbf{0}$  en  $H^1(0, T; [H^1(\omega)]^3)$ . Para la componente normal tenemos que  $\mathbf{g}^{3,\varepsilon} = \mathbf{a}^3$ , entonces

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u_3^\varepsilon \mathbf{g}^{3,\varepsilon} dx_3^\varepsilon - \xi_3^\varepsilon \mathbf{a}^3 = (\overline{u_3(\varepsilon)} - \xi_3) \mathbf{a}^3,$$

por tanto, aplicando el apartado (b) del Teorema 5.1.1 obtenemos que  $(\overline{u_3(\varepsilon)} - \xi_3) \mathbf{a}^3 \rightarrow \mathbf{0}$  en  $H^1(0, T; [H^1(\omega)]^3)$ .  $\square$

**Observación 7.2.10.** Los campos  $\tilde{\xi}_T^\varepsilon, \tilde{\xi}_N^\varepsilon : [0, T] \times \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definidos por  $\tilde{\xi}_T^\varepsilon := \xi_\alpha^\varepsilon \mathbf{a}^\alpha$  y  $\tilde{\xi}_N^\varepsilon := \xi_3^\varepsilon \mathbf{a}^3$ , se conocen como los campos de desplazamientos límite tangencial y normal, respectivamente, de la superficie media  $S$  de la lámina. Si denotamos el campo de desplazamientos límite de  $S$  por  $\tilde{\xi}^\varepsilon := \xi_i \mathbf{a}^i$  entonces  $\tilde{\xi}^\varepsilon = \tilde{\xi}_T^\varepsilon + \tilde{\xi}_N^\varepsilon$ .

## Capítulo 8

# Problema dinámico de una lámina viscoelástica

Como en el Capítulo 4, consideremos una familia de láminas viscoelásticas con un espesor de  $2\varepsilon$  (donde  $\varepsilon$  denota un parámetro pequeño), fijadas a lo largo de una parte de su cara lateral y todas teniendo la misma superficie media  $S$ . A diferencia de los demás capítulos de la Parte II de esta memoria aquí consideraremos un problema dinámico incluyendo el término inercial. El objetivo principal de este capítulo es estudiar el comportamiento límite del problema tridimensional y su solución cuando  $\varepsilon$  tiende a cero.

Como hemos observado en los capítulos anteriores, el proceso de análisis asintótico formal y el estudio de la convergencia de este tipo de problemas da lugar a extensos cálculos y notaciones cargadas. Es por ello por lo que en esta memoria hemos optado por estudiar previamente el caso cuasiestático para presentar de una forma más resumida la extensión al caso dinámico que, como veremos en lo que sigue, no aporta mayores dificultades técnicas pero sí añade una considerable cantidad de términos y resultados nuevos. Por tanto, para realizar el análisis asintótico formal del problema dinámico de la lámina viscoelástica, seguiremos el estudio hecho en el Capítulo 4. De este modo, obtendremos de manera formal las ecuaciones dinámicas bidimensionales para una lámina membrana viscoelástica. En las referencias [85–87] y siguiendo el estilo de [30], se puede encontrar el análisis asintótico de láminas elásticas considerando un estado dinámico. En estos trabajos se identifican los modelos dinámicos correspondientes a los obtenidos para el caso cuasiestático, es decir, se identifican las ecuaciones dinámicas bidimensionales de las denominadas membranas elípticas, membranas generalizadas y láminas flexurales elásticas. También, se incluyen resultados de convergencia que justifican los modelos obtenidos y las ecuaciones dinámicas de Koiter correspondientes. Análogamente, en las referencias [56–58] se realiza un estudio similar pero considerando un material viscoelástico cuya ley constitutiva presenta un término de memoria larga.

De manera análoga a lo sucedido en el caso cuasiestático, en este capítulo veremos que a pesar de considerar un modelo tridimensional de una lámina viscoelástica con memoria corta, representada por una derivada temporal, el análisis asintótico conducirá de forma natural a un modelo bidimensional que presenta un término de memoria larga, representada

por una integral en tiempo, que tiene en cuenta todas las deformaciones previas del cuerpo.

Comenzaremos el capítulo describiendo, en la Sección 8.1, el problema mecánico dinámico en el dominio de referencia original y su formulación variacional en coordenadas cartesianas. A continuación, debido a la geometría particular que configura una lámina, propondremos una formulación variacional en coordenadas curvilíneas. Después consideraremos una aplicación proyección a un dominio de referencia, independiente del parámetro pequeño, para escribir el problema escalado correspondiente. En este punto definiremos las incógnitas y las fuerzas escaladas y plantearemos las hipótesis sobre los coeficientes, que serán las mismas ya consideradas en el Capítulo 4. En la Sección 8.2, incluiremos resultados teóricos que sirven para demostrar la existencia y unicidad de solución del problema tridimensional original y del problema bidimensional que deduciremos en lo que sigue. En la Sección 8.3 mostraremos el análisis asintótico formal que dará lugar a las ecuaciones dinámicas bidimensionales de las láminas viscoelásticas, apoyándonos en lo ya estudiado en el Capítulo 4. Para finalizar, presentaremos el problema dinámico bidimensional de una membrana viscoelástica y estudiaremos la existencia y unicidad de solución, atendiendo a la misma clasificación realizada en los Capítulos 5 y 6 en el caso cuasiestático.

## 8.1. Problema dinámico para una lámina viscoelástica

En esta sección expondremos el problema dinámico tridimensional que modeliza la deformación de una lámina viscoelástica sometida a fuerzas externas. Para realizar el análisis asintótico del problema, seguiremos los mismos pasos y notación utilizados en el Capítulo 4.

Sea  $\Omega^*$  un dominio de  $\mathbb{R}^3$  definido como en la Sección 4.1. Al igual que allí, el conjunto  $\Omega^*$  denota la región ocupada por el sólido deformable en ausencia de fuerzas. Suponemos que el cuerpo está compuesto por un material viscoelástico de tipo Kelvin-Voigt, que es homogéneo e isotrópico, tal que está caracterizado por sus coeficientes de Lamé  $\lambda \geq 0, \mu > 0$  y sus coeficientes de viscosidad,  $\theta \geq 0, \rho \geq 0$  (véanse, por ejemplo, [48, 83, 144]).

Sea  $T > 0$  el periodo de tiempo de observación. Bajo los efectos de las fuerzas aplicadas el cuerpo es deformado y denotamos por  $u_i^* : [0, T] \times \bar{\Omega}^* \rightarrow \mathbb{R}^3$  las componentes cartesianas del campo de desplazamientos, definido como  $\mathbf{u}^* := u_i^* \mathbf{e}^i : [0, T] \times \bar{\Omega}^* \rightarrow \mathbb{R}^3$ , donde  $\{\mathbf{e}^i\}$  denota la base euclídea canónica en  $\mathbb{R}^3$ . Además, consideraremos que el campo de desplazamientos se anula en el conjunto  $\Gamma_0^* \subset \partial\Omega^*$ , de medida no nula. Por tanto, el campo de desplazamientos  $\mathbf{u}^* = (u_i^*) : [0, T] \times \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}^3$  es solución del siguiente problema físico tridimensional en coordenadas cartesianas:

**Problema 8.1.1.** *Hallar  $\mathbf{u}^* = (u_i^*) : [0, T] \times \bar{\Omega}^* \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que,*

$$\rho \ddot{u}_i^* - \partial_j^* \sigma^{ij,*}(\mathbf{u}^*) = f^{i,*} \text{ en } \Omega^*, \quad (8.1.1)$$

$$u_i^* = 0 \text{ en } \Gamma_0^*, \quad (8.1.2)$$

$$\sigma^{ij,*}(\mathbf{u}^*) n_j^* = h^{i,*} \text{ en } \Gamma_1^*, \quad (8.1.3)$$

$$\mathbf{u}^*(0, \cdot) = \mathbf{u}_0^* \text{ en } \Omega^*, \quad (8.1.4)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^*(0, \cdot) = \dot{\mathbf{u}}_0^* \text{ en } \Omega^*, \quad (8.1.5)$$

donde  $\varrho$  denota la densidad del cuerpo, (8.1.5) la velocidad inicial y los demás términos y funciones son definidos como en el Problema 4.1.1.

Supongamos que la densidad  $\varrho$  es una constante positiva o es tal que  $\varrho \in L^\infty(\Omega^*)$ ,  $\varrho(\mathbf{x}^*) \geq \varrho^* > 0$  c.t.p.  $\mathbf{x}^* \in \Omega^*$ .

Considerando el espacio de soluciones admisibles  $V(\Omega^*)$  (véase (4.1.6)) y asumiendo suficiente regularidad para la incógnita  $\mathbf{u}^* = (u_i^*)$  obtenemos el siguiente problema variacional en coordenadas cartesianas:

**Problema 8.1.2.** Hallar  $\mathbf{u}^* = (u_i^*) : [0, T] \times \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^*(t, \cdot) &\in V(\Omega^*) \quad \forall t \in [0, T], \\ \int_{\Omega^*} \varrho \ddot{u}_i^* v_i^* dx^* &+ \int_{\Omega^*} A^{ijkl,*} e_{kl}^*(\mathbf{u}^*) e_{ij}^*(\mathbf{v}^*) dx^* + \int_{\Omega^*} B^{ijkl,*} e_{kl}^*(\dot{\mathbf{u}}^*) e_{ij}^*(\mathbf{v}^*) dx^* \\ &= \int_{\Omega^*} f^{i,*} v_i^* dx^* + \int_{\Gamma_1^*} h^{i,*} v_i^* d\Gamma^* \quad \forall \mathbf{v}^* \in V(\Omega^*), \text{ c.p.d. en } (0, T), \\ \mathbf{u}^*(0, \cdot) &= \mathbf{u}_0^*(\cdot), \quad \dot{\mathbf{u}}^*(0, \cdot) = \dot{\mathbf{u}}_0^*(\cdot). \end{aligned}$$

Consideremos entonces que  $\Omega^*$  es una lámina viscoelástica de espesor  $2\varepsilon$ . A continuación, expresaremos las ecuaciones del Problema 8.1.2 en función de las coordenadas curvilíneas cuyas bases y funciones fueron definidas en la Sección 4.1. Adicionalmente, a la definición de la primera forma fundamental (4.1.8), y teniendo en cuenta (4.1.7), definimos de forma análoga,

$$a^{ij} := \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}^j. \quad (8.1.6)$$

**Observación 8.1.3.** Nótese que simplemente estamos añadiendo a la definición de la primera forma fundamental los elementos  $a^{i3} = \delta^{i3}$  (véase (4.1.7)), donde  $\delta^{ij}$  denota la delta de Kronecker.

Ahora, para cada  $\varepsilon > 0$ , definimos el dominio tridimensional  $\Omega^\varepsilon := \omega \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  y su frontera  $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega^\varepsilon$ . Para cada  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , consideramos la aplicación  $\Theta$  (véase (4.1.10)) tal que el conjunto  $\Theta(\bar{\Omega}^\varepsilon) = \bar{\Omega}^*$  es la configuración de referencia de una lámina viscoelástica, con superficie media  $S$  y espesor  $2\varepsilon > 0$ . Por tanto, denotando por  $u_i^\varepsilon : [0, T] \times \bar{\Omega}^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$  las componentes covariantes el campo de desplazamientos, siguiendo (4.1.14) y recordando la definición del espacio de soluciones admisibles  $V(\Omega^\varepsilon)$  (véase (4.1.15)) podemos escribir la expresión del Problema 8.1.2 en coordenadas curvilíneas (véase de nuevo [30] para más detalle). Por tanto, se tiene que el campo  $\mathbf{u}^\varepsilon = (u_i^\varepsilon)$  verifica el siguiente problema variacional dinámico para la deformación de una lámina viscoelástica tridimensional en coordenadas curvilíneas:

**Problema 8.1.4.** Hallar  $\mathbf{u}^\varepsilon = (u_i^\varepsilon) : [0, T] \times \Omega^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que,

$$\mathbf{u}^\varepsilon(t, \cdot) \in V(\Omega^\varepsilon) \quad \forall t \in [0, T],$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^\varepsilon} \varrho \ddot{u}_i^\varepsilon v_j^\varepsilon g^{ij,\varepsilon} \sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon + \int_{\Omega^\varepsilon} A^{ijkl,\varepsilon} e_{k||l}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) e_{i||j}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) \sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon + \int_{\Omega^\varepsilon} B^{ijkl,\varepsilon} e_{k||l}^\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon) e_{i||j}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) \sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon \\
& = \int_{\Omega^\varepsilon} f^{i,\varepsilon} v_i^\varepsilon \sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon + \int_{\Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon} h^{i,\varepsilon} v_i^\varepsilon \sqrt{g^\varepsilon} d\Gamma^\varepsilon \quad \forall \mathbf{v}^\varepsilon \in V(\Omega^\varepsilon), \text{ c.p.d. en } (0, T), \\
& \mathbf{u}^\varepsilon(0, \cdot) = \mathbf{u}_0^\varepsilon(\cdot), \quad \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(0, \cdot) = \dot{\mathbf{u}}_0^\varepsilon(\cdot).
\end{aligned}$$

Consideremos ahora el dominio  $\Omega := \omega \times (-1, 1)$  y el espacio  $V(\Omega)$  (véase (4.2.17)) definidos como en la Sección 4.2, donde también presentamos las funciones escaladas que utilizaremos en lo que sigue. Recordando la definición de las componentes del tensor métrico en (4.1.11) las asociaremos con las funciones  $g^{ij}(\varepsilon)$  definidas por,

$$g^{ij}(\varepsilon)(\mathbf{x}) := g^{ij,\varepsilon}(\mathbf{x}^\varepsilon) \text{ para todo } \mathbf{x}^\varepsilon = \pi^\varepsilon(\mathbf{x}) \in \bar{\Omega}^\varepsilon.$$

Además, se puede probar (véase la demostración del Teorema 3.3-1 en [30], por ejemplo) que,

$$g^{\alpha\beta}(\varepsilon) = a^{\alpha\beta} + 2\varepsilon x_3 a^{\alpha\sigma} b_\sigma^\beta + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad g^{i3}(\varepsilon) = a^{i3}. \quad (8.1.7)$$

Por tanto, podemos escribir el problema dinámico variacional escalado:

**Problema 8.1.5.** Hallar  $\mathbf{u}(\varepsilon) : [0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tal que,

$$\begin{aligned}
& \mathbf{u}(\varepsilon)(t, \cdot) \in V(\Omega) \quad \forall t \in [0, T], \\
& \int_{\Omega} \varrho \ddot{u}_i(\varepsilon) v_j g^{ij}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon; \mathbf{u}(\varepsilon)) e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\
& + \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon; \dot{\mathbf{u}}(\varepsilon)) e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\
& = \int_{\Omega} f^i(\varepsilon) v_i \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^i(\varepsilon) v_i \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega), \text{ c.p.d. en } (0, T), \\
& \mathbf{u}(\varepsilon)(0, \cdot) = \mathbf{u}_0(\varepsilon)(\cdot), \quad \dot{\mathbf{u}}(\varepsilon)(0, \cdot) = \dot{\mathbf{u}}_0(\varepsilon)(\cdot).
\end{aligned}$$

## 8.2. Resultados preliminares

A continuación, presentaremos varios resultados relacionados con la existencia y unicidad de solución de los problemas que acabamos de introducir y de los que aparecerán en lo que resta de capítulo. Demostraremos estos resultados considerando un problema abstracto en el que podrán ser enmarcados los problemas en cuestión. En esta sección, seguiremos algunos argumentos utilizados para el estudio de existencia de solución de un problema dinámico de contacto en [16].

Sea  $V$  un espacio de Hilbert y denotemos por  $(\cdot, \cdot)_V$  y  $\|\cdot\|_V$ , el producto interior y la norma asociada, respectivamente. Consideremos los operadores acotados  $B : V \longrightarrow V$ ,  $A : V \longrightarrow V$  y una función  $f : (0, T) \longrightarrow V$ . Sean también  $u_0, w_0 \in V$ . Estamos interesados en estudiar el siguiente problema:

**Problema 8.2.1.** Hallar  $u : [0, T] \rightarrow V$  tal que,

$$\begin{aligned} \ddot{u} + B\dot{u}(t) + Au(t) &= f(t) \text{ c.t.p. } t \in (0, T), \\ u(0) &= u_0, \quad \dot{u}(0) = w_0. \end{aligned}$$

**Teorema 8.2.2.** Supongamos que  $B : V \rightarrow V$  es un operador fuertemente monótono, Lipschitz-continuo y  $A : V \rightarrow V$  es un operador lineal Lipschitz-continuo. Además, sean  $u_0, w_0 \in V$  y  $f \in L^2(0, T; V)$ . Entonces, el Problema 8.2.1 tiene solución única  $u \in H^2(0, T; V)$ .

*Demostración.* Para la demostración de este teorema consideraremos una cadena de problemas auxiliares que nos permitirán probar la existencia y unicidad de solución del problema original. En primer lugar, escribimos el problema en términos de la velocidad: hallar  $w \in V$  para todo  $t \in [0, T]$  tal que

$$(\dot{w}, v)_V + (Au + Bw, v)_V = (f, v)_V, \quad (8.2.8)$$

$$w(0) = w_0, \quad (8.2.9)$$

para todo  $v \in V$ , c.p.d. en  $(0, T)$  y tal que el campo  $u$  viene dado por

$$u(t) = \int_0^t w(s)ds + u_0. \quad (8.2.10)$$

Sea  $\tau \in L^2(0, T; V)$  y consideremos el siguiente problema: hallar  $w_\tau \in V$  tal que

$$(\dot{w}_\tau, v)_V + (Bw_\tau, v)_V = (f - \tau, v)_V, \quad (8.2.11)$$

$$w_\tau(0) = w_0, \quad (8.2.12)$$

para todo  $v \in V$ , c.t.p.  $t \in (0, T)$  y donde  $u_\tau$  viene dado por

$$u_\tau(t) = \int_0^t w_\tau(s)ds + u_0. \quad (8.2.13)$$

Por tanto, el problema (8.2.11)–(8.2.12) se puede enmarcar en la formulación del Problema 4.3.7 el cual tiene solución única por el Teorema 4.3.8. Entonces, como el operador  $B$  es Lipschitz-continuo (y el operador identidad es fuertemente continuo y Lipschitz-continuo),  $(f - \tau) \in L^2(0, T; V)$  y  $w_0 \in V$  existe una única solución del problema (8.2.11)–(8.2.12) y además,  $w_\tau \in H^1(0, T; V)$ . Por tanto, por (8.2.13)  $u_\tau \in H^2(0, T; V)$ . A continuación, probemos que el problema (8.2.11)–(8.2.12) es una reformulación del Problema 8.2.1. Para ello consideremos el operador  $\Psi : L^2(0, T; V) \rightarrow L^2(0, T; V)$  definido por

$$(\Psi\tau, v)_V = (Au_\tau, v)_V \quad \forall v \in V, \quad (8.2.14)$$

donde  $u_\tau$  está definido en (8.2.10) a través de la solución del problema (8.2.11)–(8.2.12).

Probaremos que este operador tiene un único punto fijo. Sean  $\tau_1, \tau_2 \in L^2(0, T; V)$ . Por simplicidad denotemos  $w_\alpha = w_{\tau_\alpha}$ ,  $u_\alpha = u_{\tau_\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2$ ). Por un lado, tomemos  $\tau = \tau_\alpha$  en (8.2.14) alternadamente y restemos ambas expresiones, obteniendo,

$$(\Psi\tau_1(t) - \Psi\tau_2(t), v)_V = (A(u_1(t) - u_2(t)), v)_V,$$

para todo  $v \in V$ , c.t.p.  $t \in (0, T)$ . Entonces, utilizando que  $A$  es un operador Lipschitz-continuo, deducimos que existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\|\Psi\tau_1 - \Psi\tau_2\|_V \leq C \|u_1 - u_2\|_V. \quad (8.2.15)$$

Además, por (8.2.13) sabemos que

$$\|u_\tau(t)\|_V \leq \int_0^t \|w_\tau(s)\|_V ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

entonces de (8.2.15) deducimos que

$$\|\Psi\tau_1(t) - \Psi\tau_2(t)\|_V \leq C \int_0^t \|w_1(s) - w_2(s)\|_V ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Utilizando Cauchy-Schwarz, deducimos de esta desigualdad que existe una constante  $\bar{C} > 0$  tal que

$$\|\Psi\tau_1(t) - \Psi\tau_2(t)\|_V^2 \leq \bar{C} \int_0^t \|w_1(s) - w_2(s)\|_V^2 ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (8.2.16)$$

Por otro lado, tomemos  $\tau = \tau_\alpha$  en (8.2.11) alternadamente y restemos ambas expresiones, obteniendo,

$$(\dot{w}_1 - \dot{w}_2, w_1 - w_2)_V + (B(w_1 - w_2), w_1 - w_2)_V = (\tau_2 - \tau_1, w_1 - w_2)_V.$$

Integrando con respecto al tiempo y utilizando que  $w_1(0) = w_2(0) = w_0$  se tiene que,

$$\begin{aligned} & \|w_1(t) - w_2(t)\|_V^2 + \int_0^t (B(w_1(s) - w_2(s)), w_1(s) - w_2(s))_V ds \\ &= \int_0^t (\tau_2(s) - \tau_1(s), w_1(s) - w_2(s))_V ds. \end{aligned}$$

Utilizando que  $B$  es un operador fuertemente monótono se tiene que existe una constante  $m_B$  tal que

$$\begin{aligned} m_B \int_0^t \|w_1(s) - w_2(s)\|_V^2 ds &\leq \int_0^t (B(w_1(s) - w_2(s)), w_1(s) - w_2(s))_V ds \\ &\leq \int_0^t (\tau_2(s) - \tau_1(s), w_1(s) - w_2(s))_V ds. \end{aligned}$$



Ahora, utilizando la desigualdad de Young,  $ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2$ ,  $a, b, \epsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\epsilon > 0$ , tenemos que

$$\begin{aligned} m_B \int_0^t \|w_1(s) - w_2(s)\|_V^2 ds &\leq \int_0^t (\tau_2(s) - \tau_1(s), w_1(s) - w_2(s))_V ds \\ &\leq \frac{1}{m_B} \int_0^t \|\tau_2(s) - \tau_1(s)\|_V^2 ds + \frac{m_B}{4} \int_0^t \|w_1(s) - w_2(s)\|_V^2 ds. \end{aligned}$$

De esta forma, deducimos que existe una constante  $\tilde{C} := 4/(3m_B^2) > 0$  tal que

$$\int_0^t \|w_1(s) - w_2(s)\|_V^2 ds \leq \tilde{C} \int_0^t \|\tau_2(s) - \tau_1(s)\|_V^2 ds,$$

y así, junto con (8.2.16) deducimos que

$$\|\Psi\tau_1(t) - \Psi\tau_2(t)\|_V^2 \leq \tilde{C} \int_0^t \|\tau_2(s) - \tau_1(s)\|_V^2 ds, \quad (8.2.17)$$

para todo  $t \in [0, T]$ . Por tanto, por un corolario del Teorema del punto fijo de Banach (véase por ejemplo la Proposición 3.1 en [150]), deducimos que existe un único  $\tau^* \in L^2(0, T; V)$  tal que  $\Psi\tau^* = \tau^*$ . Como consecuencia, tomando en (8.2.11)  $\tau = \tau^*$  recuperamos la expresión (8.2.8) y así, deducimos que el problema (8.2.11)–(8.2.12) se trata de una reformulación de (8.2.8)–(8.2.9). De esta forma, concluimos que (8.2.8)–(8.2.9) tiene solución única  $w \in H^1(0, T; V)$  y como consecuencia de (8.2.10),  $u \in H^2(0, T; V)$ . Así, como este problema era una reformulación del Problema 8.2.1, damos por finalizada la demostración del teorema.  $\square$

Gracias a este resultado, podemos asegurar la existencia y unicidad de solución de los problemas tridimensionales introducidos en la sección anterior (Problemas 8.1.2, 8.1.4, 8.1.5). En particular tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 8.2.3.** *Sea  $\Omega^\varepsilon$  el dominio en  $\mathbb{R}^3$  definido en la Sección 4.1 y sea  $\Theta$  un  $\mathcal{C}^2$ -difeomorfismo de  $\bar{\Omega}^\varepsilon$  en su imagen  $\Theta(\bar{\Omega}^\varepsilon)$ , tal que los tres vectores  $\mathbf{g}_i^\varepsilon(\mathbf{x}) = \partial_i^\varepsilon \Theta(\mathbf{x}^\varepsilon)$  son linealmente independientes para todo  $\mathbf{x}^\varepsilon \in \bar{\Omega}^\varepsilon$ . Sea  $\Gamma_0^\varepsilon$  un subconjunto  $d\Gamma^\varepsilon$ -medible de  $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega^\varepsilon$  con medida no nula. Sea  $f^{i,\varepsilon} \in L^2(0, T; L^2(\Omega^\varepsilon))$ ,  $h^{i,\varepsilon} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1^\varepsilon))$ , donde  $\Gamma_1^\varepsilon := \Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon$ . Sean  $\mathbf{u}_0^\varepsilon, \dot{\mathbf{u}}_0^\varepsilon \in V(\Omega^\varepsilon)$ . Entonces, existe una única solución  $\mathbf{u}^\varepsilon = (u_i^\varepsilon) : [0, T] \times \Omega^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$  que verifica el Problema 8.1.4. Además  $\mathbf{u}^\varepsilon \in H^2(0, T; V(\Omega^\varepsilon))$ .*

*Demostración.* Por simplicidad en la notación, sea  $V = V(\Omega^\varepsilon)$ . Por el Teorema de Representación de Riesz (véase el Teorema 4.11 en [14], por ejemplo) tenemos que existen operadores lineales Lipschitz-continuos  $B : V \rightarrow V$ ,  $A : V \rightarrow V$  y  $\mathbf{f} \in V$  tales que:

$$\begin{aligned} (B\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon)_V &:= \int_{\Omega^\varepsilon} B^{ijkl,\varepsilon} e_{k||l}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) e_{i||j}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) \sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon, \\ (A\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon)_V &:= \int_{\Omega^\varepsilon} A^{ijkl,\varepsilon} e_{k||l}^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) e_{i||j}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) \sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon, \end{aligned}$$

$$(\mathbf{f}, \mathbf{v}^\varepsilon)_V := \int_{\Omega^\varepsilon} f^{i,\varepsilon} v_i^\varepsilon \sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon + \int_{\Gamma_1^\varepsilon} h^{i,\varepsilon} v_i^\varepsilon \sqrt{g^\varepsilon} d\Gamma^\varepsilon,$$

para todo  $\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon \in V$ . Los operadores  $B$  y  $A$  son fuertemente monótonos como consecuencia de la elipticidad de los tensores de cuarto orden  $(A^{ijkl,\varepsilon})$  y  $(B^{ijkl,\varepsilon})$  por (4.2.4), (4.2.10) y (4.2.5), (4.2.11), respectivamente y por la desigualdad de Korn (véase el Teorema 4.3.6). Por tanto, el Problema 8.1.4 puede escribirse como: hallar  $\mathbf{u}^\varepsilon : [0, T] \times \Omega^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\varepsilon(t) &\in V \quad \forall t \in [0, T], \\ \ddot{\mathbf{u}} + B\dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(t) + A\mathbf{u}^\varepsilon(t) &= \mathbf{f}(t) \text{ c.t.p. } t \in (0, T), \\ \mathbf{u}^\varepsilon(0) &= \mathbf{u}_0^\varepsilon, \quad \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon(0) = \dot{\mathbf{u}}_0^\varepsilon \text{ en } V. \end{aligned}$$

Por tanto, podemos aplicar el Teorema 8.2.2 y concluir que el problema tiene solución única  $\mathbf{u}^\varepsilon \in H^2(0, T; V)$ .  $\square$

Utilizando los mismos argumentos obtendríamos los resultados análogos para los Problemas 8.1.2 y 8.1.5.

**Observación 8.2.4.** Nótese que, si definimos el producto interior,

$$(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon) := \int_{\Omega^\varepsilon} \varrho \mathbf{u}_i^\varepsilon \mathbf{v}_j^\varepsilon g^{ij,\varepsilon} \sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon,$$

la norma inducida es equivalente a la norma usual de  $L^2(\Omega^\varepsilon)$ , como consecuencia de la definición de  $\varrho$ , el hecho de que  $g^{ij,\varepsilon}$  denota las componentes de un tensor definido positivo (véase (4.1.11)) y de (4.1.13).

A continuación, probaremos el siguiente resultado que será clave para asegurar la existencia y unicidad de solución de los problemas bidimensionales que obtendremos en el análisis formal.

**Teorema 8.2.5.** Supongamos que  $A : V \rightarrow V$  es un operador lineal fuertemente monótono, Lipschitz-continuo,  $B : V \rightarrow V$  es un operador fuertemente monótono, Lipschitz-continuo y  $C : V \rightarrow V$  es un operador Lipschitz-continuo. Además, sean  $u_0, w_0 \in V$  y  $f \in L^2(0, T; V)$ . Entonces, existe una única solución del problema:

$$\begin{aligned} (\ddot{u}, v)_V + (Au + B\dot{u}, v)_V - \left( \int_0^t e^{-k(t-s)} Cu(s) ds, v \right)_V &= (f, v)_V, \quad \forall v \in V, \text{ c.t.p. } t \in (0, T), \\ u(0) &= u_0, \quad \dot{u}(0) = w_0. \end{aligned}$$

Además,  $u \in H^2(0, T; V)$ .

*Demostración.* En primer lugar escribamos el problema en términos de la velocidad: hallar  $w \in V$  para todo  $t \in [0, T]$  tal que

$$(\dot{w}, v)_V + (Au + Bw, v)_V - \left( \int_0^t e^{-k(t-s)} Cu(s) ds, v \right)_V = (f, v)_V, \quad (8.2.18)$$

$$w(0) = w_0, \quad (8.2.19)$$

para todo  $v \in V$ , *c.t.p.*  $t \in (0, T)$  y tal que el campo  $u$  viene dado por

$$u(t) = \int_0^t w(s)ds + u_0. \quad (8.2.20)$$

Sea  $M \in L^2(0, T; V)$  y consideremos el problema auxiliar: hallar  $w_M \in V$  para todo  $t \in [0, T]$  tal que

$$(\dot{w}_M, v)_V + (Au_M + Bw_M, v)_V = (f, v)_V + (M, v)_V, \quad (8.2.21)$$

$$w_M(0) = w_0, \quad (8.2.22)$$

para todo  $v \in V$ , *c.p.d.* en  $(0, T)$  y tal que el campo  $u_M$  viene dado por

$$u_M(t) = \int_0^t w_M(s)ds + u_0. \quad (8.2.23)$$

Sabemos por el Teorema 8.2.2 que este problema tiene solución única ya que es una reformulación del Problema 8.2.1 en términos de la velocidad (véase (8.2.8)–(8.2.9)). Entonces, existe un único  $w_M \in H^1(0, T; V)$  y un único  $u_M \in H^2(0, T; V)$  verificando (8.2.21)–(8.2.23). Probemos ahora, que el problema (8.2.21)–(8.2.22) es una reformulación del problema (8.2.18)–(8.2.19). Para ello consideremos el operador  $\Xi : L^2(0, T; V) \rightarrow L^2(0, T; V)$  definido por,

$$\Xi F = Cu_M, \text{ donde } M(t) = \int_0^t e^{-k(t-s)} F(s)ds, \text{ para todo } F \in L^2(0, T; V) \quad (8.2.24)$$

y donde  $u_M$  viene dado por (8.2.23). Sean  $F_1, F_2 \in L^2(0, T; V)$  y  $M_1, M_2$  las correspondientes expresiones según (8.2.24). Por simplicidad utilizaremos la notación  $u_\alpha = u_{M_\alpha}$  y  $w_\alpha = w_{M_\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2$ ). Por un lado, como  $C$  es un operador Lipschitz-continuo y por (8.2.23) existen unas contantes  $\bar{C}, C_1 > 0$  tales que

$$\begin{aligned} \|\Xi F_1(t) - \Xi F_2(t)\|_V^2 &= \|Cu_1(t) - Cu_2(t)\|_V^2 \leq \bar{C} \|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 \\ &\leq C_1 \int_0^t \|w_1(s) - w_2(s)\|_V^2 ds. \end{aligned} \quad (8.2.25)$$

Por otro lado, tomando  $M = M_\alpha$  alternadamente en (8.2.21) con  $v = w_1 - w_2$  y restando ambas expresiones, se tiene que

$$\begin{aligned} (\dot{w}_1 - \dot{w}_2, w_1 - w_2)_V + (A(u_1 - u_2), w_1 - w_2)_V \\ + (B(w_1 - w_2), (w_1 - w_2))_V = (M_1 - M_2, w_1 - w_2). \end{aligned}$$

Integrando con respecto a la variable temporal y teniendo en cuenta que  $u_1(0) = u_2(0) = u_0$  y  $w_1(0) = w_2(0) = w_0$  obtenemos que

$$\|w_1(t) - w_2(t)\|_V^2 + (A(u_1(t) - u_2(t)), u_1(t) - u_2(t))_V$$

$$+ \int_0^t (B(w_1(s) - w_2(s)), w_1(s) - w_2(s))_V ds = \int_0^t (M_1(s) - M_2(s), w_1(s) - w_2(s))_V ds.$$

Utilizando que  $A$  y  $B$  son operadores fuertemente monótonos se tiene que existe una constante  $m_B$  tal que,

$$\begin{aligned} m_B \int_0^t \|w_1(s) - w_2(s)\|_V^2 ds &\leq \int_0^t (B(w_1(s) - w_2(s)), w_1(s) - w_2(s))_V ds \\ &\leq \int_0^t (M_1(s) - M_2(s), w_1(s) - w_2(s))_V ds. \end{aligned}$$

Ahora, utilizando la desigualdad de Young,  $ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2$ ,  $a, b, \epsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\epsilon > 0$ , tenemos que

$$\begin{aligned} m_B \int_0^t \|w_1(s) - w_2(s)\|_V^2 ds &\leq \int_0^t (M_1(s) - M_2(s), w_1(s) - w_2(s))_V ds \\ &\leq \frac{1}{m_B} \int_0^t \|M_1(s) - M_2(s)\|_V^2 ds + \frac{m_B}{4} \int_0^t \|w_1(s) - w_2(s)\|_V^2 ds. \end{aligned}$$

De esta forma, deducimos que existe una constante  $\tilde{C} := 4/(3m_B^2) > 0$  tal que

$$\int_0^t \|w_1(s) - w_2(s)\|_V^2 ds \leq \tilde{C} \int_0^t \|M_1(s) - M_2(s)\|_V^2 ds.$$

Así de esta desigualdad, junto con (8.2.25) y (8.2.24), se tiene que existe una constante  $\hat{C} > 0$  tal que

$$\|\Xi F_1(t) - \Xi F_2(t)\|_V^2 \leq C_1 \tilde{C} \int_0^t \|M_1(s) - M_2(s)\|_V^2 ds \leq \hat{C} \int_0^t \int_0^s \|F_1(r) - F_2(r)\|_V^2 dr ds,$$

para todo  $t \in [0, T]$ . Por tanto, por un corolario del Teorema del punto fijo de Banach (véase por ejemplo la Proposición 3.1 en [150]), deducimos que existe un único  $F^* \in L^2(0, T; V)$  tal que  $HF^* = F^*$ . Como consecuencia, por (8.2.24) tenemos que

$$M^*(t) = \int_0^t e^{-k(t-s)} F^*(s) ds = \int_0^t e^{-k(t-s)} \Xi F^*(s) ds = \int_0^t e^{-k(t-s)} C u_{M^*}(s) ds.$$

Entonces, tomando  $M = M^*$  en (8.2.21) recuperamos la expresión (8.2.18) y así, deducimos que el problema (8.2.21)–(8.2.22) es una reformulación de (8.2.18)–(8.2.19). De esta forma, concluimos que este problema tiene solución única  $w \in H^1(0, T; V)$  y, como consecuencia de (8.2.20),  $u \in H^2(0, T; V)$ . Así, como (8.2.18)–(8.2.19) era una reformulación del problema original de este teorema, damos por finalizada la demostración de este resultado.  $\square$

### 8.3. Análisis asintótico formal

En esta sección deduciremos un modelo dinámico bidimensional para una lámina viscoelástica. Seguiremos los pasos análogos a los realizados en la Sección 4.4, en particular, en el Teorema 4.4.1. Por tanto, consideraremos las fuerzas aplicadas escaladas como en (4.2.24)–(4.2.25) lo que sustituyendo en el Problema 8.1.5 nos conduce al siguiente problema:

**Problema 8.3.1.** Hallar  $\mathbf{u}(\varepsilon) : [0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tal que,

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{u}(\varepsilon)(t, \cdot) \in V(\Omega) \quad \forall t \in [0, T], \\
 & \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}}_i(\varepsilon) v_j g^{ij}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon; \mathbf{u}(\varepsilon)) e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\
 & + \int_{\Omega} B^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon; \dot{\mathbf{u}}(\varepsilon)) e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v}) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\
 & = \int_{\Omega} \varepsilon^p f^{i,p}(\varepsilon) v_i \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} \varepsilon^p h^{i,p+1}(\varepsilon) v_i \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma \\
 & \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega), \text{ c.p.d. en } (0, T), \\
 & \mathbf{u}(\varepsilon)(0, \cdot) = \mathbf{u}_0(\varepsilon)(\cdot), \quad \dot{\mathbf{u}}(\varepsilon)(0, \cdot) = \dot{\mathbf{u}}_0(\varepsilon)(\cdot).
 \end{aligned} \tag{8.3.1}$$

Este problema tiene una única solución para cada  $\varepsilon > 0$ , siguiendo los argumentos utilizados en el Teorema 8.2.2. Además, para cada  $\varepsilon > 0$ ,  $\mathbf{u}(\varepsilon) \in H^2(0, T; V(\Omega))$ .

Supongamos que  $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^3(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$  y que la incógnita escalada admite un desarrollo asintótico de la forma (4.4.1). Al igual que en el caso cuasiestático asumiremos las hipótesis (4.4.4) y (4.4.5), es decir, que el término de orden cero de la condición inicial es independiente de la variable transversal y que las deformaciones al inicio del periodo de observación son a lo sumo de orden  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ . Además, también supondremos que la velocidad inicial admite un desarrollo de la forma,

$$\dot{\mathbf{u}}_0(\varepsilon) = \dot{\mathbf{u}}_0^0 + \varepsilon \dot{\mathbf{u}}_0^1 + \varepsilon^2 \dot{\mathbf{u}}_0^2 + \dots \quad \text{con } \dot{\mathbf{u}}_0^0(\cdot) = \dot{\mathbf{u}}^0(0, \cdot),$$

donde  $\dot{\mathbf{u}}_0^0 \in V(\Omega)$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_0^q \in [H^1(\Omega)]^3$  con  $q \geq 1$  y  $\partial_3 \dot{\mathbf{u}}_0^0 = \mathbf{0}$ .

A continuación, identificamos en el siguiente resultado el término principal  $\mathbf{u}^0$  del desarrollo asintótico (4.4.1) siguiendo los mismos pasos realizados en el Teorema 4.4.1.

**Teorema 8.3.2.** Consideremos el Problema 8.3.1 tras sustituir el desarrollo asintótico de  $\mathbf{u}(\varepsilon)$  propuesto en (4.4.1). Identificando los términos multiplicados por la misma potencia de  $\varepsilon$  tenemos que:

(a) El término principal  $\mathbf{u}^0$  del desarrollo asintótico es independiente de la variable transversal  $x_3$ . Por tanto, se puede identificar con una función  $\boldsymbol{\xi}^0$  tal que  $\boldsymbol{\xi}^0 = \mathbf{0}$  en  $\gamma_0$  y también podemos identificar  $\mathbf{u}_0^0$  y  $\dot{\mathbf{u}}_0^0$  con  $\boldsymbol{\xi}_0^0(\cdot) = \boldsymbol{\xi}^0(0, \cdot)$  y  $\dot{\boldsymbol{\xi}}_0^0(\cdot) = \dot{\boldsymbol{\xi}}^0(0, \cdot)$ , respectivamente.

(b) Asumamos que  $V_0(\omega) = \{\mathbf{0}\}$ . Entonces, obtenemos que  $\xi^0$  es solución de unas ecuaciones límite bidimensionales, que podemos describir como ecuaciones dinámicas de una lámina membrana viscoelástica: Hallar  $\xi^0 : [0, T] \times \omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que,

$$\begin{aligned} \xi^0(t, \cdot) &\in V(\omega) \quad \forall t \in [0, T], \\ 2 \int_{\omega} \varrho \ddot{\xi}_i^0 \eta_j a^{ij} \sqrt{a} dy &+ \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\xi^0) \gamma_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy + \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\dot{\xi}^0) \gamma_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy \\ &- \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\xi^0(s)) \gamma_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy ds \\ &= \int_{\omega} p^{i,0} \eta_i \sqrt{a} dy \quad \forall \eta = (\eta_i) \in V(\omega), \quad \text{c.p.d. en } (0, T), \\ \xi^0(0, \cdot) &= \xi_0^0(\cdot), \quad \dot{\xi}^0(0, \cdot) = \dot{\xi}_0^0(\cdot), \end{aligned}$$

donde,

$$p^{i,0}(t) := \int_{-1}^1 f^{i,0}(t) dx_3 + h_+^{i,1}(t) + h_-^{i,1}(t) \quad \text{y} \quad h_{\pm}^{i,1}(t, \cdot) = h^{i,1}(t, \cdot, \pm 1) \quad \forall t \in [0, T].$$

*Demostración.* Para la demostración de este teorema tomaremos valores particulares para  $p$  en el Problema 8.3.1. Después, agrupamos los términos multiplicados por las mismas potencias de  $\varepsilon$ .

Nótese que el término inercial del Problema 8.3.1, esto es, el término adicional que no se hallaba en la ecuación del caso cuasiestático en el Problema 4.2.9, es de orden  $\mathcal{O}(1)$  (como consecuencia del desarrollo asintótico propuesto (4.4.1)). Entonces, agrupando los términos multiplicados por las mismas potencias de  $\varepsilon$  en el Problema 8.3.1 (y tomando valores particulares para  $p$ ) obtendremos los mismos resultados que en los pasos (i) – (ii) de la demostración del Teorema 4.4.1. De esta forma, la prueba del apartado (a) de este teorema se obtiene siguiendo los mismos argumentos que el caso cuasiestático. Por tanto, teniendo cuenta lo resultados de los pasos (i) – (ii), continuaremos la demostración con el paso (iii) correspondiente.

(iii) Sea  $p = 0$  en (8.3.1). Agrupando los términos multiplicados por  $\varepsilon^0$ , teniendo en cuenta (4.3.3)–(4.3.4), el paso (i) (véase la demostración del Teorema 4.4.1) y (8.1.7) se tiene que

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \varrho \ddot{u}_i v_j a^{ij} \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) \left( e_{k||l}^0 e_{i||j}^0(\mathbf{v}) + e_{k||l}^1 e_{i||j}^{-1}(\mathbf{v}) \right) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} \tilde{A}^{ijkl,1} e_{k||l}^0 e_{i||j}^{-1}(\mathbf{v}) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} B^{ijkl}(0) \left( \dot{e}_{k||l}^0 e_{i||j}^0(\mathbf{v}) + \dot{e}_{k||l}^1 e_{i||j}^{-1}(\mathbf{v}) \right) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega} \tilde{B}^{ijkl,1} \dot{e}_{k||l}^0 e_{i||j}^{-1}(\mathbf{v}) dx \\ &= \int_{\Omega} f^{i,0} v_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^{i,1} v_i \sqrt{a} d\Gamma, \end{aligned} \tag{8.3.2}$$

para todo  $\mathbf{v} \in V(\Omega)$ , *c.p.d.* en  $(0, T)$ . Tomando  $\mathbf{v} \in V(\Omega)$  tal que sea independiente de  $x_3$ , esto es, tal que podemos identificar  $\mathbf{v}$  con una función  $\boldsymbol{\eta} \in V(\omega)$ , podemos seguir los mismos cambios realizados en la expresión (4.4.23) y así, obtener,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \varrho \ddot{u}_i \eta_j a^{ij} \sqrt{a} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}^0 e_{\alpha||\beta}^0(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \dot{e}_{\sigma||\tau}^0 e_{\alpha||\beta}^0(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx \\ & - \frac{1}{2} \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\Omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}^0(s) e_{\alpha||\beta}^0(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dx ds \\ & = \int_{\Omega} f^{i,0} \eta_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} h^{i,1} \eta_i \sqrt{a} d\Gamma, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in V(\omega) \text{ c.p.d. en } (0, T), \end{aligned}$$

donde  $a^{\alpha\beta\sigma\tau}$ ,  $b^{\alpha\beta\sigma\tau}$  y  $c^{\alpha\beta\sigma\tau}$  denotan las componentes contravariantes de los tensores bi-dimensionales de cuarto orden, definidos en (4.4.10)–(4.4.12). Recordemos que si  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times L^2(\omega)$ , entonces  $\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \in L^2(\omega)$ , obteníamos que  $e_{\alpha||\beta}^0(t) = \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi}^0(t))$  y  $e_{\alpha||\beta}^0(\boldsymbol{\eta}(t)) = \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}(t))$  para todo  $\boldsymbol{\eta} \in V(\omega) \forall t \in [0, T]$ , (véanse (4.4.2), (4.4.3) y (4.4.6)). Y así, teniendo en cuenta (i) (véase la demostración del Teorema 4.4.1) obtenemos el siguiente problema: hallar  $\boldsymbol{\xi}^0 : [0, T] \times \omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que,

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\xi}^0(t, \cdot) \in V(\omega) \quad \forall t \in [0, T], \\ & 2 \int_{\omega} \varrho \ddot{\xi}_i^0 \eta_j a^{ij} \sqrt{a} dy + \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\xi}^0) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy + \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\dot{\boldsymbol{\xi}}^0) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy \\ & - \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\xi}^0(s)) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy ds \\ & = \int_{\omega} p^{i,0} \eta_i \sqrt{a} dy \quad \forall \boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in V(\omega), \text{ c.p.d. en } (0, T), \\ & \boldsymbol{\xi}^0(0, \cdot) = \boldsymbol{\xi}_0^0(\cdot), \quad \dot{\boldsymbol{\xi}}^0(0, \cdot) = \dot{\boldsymbol{\xi}}_0^0(\cdot). \end{aligned}$$

Por tanto, concluimos el apartado (b) y completamos la demostración del teorema.  $\square$

**Observación 8.3.3.** *Al igual que en el caso cuasiestático de los capítulos anteriores, se podrían deducir las ecuaciones para la lámina dinámica flexural viscoelástica siguiendo los pasos del análisis formal desarrollado en el Teorema 4.4.1 y las ideas utilizadas en el caso de la lámina dinámica flexural elástica de [86].*

Como consecuencia del teorema anterior hemos deducido el siguiente problema dinámico bidimensional para una membrana viscoelástica:

**Problema 8.3.4.** *Hallar  $\boldsymbol{\xi}^0 : [0, T] \times \omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que,*

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\xi}(t, \cdot) \in V(\omega) \quad \forall t \in [0, T], \\ & 2 \int_{\omega} \varrho \ddot{\xi}_i \eta_j a^{ij} \sqrt{a} dy + \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\xi}) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy + \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\dot{\boldsymbol{\xi}}) \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}) \sqrt{a} dy \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& - \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\xi(s)) \gamma_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy ds \\
& = \int_{\omega} p^{i,0} \eta_i \sqrt{a} dy \quad \forall \eta = (\eta_i) \in V(\omega), \quad \text{c.p.d. en } (0, T), \\
& \xi(0, \cdot) = \xi_0(\cdot), \quad \dot{\xi}(0, \cdot) = \dot{\xi}_0(\cdot),
\end{aligned}$$

donde,

$$p^{i,0}(t) := \int_{-1}^1 f^{i,0}(t) dx_3 + h_+^{i,1}(t) + h_-^{i,1}(t) \quad \text{y} \quad h_{\pm}^{i,1}(t, \cdot) = h^{i,1}(t, \cdot, \pm 1) \quad \forall t \in [0, T].$$

Al igual que ocurría en el caso cuasiestático, el Problema 8.3.4 no está bien definido si no consideramos una completación del espacio  $V(\omega)$ . Esto nos vuelve a llevar a la distinción entre las membranas elípticas y membranas generalizadas viscoelásticas presentadas para el caso cuasiestático en los Capítulos 5 y 6, respectivamente.

En el caso de que la superficie media  $S$  de la membrana viscoelástica sea elíptica y la condición de contorno se considere en toda la frontera lateral de la lámina, definiremos el Problema 8.3.4 en el espacio  $V_M(\omega) = H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times L^2(\omega)$  (véase el Capítulo 5). Por tanto, podemos asegurar la existencia y unicidad de solución del problema dinámico de la membrana elíptica viscoelástica que presentamos en el siguiente teorema:

**Teorema 8.3.5.** Sean  $\omega$  un dominio en  $\mathbb{R}^2$ ,  $\theta \in C^2(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3)$  una aplicación inyectiva tal que los dos vectores  $\alpha_a = \partial_a \theta$  son linealmente independientes en todo punto de  $\bar{\omega}$ . Sean  $f^{i,0} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $h^{i,1} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$ , donde  $\Gamma_1 := \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ . Sean  $\xi_0, \dot{\xi}_0 \in V_M(\omega)$ . Entonces el Problema 8.3.4, tiene solución única  $\xi \in H^2(0, T; V_M(\omega))$ .

*Demostración.* Sea  $V := V_M(\omega)$ . Entonces, por el Teorema de representación de Riesz (véase el Teorema 4.11 en [14], por ejemplo) tenemos que existen unos operadores lineales Lipschitz-continuos  $A, B, C : V \rightarrow V$ , y una función  $f \in V$  tales que:

$$\begin{aligned}
(A\xi, \eta)_V &:= \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\xi) \gamma_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy, \\
(B\xi, \eta)_V &:= \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\xi) \gamma_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy, \\
(C\xi, \eta)_V &:= \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\xi) \gamma_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy, \\
(f, \eta)_V &:= \int_{\omega} p^{i,0} \eta_i \sqrt{a} dy,
\end{aligned}$$

para todo  $\xi, \eta \in V_M(\omega)$ . Por tanto, podemos considerar el Problema 8.3.4 en el marco de la formulación del problema del Teorema 8.2.5, ya que  $p^{i,0} \in L^2(0, T; L^2(\omega))$  y por la elipticidad de los tensores bidimensionales en (4.4.37)–(4.4.38) y la desigualdad de tipo Korn en (5.1.3). Por tanto, siguiendo argumentos análogos a los de la demostración del Teorema 8.2.5, tenemos que el Problema 8.3.4 tiene solución única  $\xi \in H^2(0, T; V_M(\omega))$ .  $\square$

**Observación 8.3.6.** *Nótese que, si definimos el producto interior,*

$$(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) := 2 \int_{\omega} \varrho \xi_i \eta_j a^{ij} \sqrt{a} dy,$$

*la norma inducida es equivalente a la norma usual de  $L^2(\omega)$ , como consecuencia de la definición de  $\varrho$ , el hecho de que  $a^{ij}$  denota las componentes de un tensor definido positivo (véase (8.1.6)) y de (4.1.9).*

En otro caso, si la superficie media de la lámina no es elíptica o la condición de contorno no se considera en la totalidad de la frontera lateral, el problema se denominará como ecuaciones dinámicas de una membrana generalizada viscoelástica (véase el Capítulo 6). Como vimos allí, además se tendrá que considerar una subdivisión de este grupo entre membranas generalizadas del primer tipo y del segundo tipo. En cada uno de esos casos, considerando la correspondiente compleción de los espacios  $V(\omega)$  y  $V(\Omega)$  y junto con la condición de las fuerzas admisibles (véase la Sección 6.2), podremos asegurar la existencia y unicidad de solución utilizando los argumentos del Teorema 8.2.5 (análogamente a los resultados del caso cuasiestático de los Teoremas 6.3.1 y 6.3.4).





## Parte III

Modelo acoplado para un fluido viscoso  
en una tubería curva con paredes en  
movimiento





# Introducción a la Parte III

Los modelos acoplados surgen con naturalidad a la hora de estudiar problemas del mundo real. Esto se debe a que, con frecuencia, este tipo de problemas se pueden describir haciendo uso de varios modelos de la mecánica de medios continuos que se complementan entre sí. Un claro ejemplo de este acoplamiento entre diferentes modelos es el del problema del campo de la biomedicina que ha servido como motivación de esta memoria: el flujo de la sangre en un vaso sanguíneo. En este ejemplo, la sangre (que podemos modelar como un fluido) ejerce una presión sobre las paredes del vaso sanguíneo (que podemos modelar como un sólido). En consecuencia, las paredes del vaso sanguíneo se mueven, lo que a su vez hace que el dominio en el que se resuelven las ecuaciones que modelan el flujo de la sangre varíe. En esta dirección, existe una importante colección de artículos y libros cuyos autores dedican a problemas relacionados con el sistema circulatorio en el cuerpo humano. Citaremos en esta introducción algunas obras de referencia en esta especialidad. Una óptima predicción del comportamiento de estos problemas necesita de la consideración de modelos acoplados que se obtengan combinando el movimiento del fluido en el interior de los vasos y la respuesta del tejido biológico.

Los problemas de interacción fluido-estructura que involucran interfaces en movimiento han sido un gran foco de atención durante más de dos décadas. Una de las primeras incógnitas que presenta un modelo acoplado es la existencia de problemas bien definidos y de solución de los mismos. Como ya hemos mencionado anteriormente en esta memoria, propondremos el estudio de existencia de solución de los modelos acoplados como trabajo futuro; sin embargo, mencionaremos algunos estudios relacionados con nuestro caso que podrían ser de interés. En particular, ya hemos citado el trabajo [2] donde se analizan las ecuaciones de Navier-Stokes en un dominio con frontera en movimiento con condiciones de contorno de presión-velocidad. Este trabajo es una generalización de [91], donde se consideraba una condición de monotonía sobre la variación temporal del dominio y condiciones de contorno involucrando la presión. Los resultados presentes en esas referencias, junto con los obtenidos para el caso particular de estructuras finas en [108], podrían indicar los primeros pasos de un posible estudio en este sentido. Con posterioridad a esas referencias, en [44] encontramos resultados sobre la existencia de solución débil de problemas de fluido-estructura considerando las ecuaciones de Navier-Stokes para modelar el fluido y una ley de pared elástica para la estructura. Pocos años más tarde, en [26], se obtienen resultados análogos para la interacción entre un fluido viscoso y placas elásticas. En [27], se presenta un estudio sobre la existencia y unicidad de solución del problema acoplado de

las ecuaciones de Navier-Stokes y una lámina no lineal elástica (bio-membrana). Además, en [28], los autores consideran el mismo problema pero con una ley de pared no lineal de una lámina elástica de Koiter, considerando como condición de contorno la continuidad entre los desplazamientos y las tensiones en la pared. Más recientemente, en [84] también se considera una interacción con una estructura de tipo lámina de Koiter para el estudio de existencia débil de solución.

Otra de las dificultades que presentan estos modelos acoplados es su resolución numérica. Hoy en día, a pesar del gran avance tecnológico experimentado en las últimas décadas, la resolución de este tipo de modelos requiere de un gran coste computacional y presenta ciertos problemas de estabilidad numérica. Como consecuencia, en muchos trabajos se consideran estudios de modelos reducidos, como en [17, 17, 53, 54, 130, 143, 165] donde se presentan modelos unidimensionales para modelar el flujo sanguíneo, obteniendo buenos resultados numéricos. Las ecuaciones de este tipo de modelos se deducen formalmente integrando la condición de incompresibilidad y la componente axial del momento lineal. En el caso de los modelos unidimensionales, es muy interesante su comparación con los resultados obtenidos con modelos tridimensionales como se estudia en [165] para problemas hemodinámicos.

Para la obtención de modelos reducidos en este campo, también podemos destacar numerosos trabajos donde estos modelos se derivan utilizando el método asintótico. Por ejemplo, en [160, 161] se usan los métodos asintóticos para modelar un problema vascular incluyendo estimaciones del error. También encontramos en [117] estudios asintóticos de problemas de interacción fluido-estructura en canales con paredes viscoelásticas. Sus autores, presentan en [118] un estudio asintótico tridimensional de un fluido en una tubería con paredes elásticas (membranas). En [119, 120] analizan el problema de interacción fluido-estructura entre el movimiento de un fluido viscoso y una tubería elástica y un flujo periódico y una placa de pequeño espesor, respectivamente. También incluyen resultados de existencia y unicidad de solución débil y estimaciones del error. En [121], considerando un problema similar, realizan un estudio asintótico en una tubería elástica cuya densidad y módulo de Young dependen del parámetro pequeño que mide el ratio del radio de la sección transversal de la tubería y el espesor de las paredes de la misma.

Además de la obtención de modelos reducidos y los métodos asintóticos, también existen otras formas de estudiar este tipo de modelos acoplados. Por ejemplo, en [112] el acoplamiento del fluido con la estructura se realiza considerando condiciones de tipo Robin con lo que obtienen estimaciones de estabilidad del esquema propuesto. En [164] se utiliza el método de descomposición de dominios para el problema acoplado con aplicaciones al flujo sanguíneo. En [131] se estudia la existencia local de un problema de multiescala, acoplando un problema de valor inicial en una región vascular particular y otro problema análogo para el resto del sistema circulatorio, si bien destaca otras posibles aplicaciones.

En esta parte de la memoria, presentaremos dos modelos formales acoplados para el problema del fluido viscoso en el interior de la tubería curva con paredes móviles. Así, consideraremos los casos donde la pared sigue una ley viscoelástica o una ley elástica para describir el modelo de interacción de fluido-estructura utilizando los resultados desarrollados en las Partes I y II de este trabajo. Además, también indicaremos los siguientes pasos



a realizar en el estudio de estos modelos y algunos ejemplos numéricos obtenidos para el caso elástico.





## Capítulo 9

# Modelos acoplados del flujo en una tubería curva con paredes móviles

En este capítulo presentaremos dos ejemplos de modelos acoplados para el estudio del flujo de un fluido viscoso incompresible en el interior de una tubería curva con paredes móviles. Para ello, utilizaremos los resultados obtenidos a lo largo de esta memoria en las Partes I y II.

En primer lugar, en la Sección 9.1, consideraremos que la pared de la tubería está formada por un material viscoelástico, como el considerado para la lámina en la Parte II. Combinaremos el modelo asintótico obtenido para el fluido en el Capítulo 2 (en particular, (2.3.28)–(2.3.29)) con el modelo asintótico deducido para el problema dinámico de la lámina dinámica viscoelástica (en particular, el Problema 8.3.4). Obtendremos así un modelo asintótico acoplado formal e indicaremos cómo se realiza dicho acoplamiento. Además, indicaremos las dificultades encontradas en esta fase previa del estudio y las posibles líneas de investigación que surgen a partir del modelo propuesto.

En segundo lugar, en la Sección 9.2, asumiremos que la pared de la tubería está hecha de un material elástico, cuya ley de pared es descrita por la relación algebraica presentada en (1.4.1). El modelo acoplado resultante será la combinación de esta ley de pared y el modelo asintótico para el fluido desarrollado en la Parte I. En este caso, mostraremos algunos resultados numéricos obtenidos mediante la resolución del modelo propuesto con la ayuda del *software* libre Freefem (véase [72]). Aquí también identificaremos cuales serán los siguientes pasos a realizar en el trabajo futuro.

### 9.1. Modelo acoplado con una ley de pared viscoelástica

Comenzaremos este capítulo presentando las ecuaciones del problema físico acoplado del flujo viscoso incompresible en un tubo con paredes viscoelásticas, problema motivador de esta memoria. Después, propondremos un modelo acoplado reducido utilizando los resultados obtenidos en este trabajo.

Antes de presentar las ecuaciones del modelo tridimensional, introduciremos la notación



Problema fluido Parte I			Problema lámina Parte II		
$\Omega^F$	$\longleftrightarrow$	$\hat{\Omega}_t^\varepsilon$	$\Omega^S$	$\longleftrightarrow$	$\Omega^*$
$\Gamma_-^F$	$\longleftrightarrow$	$\Sigma_l^\varepsilon$	$\Gamma_-^S$ y $\Gamma_+^S$	$\longleftrightarrow$	$\Gamma_-^*$ y $\Gamma_+^*$
$\Gamma_\alpha^F$	$\longleftrightarrow$	$\Sigma_\alpha^\varepsilon$	$\Gamma_0^S$	$\longleftrightarrow$	$\Gamma_0^*$
$(\mathbf{v}, p)$	$\longleftrightarrow$	$(\mathbf{u}^\varepsilon, p)$	$\mathbf{u}$	$\longleftrightarrow$	$\mathbf{u}^\varepsilon$
$\mathbf{v}_0$	$\longleftrightarrow$	$\mathbf{u}_0^\varepsilon$	$\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0$	$\longleftrightarrow$	$\mathbf{u}_0^\varepsilon, \dot{\mathbf{u}}_0^\varepsilon$
$\rho^F$	$\longleftrightarrow$	$\rho_0$	$\rho^S$	$\longleftrightarrow$	$\varrho$
$\varepsilon^F$	$\longleftrightarrow$	$\varepsilon$	$\varepsilon^S$	$\longleftrightarrow$	$\varepsilon$

Tabla 9.1: Correspondencia entre la notación de la Parte III y las Partes I y II, respectivamente.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \text{ en } \Omega^F, \\ \mathbf{v} &= \left( \varepsilon \frac{\partial R}{\partial t} \right) \hat{\mathbf{n}} \text{ en } \bar{\Gamma}_-^S \equiv \Gamma_-^F, \end{aligned} \quad (9.1.1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{g}_1^\varepsilon \text{ en } \Gamma_1^F \text{ y } \mathbf{v} = \mathbf{g}_2^\varepsilon \text{ en } \Gamma_2^F, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0(0, \cdot) \text{ en } \Omega^F, \\ \rho^S \ddot{u}_i - \partial_j^* \sigma^{ij,*}(\mathbf{u}) &= f^{i,*} \text{ en } \Omega^S, \\ u_i &= 0 \text{ en } \Gamma_0^S, \\ \sigma^{ij,*}(\mathbf{u}) n_j^* &= h^{i,*} \text{ en } \bar{\Gamma}_-^S, \quad \sigma^{ij,*}(\mathbf{u}) n_j^* = 0 \text{ en } \Gamma_+^S, \end{aligned} \quad (9.1.2)$$

$$\mathbf{u}(0, \cdot) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0, \cdot) = \mathbf{w}_0 \text{ en } \Omega^S, \quad (9.1.3)$$

$$R(t, s_1) = R_0(s_1) + \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \text{ en } \bar{\Gamma}_-^S \equiv \Gamma_-^F, \quad (9.1.4)$$

$$\mathbf{h}^* = p \mathbf{n}^* \text{ en } \bar{\Gamma}_-^S \equiv \Gamma_-^F. \quad (9.1.4)$$

Estas ecuaciones son el resultado de combinar las ecuaciones del Problema 2.1.2, las del Problema 8.1.2 (véanse los correspondientes problemas para más detalle) y de añadir las condiciones de acoplamiento (9.1.3)–(9.1.4), donde la función  $R_0$  denota el radio de la sección transversal en reposo en cada punto de la línea media de la tubería. El acoplamiento entre los dos modelos se produce en la cara interior de la tubería, es decir,  $\bar{\Gamma}_-^S \equiv \Gamma_-^F$ , como se indica en el modelo. Además, en (9.1.2) estamos suponiendo que las fuerzas superficiales ejercidas sobre el exterior de la tubería,  $\Gamma_+^S$ , son despreciables y las fuerzas superficiales actuando sobre la cara interior,  $\bar{\Gamma}_-^S \equiv \Gamma_-^F$ , corresponden a la presión que el fluido ejerce sobre las paredes de la tubería.

Teniendo en cuenta el trabajo realizado en las Partes I y II de esta memoria, proponemos como aproximación al Problema 9.1.1 el acoplamiento de los modelos del fluido obtenido en el Capítulo 2 y el modelo dinámico de la membrana viscoelástica desarrollado en el Capítulo 8.

Por un lado, denotábamos por  $(\tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon), \tilde{p}(\varepsilon))$  a la aproximación asintótica para el fluido

viscoso dada por (véanse (2.3.28)–(2.3.29)):

$$\tilde{\mathbf{u}}(\varepsilon^F) = \mathbf{u}^0 + \mathbf{B}^0 + \mathbf{H}^0 + \varepsilon^F (\mathbf{u}^1 + \mathbf{B}^1 + \mathbf{H}^1) + (\varepsilon^F)^2 (\mathbf{u}^2 + \mathbf{B}^2 + \mathbf{H}^2), \quad (9.1.5)$$

$$\tilde{p}(\varepsilon^F) = \frac{1}{(\varepsilon^F)^2} p^0 + \frac{1}{\varepsilon^F} (p^1 + b^1 + h^1) + p^2 + b^2 + h^2 + \varepsilon^F (b^3 + h^3), \quad (9.1.6)$$

donde  $\mathbf{u}^i$  y  $p^i$  son los términos del desarrollo asintótico identificados en el Teorema 1.3.5 y  $\mathbf{B}^i$ ,  $b^{i+1}$ ,  $\mathbf{H}^i$  y  $h^{i+1}$  ( $i = 0, 1, 2$ ) denotan los correctores identificados en los Teoremas 2.3.1 y 2.3.2.

Como observábamos en los teoremas mencionados, las expresiones de los términos del desarrollo asintótico propuesto dependen de la función  $R(t, s_1)$  que está relacionada con el radio de la sección transversal de la tubería curva.

Por otro lado, denotábamos por  $\xi_i \mathbf{a}^i$  al campo de desplazamientos de una lámina dinámica viscoelástica que verifica las ecuaciones del Problema 8.3.4. A continuación, describimos como podríamos resolver el modelo acoplado resultante:

(a) Fijada una posición de la lámina, es decir, conocido el campo de desplazamientos  $\xi_i \mathbf{a}^i$  obtenemos la función,

$$R(t, s_1) = R_0(s_1) + \xi_3, \quad (9.1.7)$$

donde la función  $R_0$  denota el radio de la sección transversal en reposo en cada punto de la línea media de la tubería. Conocido el radio de cada sección transversal de la tubería media, podemos obtener las velocidades y las presiones de la aproximación asintótica (9.1.5)–(9.1.6). En primer lugar, obtenemos los valores de la presión. Considerando condiciones de contorno para los términos de la presión y substituyendo el valor de (9.1.7) y sus derivadas podemos obtener  $p^0, p^1, p^2$  mediante las expresiones (véase el Teorema 1.3.5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^4 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) &= 16\nu\rho_0 R \frac{\partial R}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^4 \frac{\partial p^1}{\partial s_1} \right) &= 0, \\ p^2 &= -\frac{R^2}{4} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} s_3^2 + p_0^2(t, s_1), \end{aligned} \quad (9.1.8)$$

con  $p_0^2(t, s_1)$  solución del problema (1.3.33).

**Observación 9.1.2.** Si añadimos los correctores de capa límite a la aproximación asintótica, como en (9.1.5)–(9.1.6), las condiciones de contorno para las ecuaciones diferenciales de los términos de presión (9.1.8) y (1.3.33), vienen dadas por las condiciones requeridas en los Teoremas 2.3.1 y 2.3.2 para asegurar la existencia de solución de los problemas correspondientes (véanse los apartados (ii) – (iii) de la demostración del Teorema 2.3.1). En otro caso, en lugar de la la aproximación (9.1.5)–(9.1.6), se puede considerar la aproximación (1.3.58)–(1.3.59), esto es, omitiendo la obtención de los correctores de capa límite. Como consecuencia, reduciríamos el orden de aproximación en los extremos de la tubería.

En segundo lugar, utilizando los valores de los términos de la presión que acabamos de calcular, de (9.1.7) y sus respectivas derivadas, calculamos los valores de los términos de la velocidad  $\mathbf{u}^0 = u_1^0 \mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{u}^1 = u_1^1 \mathbf{v}_1 + u_2^1 \mathbf{v}_2 + u_3^1 \mathbf{v}_3$ ,  $\mathbf{u}^2 = u_1^2 \mathbf{v}_1 + u_2^2 \mathbf{v}_2 + u_3^2 \mathbf{v}_3$  mediante las expresiones:

$$\begin{aligned} u_1^0 &= \frac{R^2}{4\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} (s_3^2 - 1), \\ u_1^1 &= \left[ \frac{3R^3 \kappa s_3 \cos s_2}{16\nu\rho_0} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} + \frac{R^2}{4\nu\rho_0} \frac{\partial p^1}{\partial s_1} \right] (s_3^2 - 1), \\ u_2^1 &= \frac{s_3 R}{16\rho_0\nu} \left[ 2 \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) - R^2 s_3^2 \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} \right] \cos s_2, \\ u_3^1 &= \frac{s_3 R}{16\rho_0\nu} \left[ 2 \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) - R^2 s_3^2 \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} \right] \sin s_2, \end{aligned}$$

$u_1^2$  dado en (1.3.31) y  $\mathbf{U}^2 = (u_2^2, u_3^2)$  la solución única del problema (1.3.55), la cual también puede ser obtenida explícitamente (véase el Apéndice A.2). En tercer lugar, utilizando los valores de los términos de la velocidad, la presión, de (9.1.7) y sus parciales, añadiríamos los correctores de capa límite buscando la solución de los problemas que se indican en los Teoremas 2.3.1 y 2.3.2. De esta forma, tenemos el valor de la aproximación asintótica para los campos de velocidades y presiones (9.1.5)–(9.1.6).

(b) Fijada la presión en el interior de la tubería, es decir, conocida la fuerza superficial  $h_-^i$ , y una posición y velocidad inicial de la lámina, es decir,  $\xi_0$  y  $\dot{\xi}_0$ , podemos obtener los desplazamientos de la lámina,  $\xi = (\xi_i)$ , resolviendo la ecuación variacional (véase el Problema 8.3.4):

$$\begin{aligned} & 2 \int_{\omega} \rho^S \ddot{\xi}_i \eta_j a^{ij} \sqrt{a} dy + \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\xi) \gamma_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy + \int_{\omega} b^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\dot{\xi}) \gamma_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy \\ & - \int_0^t e^{-k(t-s)} \int_{\omega} c^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\xi(s)) \gamma_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy ds \\ & = \int_{\omega} h_-^i \eta_i \sqrt{a} dy \quad \forall \eta = (\eta_i) \in V(\omega), \text{ c.p.d. en } (0, T), \\ & \xi(0, \cdot) = \xi_0(\cdot), \quad \dot{\xi}(0, \cdot) = \dot{\xi}_0(\cdot). \end{aligned}$$

(c) Dado que el problema resultante es fuertemente acoplado (la obtención de las incógnitas que cada problema por separado dependen de la solución del otro), una forma de resolverlo sería mediante la aplicación de un algoritmo de tipo punto fijo en cada instante de tiempo. Partiendo de una posición y velocidad inicial de la tubería podríamos obtener las presiones (9.1.6) en ese instante inicial como hemos descrito en (a). Después trasladaríamos la presión al problema de la membrana elíptica resolviendo el problema descrito en (b) y actualizaríamos el valor de  $R$  a través de (9.1.7). Después, iniciaríamos el bucle del punto fijo calculando los nuevos valores para las presiones, las velocidades y los desplazamientos en ese orden. Comparando sus valores con los antiguos, pasaremos al siguiente



paso de tiempo si su diferencia es más pequeña que una tolerancia establecida. En caso contrario, repetimos el bucle del punto fijo con los nuevos valores como datos de partida. Así sucesivamente, obtendríamos los valores de las funciones en cada paso de tiempo.

**Observación 9.1.3.** *El modelo acoplado reducido propuesto podría modelar el problema de interacción fluido-estructura producido por el flujo sanguíneo en un vaso del sistema circulatorio. En efecto, en la literatura muchos autores señalan al modelo de membrana como el idóneo para predecir el comportamiento de las paredes de los vasos sanguíneos (véanse, por ejemplo [112, 120, 160, 161]).*

*Además, nótese que en (9.1.7) sólo estamos considerando los desplazamientos radiales de la lámina. Esto es consecuencia de la condición de contorno (9.1.1), donde asumíamos que esos serían los únicos desplazamientos admisibles, o en otras palabras, que los desplazamientos en las otras direcciones son despreciables. En efecto, esta situación podría representar el desplazamiento producido por las paredes de los vasos sanguíneos en el sistema circulatorio. A pesar de que pueden producirse desplazamientos en otras direcciones estos son muy pequeños en comparación con los existentes en la dirección normal, por lo que se considera una hipótesis ampliamente aceptada en la literatura (véanse, por ejemplo, [112, 118, 120, 160]). En esta dirección, hemos realizado un análisis asintótico preliminar del Problema 8.3.4 en función del parámetro pequeño  $\varepsilon^F$ , que parece reflejar este comportamiento de los desplazamientos. Este último estudio debe ser analizado en profundidad, por lo que no será incluido en esta memoria.*

Algunos aspectos de este problema deben ser estudiados con mayor detenimiento. En esta memoria, hemos estudiado los modelos del fluido y de la lámina por separado, mediante un análisis asintótico de los mismos. Para poder asegurar que la combinación de las aproximaciones asintóticas es una correcta aproximación del Problema 9.1.1, es necesario un análisis asintótico que tenga como punto de partida el problema tridimensional acoplado. De ese modo, se debe verificar que, efectivamente, el Problema 9.1.1 converge a un modelo acoplado formado por la combinación del modelo del fluido (9.1.5)–(9.1.6) y el modelo dinámico de la lámina viscoelástica del Problema 8.3.4. Este análisis asintótico debe realizarse bajo la dependencia de los dos parámetros adimensionales pequeños que se tienen en el problema, es decir,  $\varepsilon^F$  y  $\varepsilon^S$ .

## 9.2. Modelo acoplado con una ley de pared elástica algebraica

En esta sección consideraremos el problema de un fluido viscoso moviéndose en el interior de una tubería curva con paredes elásticas. En particular, la ley de pared que consideraremos será la ecuación algebraica dada por la expresión (1.4.1). Este modelo se puede deducir a partir de un modelo de cuerdas generalizado (véase [54, 130]), considerando que la respuesta elástica es dominante con respecto a los demás términos de la ecuación. En [54] (véase también [130]) este modelo se utiliza para el caso particular del flujo en un vaso sanguíneo.

En consecuencia, el modelo acoplado será el resultante de combinar la ley de pared (1.4.1) con las ecuaciones en derivadas parciales que verifican los términos identificados de la presión y las expresiones analíticas de la velocidad en el Teorema 1.3.5.

### 9.2.1. Modelo unidimensional

La aproximación de la velocidad y la presión vendrá dada por (véanse (1.3.58)–(1.3.59)):

$$\hat{\mathbf{u}}(\varepsilon^F) := \mathbf{u}^0 + \varepsilon^F \mathbf{u}^1 + (\varepsilon^F)^2 \mathbf{u}^2, \quad (9.2.1)$$

$$\hat{p}(\varepsilon^F) := \frac{1}{(\varepsilon^F)^2} p^0 + \frac{1}{\varepsilon^F} p^1 + p^2, \quad (9.2.2)$$

cuyos términos fueron identificados en el Teorema 1.3.5. Como hemos comentado en la introducción del capítulo, consideraremos la ley de pared algebraica que viene dada por la expresión (1.4.1):

$$p^0 - p_e = \frac{Eh_0}{(1 - \xi^2)R_0^2} (R - R_0), \quad (9.2.3)$$

donde  $p^0$  denota el término principal de la presión (véase (9.2.2)),  $R$  denota el radio de la sección transversal de la tubería en cada punto de su línea media,  $E$  denota el módulo de Young y  $\xi$  el coeficiente de Poisson de la pared,  $h_0$  su espesor,  $R_0$  el radio de la sección transversal en reposo y  $p_e$  la presión externa.

Para deducir el modelo unidimensional del problema acoplado, sustituimos (9.2.3) en la ecuación diferencial que verifica el término  $p^0$  (1.3.26). Tras realizar algunos cálculos obtenemos la siguiente ecuación en derivadas parciales,

$$\frac{Eh_0}{5(1 - \xi^2)R_0^2} \frac{\partial^2}{\partial s_1^2} (R^5) = 8\rho_0\nu \frac{\partial}{\partial t} (R^2),$$

que introduciendo la notación  $\phi(t, s_1) = R^2(t, s_1)$ , nos conduce a

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2}{\partial s_1^2} (\phi^{5/2}), \quad (9.2.4)$$

siendo  $\alpha = \frac{Eh_0}{40(1 - \xi^2)R_0^2\rho_0\nu}$ . Para poder resolver esta ecuación en derivadas parciales debemos considerar condiciones de contorno e iniciales que podemos deducir a partir de (9.2.3). En consecuencia, consideraremos en los extremos de la tubería las condiciones dadas por,

$$\begin{aligned} \phi(t, 0) &= (R_0 + \beta (p^0(t, 0) - p_e))^2, \\ \phi(t, L) &= (R_0 + \beta (p^0(t, L) - p_e))^2, \end{aligned}$$

siendo  $\beta = \frac{(1 - \xi^2)R_0^2}{Eh_0}$ . La condición inicial será  $\phi(0, s_1) = R^2(0, s_1)$ .

**Observación 9.2.1.** *El término  $R(0, s_1)$  indica el radio inicial de la sección transversal de la tubería bajo los efectos de la presión. Por tanto, en general, el valor de esta función escalar será diferente al radio de la sección transversal en reposo  $R_0$ .*

Una vez resuelta la ecuación (9.2.4) podremos resolver las ecuaciones en derivadas parciales correspondientes a los demás términos del desarrollo asintótico de la presión (9.2.2), es decir,  $p^1$  (véase (1.3.30)) y  $p^2$  (véanse (1.3.32)–(1.3.33)). Supondremos que las condiciones de contorno de  $p^0$  coinciden con las de la presión (9.2.2), de modo que las condiciones de contorno de  $p^1$  y  $p^2$  son homogéneas. De esta forma, deducimos que  $p^1 = 0$  (véase (1.3.30)).

### 9.2.2. Resolución numérica

Resolveremos numéricamente el modelo mediante el método de elementos finitos, utilizando para ello el programa de licencia libre FreeFEM (véase [72]). Este *software* puede resolver ecuaciones en derivadas parciales a través de su formulación variacional.

Consideremos un espacio de los elementos finitos  $\mathcal{V}$ . Entonces, multiplicando la ecuación (9.2.4) por una función test  $\varphi \in \mathcal{V}$  y aplicando la fórmula de Green, obtenemos la siguiente formulación variacional:

$$\int_0^L \frac{\partial \phi^{5/2}}{\partial s_1} \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} ds_1 + \frac{1}{\alpha} \int_0^L \frac{\partial \phi}{\partial s_1} \varphi ds_1 = 0. \quad (9.2.5)$$

Junto con la formulación variacional (9.2.5) también implementaremos la formulación variacional correspondiente a la ecuación diferencial (1.3.33) para obtener  $p_0^2$  y, como consecuencia,  $p^2$  a través de (1.3.32). Debido al alto orden de derivadas que obtenemos en (1.3.33), se deben considerar elementos finitos de orden suficiente que puedan captar correctamente los valores de las derivadas parciales de alto orden. En particular, consideraremos que  $\mathcal{V}$  es el espacio de elementos finitos Lagrange  $\mathbb{P}_4$ . Una vez obtenidos los valores de las presiones y al radio a lo largo de la tubería, podremos obtener los valores de las velocidades con (9.2.1) y las correspondientes expresiones analíticas de los términos involucrados (véase el Teorema 1.3.5).

A continuación, mostraremos algunos resultados numéricos obtenidos considerando un ejemplo estacionario en diferentes geometrías. Para resolver el problema evolutivo utilizaremos una estrategia de punto fijo en cada paso de tiempo; sin embargo, los resultados del caso estacionario serán suficientes para ejemplificar el buen funcionamiento del modelo propuesto. Los datos utilizados corresponden a los descritos en la Tabla 9.2.

En los ejemplos que vamos a describir, consideraremos las mismas condiciones de contorno estacionarias para las incógnitas del problema. Para el término principal de la presión asumiremos que,

$$p^0(0) = p_e + 133,2, \quad p^0(L) = p_e.$$

Característica	Valor
Longitud de la tubería	$L = 0,1m$
Espesor de la pared	$h_0 = 1mm$
Modulo de Young	$E = 3 \cdot 10^4 N/m^2$
Coefficiente de Poisson	$\xi = 0,5$
Radio en reposo	$R_0 = 5mm$
Viscosidad dinámica del fluido	$\nu = 0,0035 Pa \cdot s$
Densidad fluido	$\rho^F = 1kg/dm^3$
Presión exterior	$p_e = 101325 Pa$
Tiempo final	$T = 10s$
Fuerzas externas	$b_0^\varepsilon = 0$

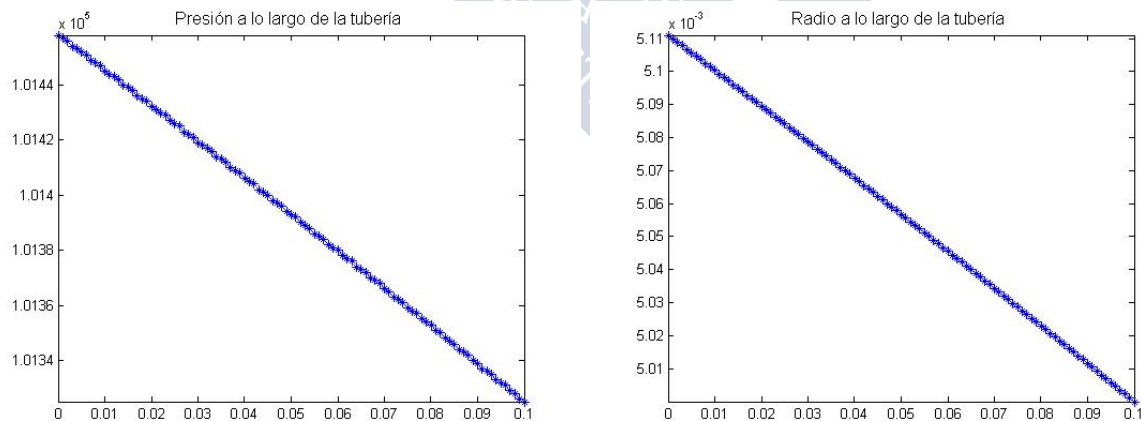
Tabla 9.2: Datos de las simulaciones.

Una vez resuelto el problema para  $p^0$ , obtendremos las condiciones de contorno para la ecuación diferencial de  $p_0^2$  (véase (1.3.33)) a través de la expresión,

$$p_0^2 = \frac{R^2}{4} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} \quad \text{en } s_1 = 0 \quad \text{y} \quad s_1 = L.$$

como consecuencia de (1.3.32) (pues hemos asumido condiciones de contorno homogéneas para  $p^2$ ).

El primer ejemplo que vamos a considerar es un problema estacionario en una tubería recta. Realizando la simulación numérica con FreeFEM [72], obtenemos en la Figura 9.2 la distribución de la presión y el radio a lo largo de la tubería. Dado que los valores obtenidos para  $p^2$  son prácticamente despreciables, la presión viene dada por el término principal del desarrollo asintótico propuesto (véase (9.2.2)).

Figura 9.2: Valores de  $p^0$  y  $R$ , respectivamente, a lo largo de la tubería.

Como podemos observar, dado que en este ejemplo hemos asumido una caída lineal para la presión, el radio tiene también una representación lineal como consecuencia de la relación

que hemos considerado entre ambas (9.2.3). Con respecto a la velocidad, observamos en la Figura 9.3 un perfil de Poiseuille. En efecto, la velocidad (9.2.1) viene determinada por el término principal del desarrollo propuesto (véase (1.3.24)) que, como adelantábamos en la Sección 1.5, describe un flujo de Poiseuille. Por otro lado, en la primera imagen de la Figura

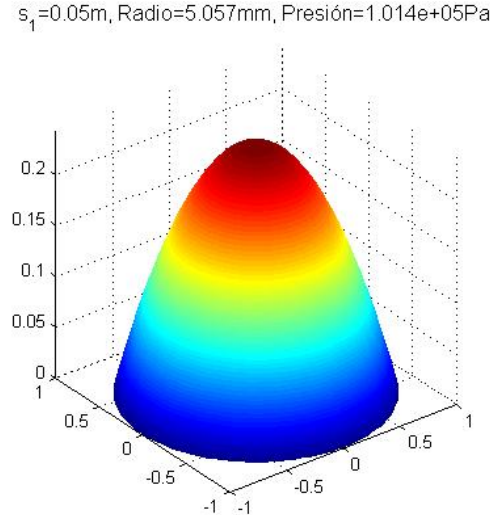


Figura 9.3: Perfil de velocidad en la sección transversal  $s_1 = 0,05m$  de una tubería recta.

9.4 observamos el campo de velocidades (9.2.1) en una sección transversal de la tubería recta. Nótese que debido a la dirección del flujo en la tubería y la distribución del radio en la misma (véase nuevamente la Figura 9.2) la velocidad en la sección transversal apunta hacia el interior de la tubería. Si representamos el campo  $\mathbf{U}^2 = (u_2^2, u_3^2)$  correspondiente al flujo secundario, observamos en la segunda imagen de la Figura 9.4 que, en efecto, es despreciable. En la Figura 9.5 podemos observar también el valor de la magnitud de la aproximación de la velocidad (9.2.1). Los valores son pequeños en comparación con los del perfil de velocidades. Esto es coherente con la aproximación asintótica propuesta, pues las velocidades en la sección transversal son, a lo sumo, de orden  $\mathcal{O}(\varepsilon^F)$ .

Consideremos ahora el caso de una tubería curva circular plana, es decir, los valores de la curvatura y la torsión de la línea media serán  $\kappa = 1$  y  $\tau = 0$ , respectivamente. Debido a las condiciones de contorno y datos considerados, los valores de la presión y radio no varían con respecto a la tubería recta. Por tanto, comentaremos únicamente las aproximaciones obtenidas para la velocidad. En la Figura 9.6 observamos que el perfil de velocidades es similar al obtenido en la tubería recta. Sin embargo, si representamos por separado los términos de orden  $\varepsilon^F$  y  $(\varepsilon^F)^2$  de la aproximación asintótica (9.2.1) (véanse (1.3.27) y (1.3.31), respectivamente) podemos notar en la Figura 9.7 los efectos de la curvatura en este caso. En la primera de las imágenes de la Figura 9.7 observamos el comportamiento que adelantábamos en la Sección 1.5, donde la la fuerza centrífuga del fluido provoca que la velocidad sea mayor en la zona exterior de la tubería (el lado hacia donde la normal está apuntando). El término de orden  $(\varepsilon^F)^2$ , representado en la segunda imagen, hace que



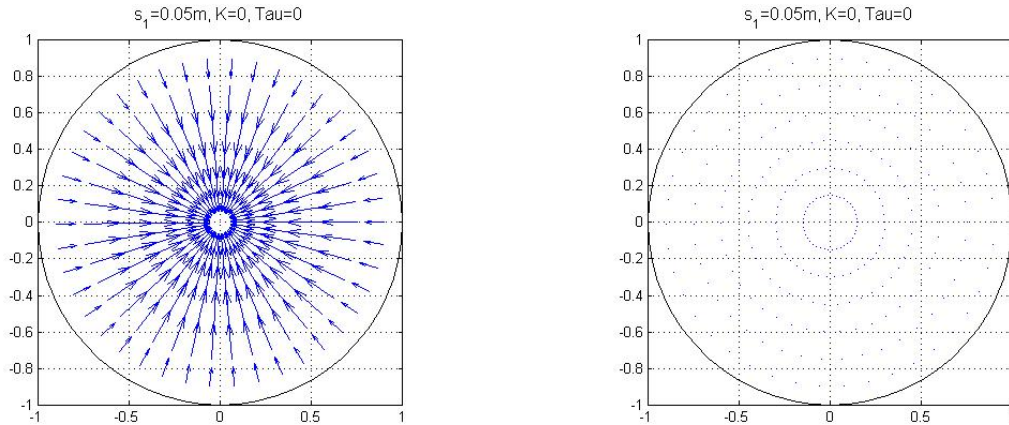


Figura 9.4: Campo de velocidades y flujo secundario ( $\mathbf{U}^2 = (u_2^3, u_3^2)$ ), respectivamente, en la sección transversal  $s_1 = 0,05m$  de una tubería recta.

el perfil del campo de velocidades no sea totalmente parabólico, como ocurre en muchos ejemplos de flujos en tuberías. Con respecto a la velocidad en las secciones transversales de la tubería observamos en la Figura 9.8 el característico flujo secundario que se obtiene en las tuberías curvas, junto con los valores de la magnitud de la velocidad.

A continuación, consideremos un trozo de tubería en forma de hélice, es decir, los valores de la curvatura y torsión serán  $\kappa = \tau = 1$ . Nuevamente obtenemos resultados similares para las presiones y el radio a lo largo de la tubería. Con respecto al perfil de velocidades, basta observar la aproximación asintótica (9.2.1) para notar que la variación de la torsión solo afectará al término de orden dos de la velocidad. Por tanto, el perfil de velocidades es similar al obtenido en la tubería circular plana en la Figura 9.6. Lo mismo ocurre con las velocidades en las secciones transversales, donde obtendremos una representación análoga a la Figura 9.8. Además, si fijamos todos los parámetros de esta tubería y variamos simplemente la torsión, podemos observar en la Figura 9.9 que su efecto en este ejemplo es mínimo, haciéndose ligeramente notorio únicamente para valores de la torsión muy altos.

Por supuesto, existen numerosos ejemplos que pueden ser considerados como, por ejemplo, tuberías con curvatura y/o torsión variable. Sin embargo, para una justificación plena de los resultados presentados en esta sección, el siguiente paso a realizar deberá ser la comparación con datos obtenidos de otros modelos reducidos y con simulaciones de los flujos correspondientes en dominios tridimensionales. Nuestra intención es realizar estas comparaciones en un trabajo futuro.

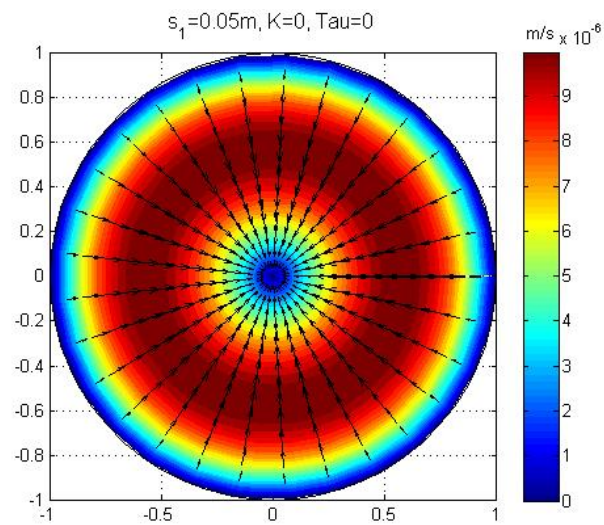


Figura 9.5: Campo y magnitud de la velocidad en la sección transversal  $s_1 = 0,05m$  de una tubería recta.

$s_1=0.05m$ , Radio=5.057mm, Presión=1.014e+05Pa

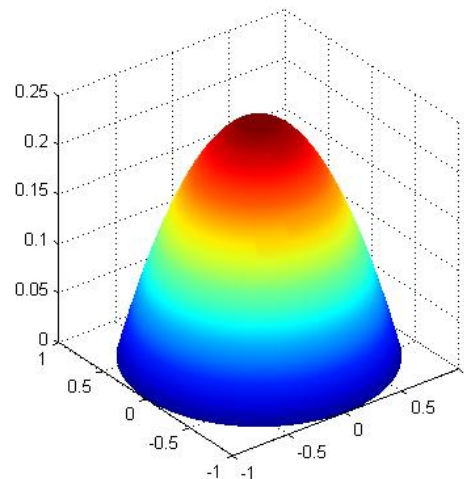


Figura 9.6: Perfil de velocidad en la sección transversal  $s_1 = 0,05m$  de una tubería circular plana.



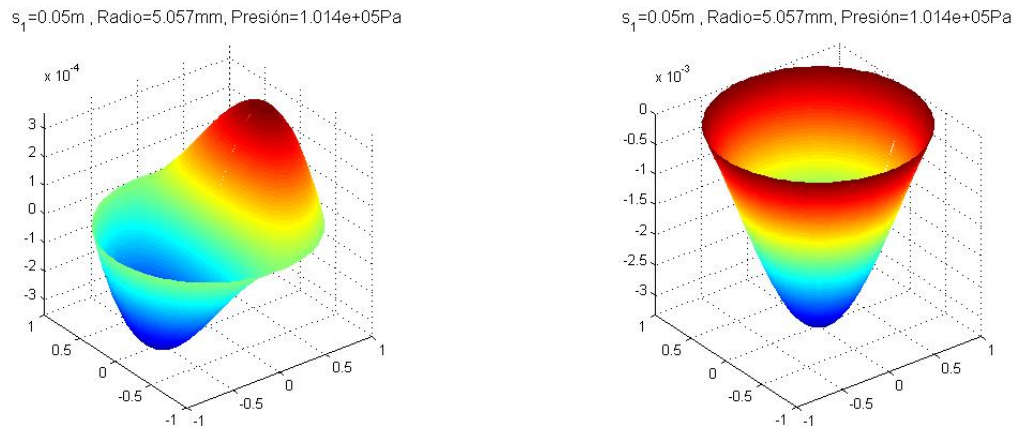


Figura 9.7: Representación de los términos  $u_1^1$  y  $u_1^2$ , respectivamente, en la sección transversal  $s_1 = 0,05m$  de la tubería curva circular plana.

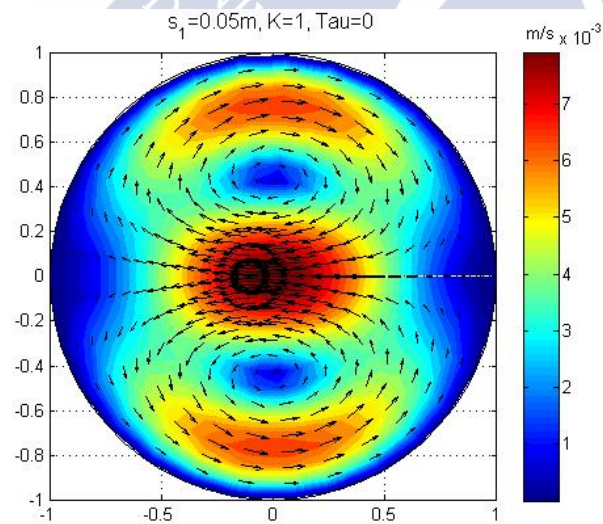


Figura 9.8: Campo y magnitud de la velocidad en una sección transversal  $s_1 = 0,05m$  de una tubería circular plana.

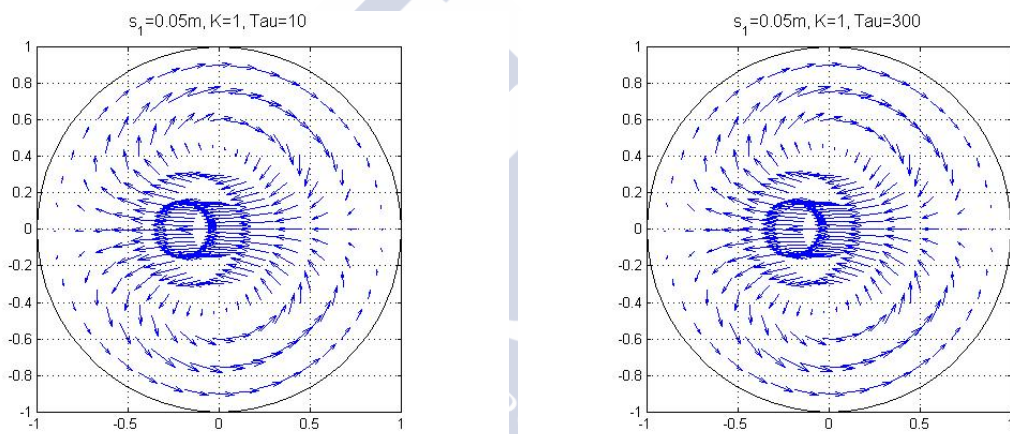


Figura 9.9: Campo de velocidades con valores de torsión diferentes en la sección transversal  $s_1 = 0,05m$ .

# Conclusiones y trabajo futuro

A lo largo de esta memoria, hemos obtenido y justificado varios modelos matemáticos relacionados con el problema del flujo de un fluido viscoso incompresible en el interior de una tubería curva con paredes deformables. A continuación, recordaremos brevemente los resultados que hemos obtenido en cada una de las partes de este trabajo. También propondremos algunas líneas de trabajo futuras que surgen del estudio realizado.

En la Parte I hemos obtenido y justificado un modelo asintótico para el problema de un fluido moviéndose en el interior de una tubería curva cuyo radio, que es conocido, varía a lo largo de su línea media y con el tiempo. En el Capítulo 1, asumiendo un desarrollo en serie de potencias de un parámetro pequeño para las incógnitas del problema, hemos identificado hasta el término de segundo orden de la velocidad y hasta el término de orden cero para la presión. Se puede comprobar que el modelo se reduce al obtenido en [98] si consideramos el caso estacionario y paredes rígidas. Además, los resultados obtenidos coinciden con los disponibles en la literatura, como por ejemplo la obtención del perfil de tipo Poiseuille en el término principal de la velocidad (véanse, por ejemplo, [64, 100, 117]). Al igual que en las referencias [65, 66] (por ejemplo), hemos comprobado que el efecto de la torsión en el flujo del fluido es menor en comparación con los efectos producidos por la curvatura. Otro fenómeno que hemos identificado y que está presente en la literatura es el flujo secundario que aparece como consecuencia de la curvatura de la línea media de la tubería (véanse, por ejemplo, [62, 66, 76, 78, 92, 145, 147, 163, 166]).

El modelo deducido en la Parte I se obtuvo asumiendo que el desplazamiento de la pared, la función radio  $R$ , depende únicamente del tiempo y de la posición en la línea media de la tubería curva. Un posible trabajo futuro en esta dirección podría ser permitir que  $R$  dependiese también de la variable angular en la sección transversal, de modo que se pudiese trabajar con geometrías más complejas. También sería interesante considerar un escalado temporal que permitiese capturar los efectos del problema evolutivo en el término principal del desarrollo asintótico. Este nuevo modelo podría incluir un término de transporte en la ecuación diferencial del término de presión (1.3.26). Esto sería útil para modelar el comportamiento de un flujo pulsátil, donde las ondas viajan a cierta velocidad través de la tubería. Un modelo de esas características podría ser obtenido de forma similar a como hemos deducido el modelo que se presenta en esta memoria en el Capítulo 1, realizando un escalado apropiado en la variable temporal.

El análisis asintótico realizado en el Capítulo 1 debe entenderse como una aproximación en el interior del dominio de la solución exacta del problema original, por lo que al imponer

las condiciones de contorno y las condiciones iniciales puede aparecer una capa límite. Por ese motivo, en el Capítulo 2 hemos calculado unos correctores de capa límite para solventar este fenómeno. Los correctores así calculados son solución de unas ecuaciones que hemos identificado como problemas de Leray modificados. Hemos probado que estos problemas tienen al menos una solución que decae exponencialmente de tal forma que los correctores no afectan a la solución asintótica lejos de los extremos de la tubería. Finalmente, en el Capítulo 3 obtenemos estimaciones del error cometido con respecto al parámetro adimensional pequeño, que justifican matemáticamente el modelo asintótico propuesto. Además, las estimaciones de error obtenidas, coinciden con las del caso estacionario con paredes rígidas que se obtienen en [98], generalizando así sus resultados al caso evolutivo con paredes en movimiento.

En el Capítulo 2 se asumen hipótesis sobre la condición inicial y las condiciones de contorno de forma que no sean necesarios los correctores de capa límite temporales. Un posible trabajo futuro sería eliminar estas hipótesis, de modo que tendríamos que calcular los correctores temporales, que se obtendrían de forma similar a los expuestos en este capítulo. El estudio de este caso general sería posible siguiendo los resultados disponibles en [114, 115] y las referencias incluidas allí, combinándolos con teoremas de existencia, regularidad y decaimiento exponencial de la solución de problemas de la ecuación de calor y sistemas de Stokes evolutivos.

En la Parte II, con el objetivo de deducir una ley de pared para la tubería, hemos realizado un análisis asintótico de láminas viscoelásticas. En el Capítulo 4, desarrollamos un análisis asintótico formal del problema de una lámina viscoelástica siguiendo los pasos de [30] para el caso elástico. De esta forma, se identifican dos conjuntos de ecuaciones bidimensionales de láminas viscoelásticas: láminas de tipo membrana y láminas flexurales. La característica más interesante que hemos identificado es que, tras aplicar el método asintótico al modelo tridimensional de una lámina viscoelástica de tipo Kelvin-Voigt, que presenta un término de memoria corta por medio de una derivada temporal, aparece de forma natural en los modelos bidimensionales un término de memoria larga por medio de una integral con respecto al tiempo, que tiene en cuenta todas las deformaciones previas. Este tipo de comportamiento, concuerda con estudios similares para vigas estudiados en [139, 140], por ejemplo. También en este capítulo, hemos asegurado la existencia y unicidad de solución del problema tridimensional y de los problemas bidimensionales.

Los modelos deducidos pueden emplearse una gran variedad de problemas en la ingeniería o biomedicina. Una característica común de otros muchos problemas similares es el carácter no lineal de los mismos. Por tanto, una posible línea de investigación futura a realizar sería utilizar el método de los desarrollos asintóticos para un problema de una lámina viscoelástica no lineal, siguiendo las ideas desarrolladas en la Parte II de esta memoria combinadas con las del caso elástico no lineal en [30] o el caso viscoelástico con memoria larga en [59] y las referencias allí citadas. Otro campo de gran interés es el estudio de problemas de láminas viscoelásticas sin borde, donde se necesitará recurrir a resultados de geometría diferencial en variedades de Riemann, como ocurre en el caso elástico estudiado en [146].

En los Capítulos 5 y 6 se ha visto que, para asegurar que existe una única solución

del problema de la membrana viscoelástica, necesitamos completar el espacio de soluciones admisibles. Así, el grupo de las membranas se divide en dos grupos: membranas elípticas y membranas generalizadas viscoelásticas. Con esta división, en el Capítulo 5 abordamos el caso que se denomina como membrana elíptica viscoelástica, donde hemos asegurado la existencia y unicidad de solución utilizando una desigualdad de tipo Korn para superficies elípticas. Además, hemos justificado matemáticamente el modelo bidimensional propuesto mediante resultados de convergencia en espacios de Bochner-Sobolev. Por su parte, en el Capítulo 6 trabajamos el problema que denominamos como membrana generalizada viscoelástica. En este caso, como sucede en el caso elástico (véase el Capítulo 5 en [30]), hemos introducido los espacios compleción y advertido la necesidad de definir las fuerzas admisibles. De esta forma, se justifica también con resultados de convergencia fuerte el modelo bidimensional obtenido.

En el Capítulo 7 hemos probado la existencia y unicidad de solución de las ecuaciones para una lámina flexural viscoelástica utilizando una desigualdad de tipo Korn y demostramos la convergencia de la solución del problema tridimensional a un límite cuyo promedio es la solución del problema bidimensional correspondiente. En los Capítulos 5 y 7 hemos obtenido que los límites del campo de desplazamientos,  $\mathbf{u}$ , son independientes de la variable transversal. Sin embargo, en el caso de la lámina membrana generalizada viscoelástica del Capítulo 6 se obtiene una condición más débil, en concreto, la derivada parcial con respecto a la variable transversal de la solución escalada converge fuertemente a cero. Este comportamiento también se observa con láminas elásticas como las estudiadas en [30]. Por otro lado, debemos destacar que a partir de un punto de los argumentos que hemos utilizado para deducir y justificar nuestros modelos de láminas viscoelásticas en los Capítulos 4–7 (en particular, después de las Observaciones 4.4.2, 5.3.5, 6.3.2, 6.3.3 y 7.2.4), no es posible una generalización del análisis realizado para las láminas elásticas en [30]. Por tanto, los modelos elásticos y viscoelásticos deben ser estudiados independientemente para concluir los resultados correspondientes.

Una posible continuación del trabajo realizado en los Capítulos 5, 6 y 7 sería la obtención de estimaciones del error entre la solución exacta del problema tridimensional y la correspondiente del problema bidimensional aproximado. Este estudio podría seguir las ideas presentadas en [94] sobre el análisis del error cometido en aproximaciones asintóticas de problemas elásticos. También, a partir de los modelos obtenidos en esta parte de la memoria, podríamos deducir las ecuaciones de Koiter de una lámina viscoelástica, combinando las ecuaciones bidimensionales obtenidas en la Parte II, de forma similar a como se realiza en el caso elástico en [30]. Estas ecuaciones también deben ser justificadas, tal y como se hace en [30, 35, 58, 87]. Creemos que este tipo de resultados se podrían deducir utilizando técnicas desarrolladas en este trabajo, en particular, las utilizadas en la demostración de la convergencia del problema de la lámina flexural viscoelástica en el Capítulo 7. Los modelos de Koiter, además de que evitan la necesidad de conocer la geometría de la superficie media de la lámina o el conjunto donde se considera la condición de contorno, solventan algunos problemas que se obtienen con los modelos de membrana y flexural por separado (véase, por ejemplo, el Capítulo 7 en [30] para más detalles).

En el Capítulo 8 hemos estudiado el problema dinámico de una lámina viscoelásti-



ca. Siguiendo los pasos del problema cuasiestático hemos deducido las ecuaciones para el problema dinámico de la membrana viscoelástica. También hemos probado existencia y unicidad de solución para el problema tridimensional y presentamos los correspondientes resultados para los grupos de membranas elípticas y generalizadas. Nuevamente, señalamos la presencia del término de memoria larga que tiene en cuenta las deformaciones previas producidas en la lámina.

Como ya indicábamos en el desarrollo del capítulo, debemos completar el análisis formal identificando las ecuaciones del problema dinámico de la lámina flexural viscoelástica, al igual que en el caso cuasiestático. Además, siguiendo técnicas utilizadas en los Capítulos 5, 6 y 7 para concluir los resultados de convergencia allí demostrados, podríamos estudiar los resultados análogos para los problemas dinámicos viscoelásticos. También proponemos como trabajo futuro la obtención de las ecuaciones de Koiter del caso dinámico, como se ha hecho para el caso elástico en [87], por ejemplo.

En la Parte III, hemos propuesto modelos acoplados de interacción fluido-estructura a partir de los desarrollos obtenidos en las dos primeras partes de esta memoria. Así, empezamos el Capítulo 9 presentando el modelo formal acoplado para el problema del flujo de un fluido viscoso incompresible en una tubería curva cuyas paredes son viscoelásticas, combinando el modelo del fluido deducido en la Parte I y el modelo dinámico para la lámina obtenido en la Parte II. Hemos identificado como se realiza el acoplamiento entre los modelos correspondientes y hemos señalado la necesidad del análisis formal asintótico que tenga de punto de partida el problema tridimensional acoplado para verificar que, efectivamente, el modelo límite coincide con el resultado de acoplar los modelos reducidos estudiados en esta memoria. Después, hemos considerado el mismo problema del fluido en el interior de la tubería curva, pero en este caso con paredes elásticas, suponiendo que la ley de pared obedece una expresión algebraica. Así, hemos resuelto numéricamente el modelo y mostramos algunos ejemplos que concuerdan con los resultados obtenidos en trabajos previos disponibles en la literatura (véanse, por ejemplo, [62, 64, 66, 76, 78, 145, 166]). Sería interesante comparar los resultados obtenidos mediante nuestro modelo con los correspondientes a otros modelos reducidos y con simulaciones de un modelo tridimensional, razón por la cual esta podría ser otra posible línea de investigación futura a explorar.

Resumiendo, en esta memoria hemos deducido y justificado (utilizando técnicas de análisis asintótico) nuevos modelos relacionados con el problema de un fluido viscoso en movimiento en el interior de una tubería curva con paredes viscoelásticas. Además del interés puramente matemático de los resultados obtenidos en la memoria, estos proporcionan bases matemáticamente sólidas para la obtención de modelos aplicables a varios problemas en los campos de la ingeniería y la biomedicina, en particular el del flujo sanguíneo en el sistema circulatorio, tal y como se menciona en la introducción de esta memoria. La obtención de modelos reducidos para la interacción de fluidos y estructuras justificados de forma matemáticamente rigurosa es de gran utilidad, ya que permiten simular problemas complejos con un coste computacional mucho menor y, por tanto, en un tiempo más reducido. Este hecho facilita la aplicación de dichos modelos a problemas biológicos, donde el tiempo suele ser un factor decisivo y crucial.

# Conclusions and future work

Along this memory we have obtained and justified several mathematical models related with the viscous incompressible fluid flow problem inside a curved pipe with deformable walls. In what follows, we shall briefly sum up the results obtained in each part of this work. Also, we will propose some lines of future research that show up as a consequence of the study performed.

In Part I we have obtained and justified an asymptotic model for the problem of a fluid moving inside a curved pipe whose radius, which is known, depends on the point of the middle line of the pipe and on time. In Chapter 1, assuming an asymptotic expansion of the unknown in terms of the small parameter, we identified the terms up to order two for the velocity and to order zero for the pressure. It can be proved that the model reduces to the one obtained in [98] if we consider the stationary case and rigid walls. Moreover, the obtained results are in good agreement with those available in the literature, as for example the obtention of the Poiseuille's type profile on the leading term of the velocity (see, for example, [64, 100, 117]). As in the references [65, 66] (for example) we have verified that the effect of the torsion on the fluid flow is less noticeable than the effects of the curvature. Another phenomena that we have identified is the secondary flow that appears as a consequence of the curvature of the middle line of the pipe (see, for example, [62, 66, 76, 78, 92, 145, 147, 163, 166]).

The model deduced in Part I was obtained by assuming that the displacement of the wall, the radius function  $R$ , depends only on time and on the position at the middle line of the curved pipe. In this direction, a possible future work could be that the function  $R$  depends also on the angular variable in the transversal section in a way that it could be possible to consider more complex geometries. Also, it would be interesting to consider a time scaling in order to capture the effects of the evolutionary problem in the leading term of the asymptotic approach. This new model could include a transport term in the pressure's differential equation (1.3.26). This fact would be useful for modelling a pulsatile flow, where the waves travel with certain velocity through the pipes. A model with these characteristics could be obtained by following similar arguments as the ones presented in this work in Chapter 1 by performing an adequate scaling of the time variable.

The asymptotic analysis performed in Chapter 1 must be understood as an approximation in the interior part of the domain of the exact solution of the original problem, so that when we impose boundary and initial conditions a boundary layer phenomenon might appear. For that reason, in Chapter 2, we have computed boundary layer correctors



to solve this phenomenon. These correctors are solution of some equations that we have defined as modified Leray's problem. We have proved that these problems have at least one solution that exponentially decays in such a way that they do not modify the asymptotic approximation far from the ends of the pipe. In Chapter 3 we have obtained error estimates with respect to the small parameter that mathematically justify the asymptotic model proposed. Furthermore, the error estimates obtained coincide with the ones derived for the stationary case with rigid wall in [98], thus here, we generalize their results for the evolutionary case with moving walls.

In Chapter 2 we have assumed hypotheses on the initial and the boundary condition so that the boundary layer correctors in time were not needed. A possible next step would be neglecting these hypotheses and calculate the boundary layer correctors in time, which could be obtained following arguments similar to those presented in this chapter. The study of this general case could be possible following the results available in [114, 115] and the references therein, combining them with results of existence, regularity and exponential decay of solution of the heat equation and evolutionary Stokes systems.

In Part II, in order to derive a law for the pipe's wall, we have performed an asymptotic analysis of viscoelastic shells. In Chapter 4, we developed a formal asymptotic analysis of the viscoelastic shell problem following the steps of the elastic case in [30]. In this way, two sets of equations were identified: membrane and flexural shells. The most interesting characteristic found in this study was that, by performing the asymptotic method in a three-dimensional model of a viscoelastic shell of Kelvin Voigt's type that presents a short term memory through a time derivative, a long term memory appears naturally in the two-dimensional models by means of an integral with respect to the time derivative, which takes into account all the previous deformations. This kind of behaviour agrees with similar studies in the theory of beams in [139, 140], for example. Also in this chapter, we have ensured the existence and uniqueness of solution of the three-dimensional and two-dimensional problems presented.

The derived models can be useful in a large variety of problems in fields such as engineering and biomedicine. A common characteristic of many other problems is its nonlinear behaviour. Therefore, a future line of research could be to perform an asymptotic analysis of nonlinear viscoelastic shell problems, following the ideas developed in Part II of this work and combining them with results from the nonlinear elastic case in [30] or the viscoelastic one with long term memory in [59] and the references therein. Another field of interest is the study of viscoelastic shells without boundary, where it would be necessary to resort to differential geometry results in Riemann manifolds, as it happens in the elastic case studied in [146].

In Chapters 5 and 6 we have found that in order to ensure the existence of a unique solution we need to complete the space of admissible unknowns. Thus, the membrane's group is divided in two groups: elliptic and generalized membranes. In Chapter 5, we have studied the viscoelastic elliptic membrane problem, where we have ensured the existence and uniqueness of solution using a Korn's type inequality for elliptic surfaces. Moreover, we have mathematically justified the two-dimensional model with convergence results in Bochner-Sobolev spaces. In Chapter 6 we have worked with the viscoelastic generalized

membrane problem. In this case, as it happens in the elastic case (see Chapter 5 in [30]), we have introduced completion spaces and noticed the need of defining which are the admissible forces. In this way, we also justify with convergence results the two-dimensional model derived.

In Chapter 7 we have ensured the existence and uniqueness of solution of the viscoelastic flexural shell equations using a Korn's type inequality and we have proved the convergence of the solution of the three-dimensional problem to a limit whose average is the solution of the two-dimensional corresponding one. In Chapters 5 and 7 we have deduced that the limits of the displacements field,  $\mathbf{u}$ , are independent of the transversal variable. However, in the case of the viscoelastic generalized membrane shell in Chapter 6, we have found a weaker result, specifically, that the partial derivative with respect to the transversal variable of the scaled solution converges strongly to zero. This behaviour was also found in the elastic case studied in [30]. Also, we must remark that from one step of the arguments employed to derive and justify our models in Chapters 4–7 (specifically, after the Remarks 4.4.2, 5.3.5, 6.3.2, 6.3.3 and 7.2.4), it is not possible to generalize the elastic case studied in [30]. Therefore, the elastic and viscoelastic case must be treated separately in order to achieve reasonable conclusions.

A possible next step concerning Chapters 5, 6 and 7 could be the obtention of error estimates between the solution of the three-dimensional problems and the corresponding one of the two-dimensional approach. This study could be performed following the ideas presented in [94] where error estimates are derived for the elastic problem. Also, from the models obtained in this part, we could derive the Koiter's equations of a viscoelastic shell, by combining the two-dimensional equations found in Part II, in a similar way as in the elastic case in [30]. These equations must be also justified, as we can see in [30, 35, 58, 87], for example. We believe that it could be possible to derive this kind of results by using ideas developed in this work, specifically, in the proof of the convergence result of the problem of the viscoelastic flexural shell in Chapter 7. The Koiter's models not only avoid the need to know the nature of the middle surface of the shell or the set where the boundary condition of place is considered, but also they solve some problems that the membrane and flexural models have (see, for example, Chapter 7 in [30] for more details).

In Chapter 8 we have studied the dynamic problem of a viscoelastic shell. Following the steps of the quasi-static case we have deduced the equations of the viscoelastic membrane. Also, we have proved the existence and uniqueness of solution for the three-dimensional problem and we have presented the corresponding ones for the groups of elliptic and generalized membranes. Again, we highlight the presence of a long term memory that takes into account the previous deformations produced in the shell.

As we commented in the chapter, we must complete the formal asymptotic study by identifying the equations of the dynamic problem of the viscoelastic flexural shell, as we did in the quasi-static case. Furthermore, following the arguments used in Chapters 5, 6 and 7 to derive convergence results, we could study the analogous theorems for the viscoelastic dynamic problems. As future work, we also propose the obtention of the corresponding Koiter's equations for the dynamic case, as it was made for the elastic case in [87], for example.

In Part III, we have proposed models for the fluid-structure interaction problem by means of the findings obtained in the first two parts of this work. Thus, in Chapter 9 we have presented a formal coupled model for the viscous incompressible fluid flow problem inside a curved pipe with viscoelastic walls, combining the fluid model deduced in Part I and the dynamic model for the shell found in Part II. We have identified how the coupling is performed between the corresponding models and we have remarked the need of an asymptotic study that takes as a starting point the three-dimensional coupled problem, in order to verify that, indeed, the limit model corresponds to the combination of the reduced models studied in this work. Then, we have considered the same problem of the fluid moving inside the curved pipe, but with elastic walls, whose constitutive law is an algebraic expression. Thus, we have solved numerically the model and we have shown some examples that have good agreement with those available in the literature (see, for example, [62, 64, 66, 76, 78, 145, 166]). It would be interesting to compare the results obtained with our model with other reduced models and with simulations of a three-dimensional model, so that it could be another possible line of future research.

To sum up, in this memory we have deduced and justified (using asymptotic analysis methods) new models related with the viscous incompressible fluid flow problem inside a curved pipe with viscoelastic walls. Besides the purely mathematical interest of the results developed in this work, these provide solid mathematical bases for the obtention of applicable models in many problems of the fields of engineering and biomedicine, more specifically, for the blood flow in the circulatory system. The obtention of justified reduced models for fluid-structure interaction problems in a rigorous mathematical way is of great importance, since they allow to simulate complex problems with less computational cost and, hence, in a shorter time. This fact makes easier the application of such kind of models in biological problems, where the time is usually a decisive and crucial factor.

# Apéndice A

## Cálculo detallado de algunos términos identificados en el Teorema 1.3.5

En este apéndice indicaremos cómo se han calculado las expresiones de los términos  $\mathbf{U}^1$ ,  $\mathbf{U}^2$  y  $p^2$  introducidos en el Teorema 1.3.5.

### A.1. Cálculo de $\mathbf{U}^1$ y $p^2$

Consideremos  $(\mathbf{U}^1, p^2)$ , la solución del problema (1.3.46),

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{z}} \mathbf{U}^1 = \frac{R}{\nu \rho_0} \nabla_{\mathbf{z}} p^2 & \text{en } \omega, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{z}} \mathbf{U}^1 = \frac{R}{4\rho_0\nu} \left( \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) - (z_2^2 + z_3^2) R^2 \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} \right) =: g^1 & \text{en } \omega, \\ \mathbf{U}^1 = \frac{\partial R}{\partial t} (\cos s_2, \sin s_2) =: \boldsymbol{\varphi}^1 & \text{en } \partial\omega, \end{cases}$$

que fue introducido en la demostración del Teorema 1.3.5, y que tiene solución única (en el caso de  $p^2$ , salvo una función de  $t$  y  $s_1$ ). Para obtener la expresión de  $\mathbf{U}^1$  y  $p^2$ , vamos a considerar problemas auxiliares más fáciles de resolver. En primer lugar, consideremos el problema

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{z}} \varphi = g^1 & \text{en } \omega, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = \boldsymbol{\varphi}^1 \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial R}{\partial t} & \text{en } \partial\omega, \end{cases} \quad (\text{A.1.1})$$

el cual tiene solución única (salvo una función arbitraria de  $t$  y  $s_1$ ), ya que se verifica la condición de compatibilidad (1.3.47). Ahora bien, utilizando el cambio de variable (1.3.23), podemos escribir el problema como sigue,

$$\begin{cases} \frac{1}{s_3^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_2^2} + \frac{1}{s_3} \frac{\partial \varphi}{\partial s_3} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_3^2} = \frac{R}{4\rho_0\nu} \left( \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) - s_3^2 R^2 \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} \right) & \text{en } \omega, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial s_3} = \frac{\partial R}{\partial t} & \text{en } \partial\omega. \end{cases} \quad (\text{A.1.2})$$

## 296A. Cálculo detallado de algunos términos identificados en el Teorema 1.3.5

Si suponemos que la solución es de la forma:

$$\varphi = a(t, s_1)s_3^4 + b(t, s_1)s_3^2 + c(t, s_1),$$

podemos identificar las funciones  $a$  y  $b$  substituyendo esta expresión en (A.1.2). Teniendo en cuenta (1.3.26) para comprobar que la condición de contorno se verifica, se tiene que

$$\varphi(t, s_1, s_2, s_3) = \frac{s_3^2 R}{16\rho_0\nu} \left( \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) - \frac{s_3^2 R^2}{4} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} \right) + c(t, s_1), \quad (\text{A.1.3})$$

es solución de (A.1.2). Utilizando de nuevo el cambio de variable (1.3.23), obtenemos que

$$\varphi(t, s_1, z_2, z_3) = \frac{(z_2^2 + z_3^2)R}{16\rho_0\nu} \left( \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) - (z_2^2 + z_3^2) \frac{R^2}{4} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} \right) + c(t, s_1). \quad (\text{A.1.4})$$

Definamos ahora  $\mathbf{V} = \mathbf{U}^1 - \nabla_{\mathbf{z}}\varphi$  y  $\boldsymbol{\chi} = (-\sin s_2, \cos s_2)$  el vector tangente unitario a lo largo de  $\partial\omega$ . Entonces, de (1.3.46) y (A.1.1), obtenemos que  $(\mathbf{V}, p^2)$  verifica el problema:

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{z}}\mathbf{V} = \frac{R}{\nu\rho_0}\nabla_{\mathbf{z}}p^2 - \Delta_{\mathbf{z}}(\nabla_{\mathbf{z}}\varphi) & \text{en } \omega, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{z}}\mathbf{V} = 0 & \text{en } \omega, \\ \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{U}^1 \cdot \mathbf{n} - \nabla_{\mathbf{z}}\varphi \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{en } \partial\omega, \\ \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\chi} = \mathbf{U}^1 \cdot \boldsymbol{\chi} - \nabla_{\mathbf{z}}\varphi \cdot \boldsymbol{\chi} = -\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\chi}} & \text{en } \partial\omega. \end{cases} \quad (\text{A.1.5})$$

Como en  $\partial\omega$  tenemos que  $\mathbf{U}^1 \cdot \boldsymbol{\chi} = 0$ ,  $\nabla_{\mathbf{z}}\varphi \cdot \boldsymbol{\chi} = \frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\chi}} = \frac{\partial\varphi}{\partial s_2} = 0$ , y  $\varphi$  verifica en  $\omega$  que

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{z}}\varphi &= \frac{2R}{16\rho_0\nu} \left( \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) - (z_2^2 + z_3^2) \frac{R^2}{2} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} \right) (z_2, z_3), \\ \Delta_{\mathbf{z}}(\nabla_{\mathbf{z}}\varphi) &= -\frac{R^3}{2\rho_0\nu} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} (z_2, z_3), \end{aligned}$$

obtenemos que  $(\mathbf{V}, p^2)$  verifica el problema

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{z}}\mathbf{V} = \frac{R}{\nu\rho_0}\nabla_{\mathbf{z}}p^2 + \frac{R^3}{2\rho_0\nu} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} (z_2, z_3) & \text{en } \omega, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{z}}\mathbf{V} = 0 & \text{en } \omega, \\ \mathbf{V} = \mathbf{0} & \text{en } \partial\omega. \end{cases} \quad (\text{A.1.6})$$

Entonces, por el Teorema 1.3.4, el problema (A.1.6) tiene solución única (salvo una función de  $t$  y  $s_1$ , en el caso de  $p^2$ ), cuya expresión es:

$$\mathbf{V} = \mathbf{0},$$

$$p^2 = -\frac{R^2}{4} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} (z_2^2 + z_3^2) + p_0^2(t, s_1), \quad (\text{A.1.7})$$

donde  $p_0^2(t, s_1) = c(t, s_1)$  es una función regular (caracterizada en el Teorema 1.3.5 mediante (1.3.51)). Finalmente, como  $\mathbf{U}^1 = \mathbf{V} + \nabla_{\mathbf{z}}\varphi$ , concluimos que

$$\mathbf{U}^1 = \frac{R}{16\rho_0\nu} \left( 2 \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) - (z_2^2 + z_3^2) R^2 \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} \right) (z_2, z_3).$$

## A.2. Cálculo de $\mathbf{U}^2$ y $p^3$

Consideremos  $(\mathbf{U}^2, p^3)$ , solución del problema

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{z}} \mathbf{U}^2 = \frac{R}{\rho_0\nu} \nabla_{\mathbf{z}} p^3 + \mathbf{F} & \text{en } \omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{U}^2 = g & \text{en } \omega, \\ \mathbf{U}^2 = \mathbf{0} & \text{en } \partial\omega, \end{cases} \quad (\text{A.2.1})$$

donde  $\mathbf{F}$  y  $g$  son dados, respectivamente por las expresiones (1.3.36) y (1.3.54).

Para calcular  $(\mathbf{U}^2, p^3)$ , consideraremos una descomposición en problemas más sencillos (de la misma forma que lo realizado para calcular  $(\mathbf{U}^1, p^2)$  en el Apéndice A.1). En primer lugar, consideremos el problema,

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{z}} \varphi = g & \text{en } \omega, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{en } \partial\omega, \end{cases} \quad (\text{A.2.2})$$

el cual tiene solución única, ya que se verifica la condición de compatibilidad (1.3.57). Simplificando de (1.3.54), tenemos que:

$$\begin{aligned} g = & \left( -\frac{\kappa R^4}{2\rho_0\nu} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} - \frac{3\kappa' R^4}{16\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) s_3^3 \cos s_2 - \frac{3\kappa\tau R^4}{16\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} s_3^3 \sin s_2 \\ & + \left( \frac{9\kappa R^3}{8\rho_0\nu} \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} + \frac{9\kappa R^4}{16\rho_0\nu} \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} + \frac{3\kappa' R^4}{16\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) s_3 \cos s_2 \\ & + \frac{3\kappa\tau R^4}{16\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} s_3 \sin s_2 - \frac{R^3}{4\rho_0\nu} \frac{\partial^2 p^1}{\partial s_1^2} s_3^2 + \frac{R}{4\rho_0\nu} \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^1}{\partial s_1} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.2.3})$$

que, utilizando el cambio de variable (1.3.23), puede ser escrito como en (1.3.35). De (A.2.2), y teniendo en cuenta de nuevo (1.3.23), tenemos que  $\varphi$  es solución del problema,

$$\begin{cases} \frac{1}{s_3^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_2^2} + \frac{1}{s_3} \frac{\partial \varphi}{\partial s_3} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_3^2} = g & \text{en } \omega, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial s_3} = 0 & \text{en } \partial\omega. \end{cases} \quad (\text{A.2.4})$$



## 298A. Cálculo detallado de algunos términos identificados en el Teorema 1.3.5

Si suponemos que la solución es de la forma

$$\begin{aligned} \varphi = & a(t, s_1) s_3^5 \cos s_2 + b(t, s_1) s_3^5 \sin s_2 + c(t, s_1) s_3^3 \cos s_2 + d(t, s_1) s_3^3 \sin s_2 \\ & + e(t, s_1) s_3 \cos s_2 + f(t, s_1) s_3 \sin s_2 + j(t, s_1) s_3^4 + h(t, s_1) s_3^2 + i(t, s_1), \end{aligned} \quad (\text{A.2.5})$$

donde  $a, b, c, d, e, f, g, h, i$  son funciones regulares desconocidas, y substituyendo en (A.2.4), se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi(t, s_1, s_2, s_3) = & \left( -\frac{R^4}{384\rho_0\nu} \left( 8\kappa \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} + 3\kappa' \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) \cos s_2 - \frac{\kappa\tau R^4}{128\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \sin s_2 \right) s_3^5 \\ & - \frac{R^3}{64\rho_0\nu} \frac{\partial^2 p^1}{\partial s_1^2} s_3^4 + \left( \frac{3R^3}{128\rho_0\nu} \left( 6\kappa \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} + 3\kappa R \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} + \kappa' R \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) \cos s_2 \right. \\ & \left. + \frac{3\kappa\tau R^4}{128\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \sin s_2 \right) s_3^3 + \frac{R}{16\rho_0\nu} \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^1}{\partial s_1} \right) s_3^2 \\ & + \left( \left( \frac{5R^4}{384\rho_0\nu} \left( 8\kappa \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} + 3\kappa' \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) - \frac{9R^3}{128\rho_0\nu} \left( 6\kappa \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} + \kappa' R \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + 3\kappa R \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} \right) \right) \cos s_2 - \frac{4\kappa\tau R^4}{128\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \sin s_2 \right) s_3 + i(t, s_1), \end{aligned} \quad (\text{A.2.6})$$

donde hemos utilizado la ecuación (1.3.30) para garantizar que se verifica la condición de contorno en (A.2.4). Volviendo a las coordenadas cartesianas locales, podemos escribir (A.2.6) como:

$$\begin{aligned} \varphi(t, s_1, z_2, z_3) = & \left( -\frac{R^4}{384\rho_0\nu} \left( 8\kappa \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} + 3\kappa' \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) z_2 - \frac{\kappa\tau R^4}{128\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} z_3 \right. \\ & \left. - \frac{R^3}{64\rho_0\nu} \frac{\partial^2 p^1}{\partial s_1^2} \right) (z_2^2 + z_3^2)^2 + \left( \frac{3R^3}{128\rho_0\nu} \left( 6\kappa \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} + 3\kappa R \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} + \kappa' R \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) z_2 \right. \\ & \left. + \frac{3\kappa\tau R^4}{128\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} z_3 + \frac{R}{16\rho_0\nu} \frac{\partial}{\partial s_1} \left( R^2 \frac{\partial p^1}{\partial s_1} \right) \right) (z_2^2 + z_3^2) \\ & + \left( \frac{5R^4}{384\rho_0\nu} \left( 8\kappa \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} + 3\kappa' \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) - \frac{9R^3}{128\rho_0\nu} \left( 6\kappa \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} + \kappa' R \frac{\partial p^0}{\partial s_1} + 3\kappa R \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} \right) \right) z_2 \\ & - \frac{4\kappa\tau R^4}{128\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} z_3 + i(t, s_1). \end{aligned} \quad (\text{A.2.7})$$

Ahora, consideremos  $\mathbf{V} = \mathbf{U}^2 - \nabla_{\mathbf{z}}\varphi$  y  $\boldsymbol{\chi} = (-\sin s_2, \cos s_2)$  el vector unitario tangente a lo largo de  $\partial\omega$ . Entonces, de (A.2.1) y (A.2.2), obtenemos que  $(\mathbf{V}, p^3)$  verifica el siguiente problema,

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{z}} \mathbf{V} = \frac{R}{\rho_0\nu} \nabla_{\mathbf{z}} p^3 + \mathbf{F} - \Delta_{\mathbf{z}}(\nabla_{\mathbf{z}}\varphi) & \text{en } \omega, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{z}} \mathbf{V} = 0 & \text{en } \omega, \\ \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{U}^2 \cdot \mathbf{n} - \nabla_{\mathbf{z}}\varphi \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{en } \partial\omega, \\ \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\chi} = \mathbf{U}^2 \cdot \boldsymbol{\chi} - \nabla_{\mathbf{z}}\varphi \cdot \boldsymbol{\chi} = -\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\chi}} & \text{en } \partial\omega. \end{cases} \quad (\text{A.2.8})$$



Consideremos ahora una función arbitraria  $\psi$  y sea  $\mathbf{W} = \mathbf{V} - \left( \frac{\partial \psi}{\partial z_3}, -\frac{\partial \psi}{\partial z_2} \right)$ . Entonces  $\mathbf{W}$  es solución del problema:

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{z}} \mathbf{W} = \frac{R}{\rho_0 \nu} \nabla_{\mathbf{z}} p^3 + \mathbf{F} - \Delta_{\mathbf{z}}(\nabla_{\mathbf{z}} \varphi) - \Delta_{\mathbf{z}} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z_3}, -\frac{\partial \psi}{\partial z_2} \right) & \text{en } \omega, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{z}} \mathbf{W} = 0 & \text{en } \omega, \\ \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} = - \left( \frac{\partial \psi}{\partial z_3}, -\frac{\partial \psi}{\partial z_2} \right) \cdot \mathbf{n} = -\nabla_{\mathbf{z}} \psi \cdot \boldsymbol{\chi} = -\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\chi}} & \text{en } \partial \omega, \\ \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\chi} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\chi}} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial z_3}, -\frac{\partial \psi}{\partial z_2} \right) \cdot \boldsymbol{\chi} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\chi}} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} & \text{en } \partial \omega. \end{cases} \quad (\text{A.2.9})$$

Si somos capaces de encontrar una función  $\psi$  tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\chi}} = 0 \quad \text{en } \partial \omega, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\chi}} \quad \text{en } \partial \omega, \quad (\text{A.2.10})$$

entonces el problema (A.2.9) será equivalente a

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{z}} \mathbf{W} = \frac{R}{\rho_0 \nu} \nabla_{\mathbf{z}} p^3 + \mathbf{F} - \Delta_{\mathbf{z}}(\nabla_{\mathbf{z}} \varphi) - \Delta_{\mathbf{z}} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z_3}, -\frac{\partial \psi}{\partial z_2} \right) & \text{en } \omega, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{z}} \mathbf{W} = 0 & \text{en } \omega, \\ \mathbf{W} = \mathbf{0} & \text{en } \partial \omega. \end{cases} \quad (\text{A.2.11})$$

Por el Teorema 1.3.4, tendremos solución única  $(\mathbf{W}, p^3)$  (salvo una función de  $t$  y  $s_1$  para  $p^3$ ). Entonces el siguiente paso es, siguiendo (A.2.10), buscar una función  $\psi$  tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\chi}} = \frac{\partial \psi}{\partial s_2} = 0 \quad \text{en } \partial \omega, \quad (\text{A.2.12})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \psi}{\partial s_3} = \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\chi}} = \frac{\partial \varphi}{\partial s_2} \quad \text{en } \partial \omega. \quad (\text{A.2.13})$$

De (A.2.6) y (1.3.30), deducimos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial s_3} = & \left( -\frac{4R^4}{384\rho_0\nu} \left( 8\kappa \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} + 3\kappa' \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) \right. \\ & \left. + \frac{6R^3}{128\rho_0\nu} \left( 6\kappa \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} + \kappa R \frac{\partial p^0}{\partial s_1} + 3\kappa R \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} \right) \right) \sin s_2 - \frac{2\kappa\tau R^4}{128\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \cos s_2 \quad \text{en } \partial \omega, \end{aligned}$$

así que, una posible elección para  $\psi$  es

$$\begin{aligned} \psi(t, s_1, s_2, s_3) = & \frac{R^3}{384\rho_0\nu} \left( \left( 22\kappa R \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} + 6\kappa' R \frac{\partial p^0}{\partial s_1} + 108\kappa \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right) \sin s_2 \right. \\ & \left. - 6\kappa\tau R \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \cos s_2 \right) \frac{s_3(s_3^2 - 1)}{2}, \end{aligned}$$

### 300A. Cálculo detallado de algunos términos identificados en el Teorema 1.3.5

que, utilizando el cambio de variable (1.3.23), se puede escribir como:

$$\psi(t, s_1, z_2, z_3) = (\psi_2(t, s_1)z_2 + \psi_3(t, s_1)z_3) \frac{z_2^2 + z_3^2 - 1}{2}, \quad (\text{A.2.14})$$

donde,

$$\psi_3(t, s_1) = \frac{R^3}{384\rho_0\nu} \left( 22\kappa R \frac{\partial^2 p^0}{\partial s_1^2} + 6\kappa' R \frac{\partial p^0}{\partial s_1} + 108\kappa \frac{\partial R}{\partial s_1} \frac{\partial p^0}{\partial s_1} \right), \quad (\text{A.2.15})$$

$$\psi_2(t, s_1) = -\frac{\kappa\tau R^4}{64\rho_0\nu} \frac{\partial p^0}{\partial s_1}. \quad (\text{A.2.16})$$

Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z_3}, -\frac{\partial \psi}{\partial z_2} \right) &= \left( \frac{\psi_3}{2} (z_2^2 + 3z_3^2 - 1) + \psi_2 z_2 z_3, -\frac{\psi_2}{2} (3z_2^2 + z_3^2 - 1) - \psi_3 z_2 z_3 \right), \\ -\Delta_{\mathbf{z}} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z_3}, -\frac{\partial \psi}{\partial z_2} \right) &= (-4\psi_3, 4\psi_2). \end{aligned}$$

Por tanto, por (A.2.11),  $\mathbf{W}$  es solución del problema,

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{z}} \mathbf{W} = \nabla_{\mathbf{z}} q^2 + \mathbf{F} & \text{en } \omega, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{z}} \mathbf{W} = 0 & \text{en } \omega, \\ \mathbf{W} = \mathbf{0} & \text{en } \partial\omega, \end{cases} \quad (\text{A.2.17})$$

donde,

$$q^2 = \frac{R}{\rho_0\nu} p^3 - g - 4\psi_3 z_2 + 4\psi_2 z_3 + q_0^2, \quad (\text{A.2.18})$$

siendo  $q_0^2 = q_0^2(t, s_1)$  una función arbitraria de  $t$  y  $s_1$ . Por el Teorema 1.3.4, tenemos que existe solución única  $(\mathbf{W}, q^2)$  de (A.2.17) (salvo una función arbitraria de  $t$  y  $s_1$  para  $q^2$ ). Una vez hayamos obtenido  $\mathbf{W}$  y  $q^2$ , obtendremos que  $\mathbf{U}^2$  y  $p^3$  son de la siguiente forma,

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{W} + \nabla_{\mathbf{z}} \varphi + \left( \frac{\partial \psi}{\partial z_3}, -\frac{\partial \psi}{\partial z_2} \right), \quad (\text{A.2.19})$$

$$p^3 = \frac{\rho_0\nu}{R} (q^2 + g + 4\psi_3 z_2 - 4\psi_2 z_3 - q_0^2), \quad (\text{A.2.20})$$

donde  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $g$ ,  $\psi_3$  y  $\psi_2$  vienen dados, respectivamente, por las expresiones (A.2.7), (A.2.14), (1.3.35), (A.2.15) y (A.2.16).

Obtengamos entonces la expresión de  $(\mathbf{W}, q^2)$ . Para ello, recordemos que  $\mathbf{F} = (F_2, F_3)$  es polinómica en las variables  $z_2$  y  $z_3$ . Desarrollando, a partir de (1.3.36),  $F_2$  y  $F_3$  en potencias de  $z_2$  y  $z_3$ , tenemos que

$$F_2 = f_2^{00} + f_2^{20} z_2^2 + f_2^{02} z_3^2 + f_2^{22} z_2^2 z_3^2 + f_2^{40} z_2^4 + f_2^{04} z_3^4,$$

$$F_3 = f_3^{00} + f_3^{11} z_2 z_3 + f_3^{20} z_2^2 + f_3^{02} z_3^2,$$

donde  $f_\alpha^{mn}$  denota el coeficiente que multiplica  $z_2^m z_3^n$  en  $F_\alpha$ . Como  $\mathbf{F}$  es polinómica en  $z_2$  y  $z_3$ , buscamos  $\mathbf{W} = (W_2, W_3)$  y  $q^2$  que también lo sean. Supongamos que tienen la forma,

$$W_2 = (w_2^{00} + w_2^{10} z_2 + w_2^{01} z_3 + w_2^{20} z_2^2 + w_2^{11} z_2 z_3 + w_2^{02} z_3^2 + w_2^{30} z_2^3 + w_2^{21} z_2^2 z_3 + w_2^{12} z_2 z_3^2 + w_2^{03} z_3^3 + w_2^{40} z_2^4 + w_2^{31} z_2^3 z_3 + w_2^{22} z_2^2 z_3^2 + w_2^{13} z_2 z_3^3 + w_2^{04} z_3^4) (z_2^2 + z_3^2 - 1), \quad (\text{A.2.21})$$

$$W_3 = (w_3^{00} + w_3^{10} z_2 + w_3^{01} z_3 + w_3^{20} z_2^2 + w_3^{11} z_2 z_3 + w_3^{02} z_3^2 + w_3^{30} z_2^3 + w_3^{21} z_2^2 z_3 + w_3^{12} z_2 z_3^2 + w_3^{03} z_3^3 + w_3^{40} z_2^4 + w_3^{31} z_2^3 z_3 + w_3^{22} z_2^2 z_3^2 + w_3^{13} z_2 z_3^3 + w_3^{04} z_3^4) (z_2^2 + z_3^2 - 1), \quad (\text{A.2.22})$$

$$q^2 = q^{00} + q^{10} z_2 + q^{01} z_3 + q^{20} z_2^2 + q^{11} z_2 z_3 + q^{02} z_3^2 + q^{30} z_2^3 + q^{21} z_2^2 z_3 + q^{12} z_2 z_3^2 + q^{03} z_3^3 + q^{40} z_2^4 + q^{31} z_2^3 z_3 + q^{22} z_2^2 z_3^2 + q^{13} z_2 z_3^3 + q^{04} z_3^4 + q^{50} z_2^5 + q^{41} z_2^4 z_3 + q^{32} z_2^3 z_3^2 + q^{23} z_2^2 z_3^3 + q^{14} z_2 z_3^4 + q^{05} z_3^5. \quad (\text{A.2.23})$$

Sustituyendo en (A.2.17), obtenemos un sistema lineal con una única solución, por tanto  $\mathbf{W}$  y  $q^2$  pueden ser determinados por los coeficientes del campo  $\mathbf{F}$  y entonces nuestra hipótesis de la forma de las expresiones de  $\mathbf{W}$  y  $q^2$  es correcta (por unicidad de solución).

De esta forma obtenemos que,

$$\left\{ \begin{array}{ll} w_2^{00} = \frac{1}{192} (f_3^{11} - f_2^{04}) - \frac{1}{1152} f_2^{22} - \frac{1}{96} f_2^{02}, & w_2^{04} = \frac{7}{240} f_2^{04} - \frac{7}{2880} f_2^{22}, \\ w_2^{02} = \frac{5}{96} f_2^{02} + \frac{13}{960} f_2^{04} + \frac{31}{5760} f_2^{02} - \frac{5}{192} f_3^{11}, & w_2^{11} = -\frac{1}{24} f_3^{20}, \\ w_2^{20} = \frac{1}{96} f_2^{02} + \frac{7}{960} f_2^{04} - \frac{11}{5760} f_2^{22} - \frac{1}{192} f_3^{11}, & w_2^{22} = \frac{1}{480} f_2^{04} + \frac{37}{2880} f_2^{22}, \\ w_2^{40} = \frac{1}{360} f_2^{22} - \frac{1}{480} f_2^{04}, & w_3^{00} = -\frac{1}{96} f_3^{20}, \\ w_3^{11} = \frac{1}{480} f_2^{22} - \frac{1}{40} f_2^{04} - \frac{1}{24} f_2^{02} + \frac{1}{48} f_3^{11}, & w_3^{02} = \frac{1}{96} f_3^{20}, \\ w_3^{13} = -\frac{1}{80} f_2^{04} - \frac{1}{240} f_2^{22}, & w_3^{20} = \frac{5}{96} f_3^{20}, \\ w_3^{31} = \frac{1}{80} f_2^{04} - \frac{1}{60} f_2^{22}, & \end{array} \right. \quad (\text{A.2.24})$$

mientras que

$$\left\{ \begin{array}{l} w_2^{01} = w_2^{03} = w_2^{10} = w_2^{12} = w_2^{13} = w_2^{21} = w_2^{30} = w_2^{31} = 0, \\ w_3^{01} = w_3^{03} = w_3^{04} = w_3^{10} = w_3^{12} = w_3^{21} = w_3^{22} = w_3^{30} = w_3^{40} = 0, \end{array} \right. \quad (\text{A.2.25})$$

### 302A. Cálculo detallado de algunos términos identificados en el Teorema 1.3.5

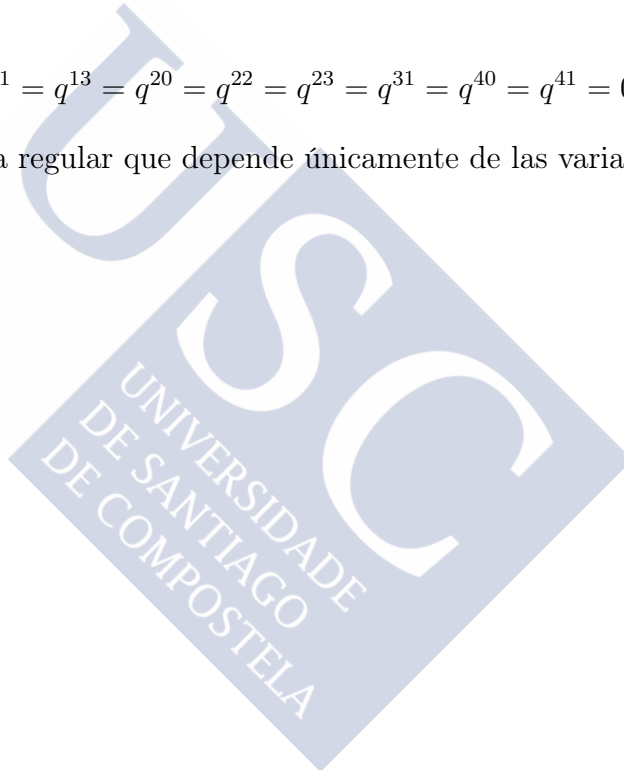
y

$$\left\{ \begin{array}{ll} q^{10} = \frac{1}{12}f_3^{11} - \frac{1}{6}f_2^{02} - \frac{1}{16}f_2^{04} - \frac{1}{96}f_2^{22} - f_2^{00}, & q^{03} = \frac{1}{12}f_3^{20} - \frac{1}{3}f_3^{02}, \\ q^{12} = \frac{3}{40}f_2^{22} - \frac{3}{20}f_2^{04} - \frac{1}{4}f_2^{02} - \frac{3}{8}f_3^{11}, & q^{01} = -f_3^{00} - \frac{1}{6}f_3^{20}, \\ q^{14} = -\frac{1}{16}f_2^{04} - \frac{5}{96}f_2^{22}, & q^{21} = -\frac{1}{4}f_3^{20}, \\ q^{30} = \frac{1}{12}f_2^{02} + \frac{1}{20}f_2^{04} - \frac{1}{3}f_2^{20} - \frac{1}{40}f_2^{22} - \frac{1}{24}f_3^{11}, & q^{32} = \frac{1}{8}f_2^{04} - \frac{11}{48}f_2^{22}, \\ q^{50} = \frac{11}{480}f_2^{22} - \frac{1}{80}f_2^{04} - \frac{1}{5}f_2^{40}, & \end{array} \right. \quad (\text{A.2.26})$$

siendo

$$q^{02} = q^{04} = q^{05} = q^{11} = q^{13} = q^{20} = q^{22} = q^{23} = q^{31} = q^{40} = q^{41} = 0, \quad (\text{A.2.27})$$

y  $q^{00}$  una función arbitraria regular que depende únicamente de las variables  $t$  y  $s_1$ .



# Bibliografía

- [1] L. J. Álvarez-Vázquez and J. M. Viaño. Asymptotic modelling of a nonsymmetric beam. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 126(1):433–447, 2000.
- [2] K. Amedoji, G. Bayada, and M. Chambat. On the unsteady Navier-Stokes equations in a time-moving domain with velocity-pressure boundary conditions. *Nonlinear Analysis*, 49:565–587, 2002.
- [3] C. Amrouche and V. Girault. Descomposition of vector spaces and applications to the Stokes problem in arbitrary dimensions. *Czech. Math. J.*, 44:109–140, 1994.
- [4] N. Arada, M. Pires, and A. Sequeira. Viscosity effects on flow of generalized Newtonian fluid through curved pipes. *Computers and Mathematics with Applications*, 53:625–646, 2007.
- [5] A. Bermúdez and J. M. Viaño. Une justification des équations de la thermoélasticité de poutres à section variable par des méthodes asymptotiques. *Math. Model. Numer. Anal.*, 18(4):347–376, 1984.
- [6] J. M. Bernard. Time-dependent Stokes and Navier-Stokes problems with boundary conditions involving pressure, existence and regularity. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 4:804–839, 2003.
- [7] I. Bock. On von Kármán equations for viscoelastic plates. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 63(1):277 – 282, 1995.
- [8] I. Bock. On large deflections of viscoelastic plates. *Mathematics and Computers in Simulation*, 50:135–143, 1999.
- [9] I. Bock and J. Jarušek. Unilateral dynamic contact of viscoelastic von Kármán plates. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 16(1):175–187, 2006.
- [10] I. Bock and J. Jarušek. *System modeling and optimization*. Springer, Heidelberg, 2013.
- [11] I. Bock and J. Lovíšek. On unilaterally supported viscoelastic von Kármán plates with a long memory. *Mathematics and Computers in Simulation*, 61:399–407, 2003.

- [12] M. E. Bogovski. Solution of the first boundary problem for the equation of continuity of an incompressible medium. *Soviet. Math. Dokl.*, 20:1094–1098, 1979.
- [13] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications*. Masson, 1983.
- [14] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2011.
- [15] A. Brillard, J. E. Amrani, and M. E. Jarroudi. Derivation of a contact law between a free fluid and thin porous layers via asymptotic analysis methods. *Applicable Analysis*, 92(4):665–689, 2013.
- [16] M. Campo, J. R. Fernández, Á. Rodríguez-Arós, and J. M. Rodríguez. Analysis of a dynamic viscoelastic-viscoplastic piezoelectric contact problem. *ESAIM: M2AN*, 51:565–586, 2017.
- [17] J. Carson and R. V. Loon. An implicit solver for 1D arterial network models. *Int. J. Numer. Meth. Biomed. Engng.*, 33:e2837, 2017.
- [18] G. Castiñeira, E. Marušić-Paloka, I. Pažanin, and J. M. Rodríguez. Rigorous justification of the asymptotic model describing a curved-pipe flow in a time-dependent domain. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, (aceptado).
- [19] G. Castiñeira and J. M. Rodríguez. Asymptotic analysis of a viscous flow in a curved pipe with elastic walls. *Trends in Differential Equations and Applications*, pages 73–87, 2016.
- [20] G. Castiñeira and Á. Rodríguez-Arós. On the justification of the viscoelastic generalized membrane shell equations. *Preprint*.
- [21] G. Castiñeira and Á. Rodríguez-Arós. Mathematical justification of a viscoelastic elliptic membrane problem. *Comptes Rendus Mécanique*, 345:824–831, 2017.
- [22] G. Castiñeira and Á. Rodríguez-Arós. Linear viscoelastic shells: an asymptotic approach. *Asymptotic Analysis*, 107:169–201, 2018.
- [23] G. Castiñeira and Á. Rodríguez-Arós. On the justification of the viscoelastic elliptic membrane shell equations. *Journal of Elasticity*, 130:85–113, 2018.
- [24] G. Castiñeira and Á. Rodríguez-Arós. On the justification of the viscoelastic flexural shell equations. *Computers and Mathematics with Applications*, (aceptado).
- [25] L. C. Cerny and W. P. Walawender. Leonhardi Euleri’s “Principia pro motu sanguinis per arterias determinando”. *Journal of Biological Physics*, 2(1):41–56, Mar 1974.
- [26] A. Chambolle, B. Desjardins, M. J. Esteban, and C. Grandmont. Existence of weak solutions for the unsteady interaction of viscous fluid with an elastic plate. *J. math. fluid mech.*, 7:368–404, 2005.

- [27] C. H. A. Cheng, D. Coutand, and S. Shkoller. Navier-Stokes equations interacting with a nonlinear elastic biofluid shell. *SIAM J. Math. Anal.*, 39(3):742–800, 2007.
- [28] C. H. A. Cheng and S. Shkoller. The interaction of the 3D Navier-Stokes equations with a moving nonlinear Koiter elastic shell. *SIAM J. Math. Anal.*, 42(3):1094–1155, 2010.
- [29] P. G. Ciarlet. *Mathematical elasticity. Vol. II: Theory of plates*, volume 27 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1997.
- [30] P. G. Ciarlet. *Mathematical elasticity. Vol. III: Theory of shells*, volume 29 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2000.
- [31] P. G. Ciarlet and P. Destuynder. A justification of the two-dimensional linear plate model. *J. Mécanique*, 18(2):315–344, 1979.
- [32] P. G. Ciarlet and V. Lods. Asymptotic analysis of linearly elastic shells: "generalized membrane shells". *Journal of Elasticity*, 43:147–188, 1996.
- [33] P. G. Ciarlet and V. Lods. Asymptotic analysis of linearly elastic shells. I. Justification of membrane shell equations. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 136:119–161, 1996.
- [34] P. G. Ciarlet and V. Lods. Asymptotic analysis of linearly elastic shells. II. Justification of flexural shell equations. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 136:119–161, 1996.
- [35] P. G. Ciarlet and V. Lods. Asymptotic analysis of linearly elastic shells. III. Justification of Koiter's shell equations. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 136:191–200, 1996.
- [36] P. G. Ciarlet and V. Lods. On the ellipticity of linear membrane shell equations. *J. Math. Pures Appl.*, 75:107–124, 1996.
- [37] P. G. Ciarlet and E. Sánchez-Palencia. Un théorème d'existence et d'unicité pour les équations des coques membranaires. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique*, 317(8):801–805, 1993.
- [38] P. G. Ciarlet and E. Sánchez-Palencia. An existence and uniqueness theorem for the two-dimensional linear membrane shell equations. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 75(1):51–67, 1996.
- [39] A. Cimetière, G. Geymonat, H. Le Dret, A. Raoult, and Z. Tutek. Asymptotic theory and analysis for displacements and stress distribution in nonlinear elastic straight slender rods. *J. Elasticity*, 19(2):111–161, 1988.



- [40] C. Collard and B. Miara. Asymptotic analysis of the stresses in thin elastic shells. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 148:233–264, 1999.
- [41] F. N. V. de Vosse. Mathematical modelling of the cardiovascular system. *Journal of Engineering Mathematics*, 47:175–183, 2003.
- [42] W. Dean. The stream-line motion of fluid in a curved pipe (second paper). *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 5(30):673–695, 1928.
- [43] W. R. Dean. Note on the motion of fluid in a curved pipe. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 4(20):208–223, 1927.
- [44] B. Desjardins, M. J. Esteban, C. Grandmont, and P. L. Tallec. Weak solutions for a fluid-elastic structure interaction model. *Revista Matemática Complutense*, 2:523–538, 2001.
- [45] P. Destuynder. *Sur une justification des modèles de plaques et de coques par les méthodes asymptotiques*. PhD thesis, Univ. P. et M. Curie, Paris, 1980.
- [46] H. L. Dret. *Problèmes variationnels dans les multi-domaines: Modélisation des jonctions et applications*. Masson, 1991.
- [47] D. Dupuy, G. Panasenko, and R. Stavre. Asymptotic solution for a micropolar flow in a curvilinear channel. *Z. Angew. Math. Mech.*, 88:793–807, 2008.
- [48] G. Duvaut and J.-L. Lions. *Inequalities in Mechanics and Physics*. Springer Berlin, 1976.
- [49] R. Fares, G. Panasenko, and R. Stavre. A viscous fluid flow through a thin channel with mixed rigid-elastic boundary: variational and asymptotic analysis. *Abstract and Applied Analysis*, pages 1–47, 2012.
- [50] I. N. Figueiredo and C. M. F. Leal. A piezoelectric anisotropic plate model. *Asymptotic Analysis*, 44:327–346, 2005.
- [51] I. N. Figueiredo and C. M. F. Leal. A generalized piezoelectric bernoulli-navier anisotropic rod model. *Journal of Elasticity*, 85(2):85–106, 2006.
- [52] I. N. Figueiredo and L. Trabuco. Asymptotic model of a nonlinear adaptive elastic rod. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 9:331–354, 2004.
- [53] L. Formaggia, J. F. Gerbeau, F. Nobile, and A. Quarteroni. On the coupling of 3D and 1D Navier-Stokes equations for flow problems in compliant vessels. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 191:561–582, 2001.
- [54] L. Formaggia, D. Lamponi, and A. Quarteroni. One-dimensional models for blood flow in arteries. *Journal of Engineering Mathematics*, 47:251–276, 2003.

- [55] L. Formaggia and A. Quarteroni. *Mathematical Modelling and Numerical Simulation of the Cardiovascular System. Handbook of Numerical Analysis. Vol. XII: Special Volume Computational Models for the Human Body*. Elsevier, 2004.
- [56] L. Fushan. Asymptotic analysis of linearly viscoelastic shells. *Asymptotic Analysis*, 36:21–46, 2003.
- [57] L. Fushan. Asymptotic analysis of linearly viscoelastic shells - justification of flexural shell equations. *Chinese Annals of Mathematics*, 28A:71–84, 2007.
- [58] L. Fushan. Asymptotic analysis of linearly viscoelastic shells - justification of Koiter's shell equations. *Asymptotic Analysis*, 54:51–70, 2007.
- [59] L. Fushan. A justification of two-dimensional nonlinear viscoelastic shells model. *Abstract and Applied Analysis*, 2012.
- [60] G. P. Galdi. *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations. Steady- State Problems*. Springer, 2011.
- [61] G. P. Galdi, K. Pileckas, and A. L. Silvestre. On the unsteady Poiseuille flow in a pipe. *Z. Angew. Math. Phys*, 58:994–1007, 2007.
- [62] G. P. Galdi and A. M. Robertson. On flow of a Navier-Stokes fluid in curved pipes. Part I: Steady flow. *Applied Mathematics Letters*, 18:1116–1124, 2005.
- [63] G. P. Galdi and A. M. Robertson. The relation between flow rate and axial pressure gradient for time-periodic poiseuille flow in a pipe. *J. math. fluid mech.*, 7:215–223, 2005.
- [64] D. Gammack and P. E. Hydon. Flow in pipes with non-uniform curvature and torsion. *J. Fluid Mech.*, 433:357–382, 2001.
- [65] M. Germano. On the effect of torsion on a helical pipe flow. *J. Fluid Mech.*, 125:1–8, 1982.
- [66] M. Germano. The dean equations extended to a helical pipe flow. *J. Fluid Mech.*, 203:289–305, 1989.
- [67] X. Guan and T. B. Martonen. Simulation of flow in curved tubes. *Aerosol Science and Technology*, 26:485–504, 1997.
- [68] K. M. Guleren. Numerical study of the turbulent flow in strongly curved stationary and rotating u-ducts. *International journal for numerical methods in fluids*, 64:23–43, 2010.
- [69] W. Han, M. Shillor, and M. Sofonea. Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic problem with normal compliance, friction and damage. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 137(2):377 – 398, 2001.

- [70] W. Han and M. Sofonea. Time-dependent variational inequalities for viscoelastic contact problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 136:369 – 387, 2001.
- [71] W. Han and M. Sofonea. *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*. Studies in Advanced Mathematics, American Mathematical Society-Intl., Press, 2002.
- [72] F. Hecht. New development in freefem++. *Journal of Numerical Mathematics*, 20(3-4):251–265, 2013.
- [73] T. J. Hüttl and R. Friedrich. Direct numerical simulation of turbulent flow in curved and helical coiled pipes. *Computers and Fluids*, 30:591–605, 2001.
- [74] H. Irigo and J. M. Viaño. Error estimation in the Bernoulli-Navier model for elastic rods. *Asymptot. Anal.*, 21(1):71–87, 1999.
- [75] H. Irigo, J. M. Viaño, and Á. Rodríguez-Arós. Asymptotic derivation of frictionless contact models for elastic rods on a foundation with normal compliance. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 14(1), 2013.
- [76] H. Ito. Flow in curved pipes. *JSME International Journal*, 30:543–552, 04 1987.
- [77] J. Jarušek. Contact problems with given time-dependent friction force in linear viscoelasticity. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 31 (2):257–262, 1990.
- [78] W. Jitchote and A. M. Robertson. Flow of second order fluid in curved pipes. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 90:91–116, 2000.
- [79] L. C. Junqueira and J. Carneiro. *Histología básica*. Masson, 12<sup>th</sup> edition, 2015.
- [80] M. O. Khan, D. A. Steinman, and K. Valen-Sendstad. Non-Newtonian versus numerical rheology: Practical impact of shear-thinning on the prediction of stable and unstable flow in intracranial aneurysms. *Int. J. Numer. Meth. Biomed. Engng.*, 33:e2836, 2017.
- [81] Y. Komai and K. Tanishita. Fully developed intermittent flow in a curved tube. *J. Fluid Mech.*, 347:263–287, 1997.
- [82] O. A. Ladyzhenskaya. *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. Gordon and Breach Science, 1963.
- [83] J. Lemaitre and J. L. Chaboche. *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press, 1990.
- [84] D. Lengeler and M. Ružička. Weak solutions for an incompressible Newtonian fluid interacting with a Koiter type shell. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 211:205–255, 2014.

- [85] X. Li-ming. Asymptotic analysis of dynamic problems for linearly elastic shells - justification of equations for dynamic membrane shells. *Asymptotic Analysis*, 17:121–134, 1998.
- [86] X. Li-ming. Asymptotic analysis of dynamic problems for linearly elastic shells - justification of equations for dynamic flexural shells. *Chinese Annals of Mathematics*, 22B:13–22, 2001.
- [87] X. Li-ming. Asymptotic analysis of dynamic problems for linearly elastic shells - justification of equations for dynamic Koiter shells. *Chinese Annals of Mathematics*, 22B:267–274, 2001.
- [88] J.-L. Lions. *Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 323. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.
- [89] J. L. Lions and E. Magenes. *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.
- [90] A. Louveau, I. Smirnov, T. J. Keyes, J. D. Eccles, S. J. Rouhani, J. D. Peske, N. C. Derecki, D. Castle, J. W. Mandell, S. L. Kevin, T. H. Harris, and J. Kipnis. Structural and functional features of central nervous system lymphatics. *Nature*, 523:337–341, 2015.
- [91] G. Lukaszewicz. On the Navier-Stokes equations in time dependent domain and with boundary conditions involving pressure. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, 4:529–550, 1997.
- [92] D. G. Lynch, S. L. Waters, and T. J. Pedley. Flow in a tube with non-uniform, time-dependent curvature: governing equations and simple examples. *J. Fluid Mech.*, 323:237–265, 1996.
- [93] W. H. Lyne. Unsteady viscous flow in a curved pipe. *J. Fluid. Mech.*, 45:13–31, 1970.
- [94] C. Mardare. Asymptotic analysis of linearly elastic shells: error estimates in the membrane case. *Asymptot. Anal.*, 17:31–51, 1998.
- [95] C. Mardare. The generalized membrane problem for linearly elastic shells with hyperbolic or parabolic middle surface. *Journal of Elasticity*, 51:145–165, 1998.
- [96] S. Marušić. The asymptotic behaviour of quasi-Newtonian flow through a very thin or a very long curved pipe. *Asymptotic Analysis*, 26:73–89, 2001.
- [97] S. Marušić and E. Marušić-Paloka. Two-scale convergence for thin domains and its applications to some lower-dimensional models in fluid mechanics. *Asymptotic Analysis*, 23:23–57, 2000.

- [98] E. Marušić-Paloka. The effects of flexion and torsion on a fluid flow through a curved pipe. *Appl. Math. Optim.*, 44:245–272, 2001.
- [99] E. Marušić-Paloka. Rigorous justification of the Kirchhoff law for junction of thin pipes filled with viscous fluid. *Asymptotic Analysis*, 22:51–66, 2003.
- [100] E. Marušić-Paloka and I. Pažanin. Effective flow of a viscous liquid through a helical pipe. *Comptes Rendus Mecanique*, 332:973–978, 2004.
- [101] E. Marušić-Paloka and I. Pažanin. Fluid flow through a helical pipe. *Z. angew. Math. Phys.*, 58:81–89, 2007.
- [102] E. Marušić-Paloka and I. Pažanin. A note on the pipe flow with a pressure-dependent viscosity. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 197:5–10, 2013.
- [103] E. Marušić-Paloka and M. Starčević. Asymptotic analysis of an isothermal gas flow through a long orthing pipe. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 19(4):631–649, 2009.
- [104] M.-L. Mascarenhas. Homogenisation of a viscoelastic equation with non-periodic coefficients. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 106:143–160, 1987.
- [105] B. Miara and E. Sánchez-Palencia. Asymptotic analysis of linearly elastic shells. *Asymptotic Anal.*, 12:41–54, 1996.
- [106] S. Migórski and A. Ochal. Hemivariational inequality for viscoelastic contact problem with slip-dependent friction. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 61:135 – 161, 2005.
- [107] S. Migórski, A. Ochal, and M. Sofonea. *Nonlinear Inclusions and Hemivariational Inequalities: Models and Analysis of Contact Problems*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2014.
- [108] I. Moise, R. Temam, and M. Ziane. Asymptotic analysis of the Navier-Stokes equations in thin domains. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 10:249–282, 1997.
- [109] J. E. Muñoz-Rivera and G. Perla-Menzala. Decay rates of solutions to a von Kármán system for viscoelastic plates with memory. *Quart. Appl. Math.*, 57 (1):181–200, 1999.
- [110] S. Murata, Y. Miyake, and T. Inaba. Laminar flow in a curved pipe with varying curvature. *J. Fluid Mech.*, 73:735–752, 1976.
- [111] L. J. Myers and W. L. Capper. The effect of arterial curvature on doppler velocity blood flow waveform indices. *Proceedings of the 22nd Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, 2:1121–1124, 2000.



- [112] F. Nobile and C. Vergara. An effective fluid-structure interaction formulation for vascular dynamics by generalized Robin conditions. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 30(2):731–763, 2008.
- [113] G. Panasenko and K. Pileckas. Flow in a tube structure: Equations on the graph. *Journal of Mathematical Physics*, 55, 2014.
- [114] G. Panasenko and K. Pileckas. Asymptotic analysis of the non-steady Navier-Stokes equations in a tube structure. I. The case without boundary-layer-in-time. *Nonlinear Analysis*, 122:125–168, 2015.
- [115] G. Panasenko and K. Pileckas. Asymptotic analysis of the non-steady Navier-Stokes equations in a tube structure. II. General case. *Nonlinear Analysis*, 125:582–607, 2015.
- [116] G. Panasenko and K. Pileckas. Divergence equation in thin-tube structures. *Applicable Analysis*, 94(7):1450–1459, 2015.
- [117] G. Panasenko and R. Stavre. Asymptotic analysis of a periodic flow in a thin channel with visco-elastic wall. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 85:558–579, 2006.
- [118] G. Panasenko and R. Stavre. Asymptotic analysis of the Stokes flow in a cylindrical elastic tube. *Applicable Analysis*, 91(11):1999–2027, 2012.
- [119] G. Panasenko and R. Stavre. Asymptotic analysis of a viscous fluid-thin plate interaction: Periodic flow. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 24(9):1781–1822, 2014.
- [120] G. Panasenko and R. Stavre. Viscous fluid-thin cylindrical elastic layer interaction: asymptotic analysis. *Applicable Analysis*, 93(10):2032–2056, 2014.
- [121] G. Panasenko and R. Stavre. Viscous fluid-thin cylindrical elastic body interaction: asymptotic analysis on contrasting properties. *Applicable Analysis*, (Online):1–55, 2018.
- [122] T. Passerini, M. de Luca, L. Formaggia, A. Quarteroni, and A. Veneziani. A 3D/1D geometrical multiscale model of cerebral vaculature. *J. Eng. Math.*, 64:319–330, 2009.
- [123] I. Pažanin. Asymptotic behaviour of micropolar fluid flow through a curved pipe. *Acta Appl. Math.*, 116:1–25, 2011.
- [124] I. Pažanin. Investigation of micropolar fluid flow in a helical pipe via asymptotic analysis. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 18:528–540, 2013.
- [125] I. Pažanin and M. Radulović. Asymptotic approximation of the nonsteady micropolar fluid flow through a circular pipe. *Mathematical Problems in Engineering*, 2018:16, 2018.

- [126] T. J. Pedley. Mathematical modelling of arterial fluid dynamics. *Journal of Engineering Mathematics*, 47:419–444, 2003.
- [127] A. C. Pipkin. *Lectures in Viscoelasticity Theory, Applied Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1972.
- [128] A. Qiao, Y. Liu, Y. Chang, and T. Matsuzawa. Computational study of stented aortic arch aneurysms. 3:2287–2290, 02 2005.
- [129] A. Quarteroni and L. Formaggia. Mathematical modelling and numerical simulation of the cardiovascular system. In *Computational Models for the Human Body*, volume 12 of *Handbook of Numerical Analysis*, pages 3 – 127. Elsevier, 2004.
- [130] A. Quarteroni, M. Tuveri, and A. Veneziani. Computational vascular fluid dynamics: problems, models and methods. *Comput. Visual Sci.*, 2:163–197, 2000.
- [131] A. Quarteroni and A. Veneziani. Analysis of a geometrical multiscale model based on the coupling of ODE’s and PDE’s for blood flow simulations. *Multiscale Model. Simul.*, 1(2):173–195, 2003.
- [132] N. Riley. Unsteady fully-developed flow in a curved pipe. *Journal of Engineering Mathematics*, 34:131–141, 1998.
- [133] A. M. Robertson and A. Sequeira. A director theory approach for modeling blood flow in the arterial system: an alternative to classical 1D models. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 15(6):871–906, 2005.
- [134] J. M. Rodríguez. *Una teoría asintótica en vigas elásticas de perfil fino y su justificación matemática*. PhD thesis, Universidade de Santiago de Compostela, 1994.
- [135] J. M. Rodríguez and J. M. Viaño. Asymptotic analysis of Poisson’s equation in a thin domain and its application to thin-walled beams and tubes. *Math. Methods Appl. Sci.*, 21(3):187–226, 1998.
- [136] Á. Rodríguez-Arós. Mathematical justification of an elastic elliptic membrane obstacle problem. *Comptes Rendus Mecanique*, 345:153–157, 2017.
- [137] Á. Rodríguez-Arós. Models of elastic shells in contact with a rigid foundation: An asymptotic approach. *Journal of Elasticity*, 130(2):211–237, Feb 2018.
- [138] Á. Rodríguez-Arós, M. Sofonea, and J. M. Viaño. Numerical analysis of a frictional contact problem for viscoelastic materials with long-term memory. *Numerical mathematics and advanced applications*, pages 1099–1107, 2006.
- [139] Á. Rodríguez-Arós and J. M. Viaño. Mathematical justification of viscoelastic beam models by asymptotic methods. *J. Math. Anal. Appl.*, 370(2):607–634, 2010.



- [140] Á. Rodríguez-Arós and J. M. Viaño. Mathematical justification of Kelvin-Voigt beam models by asymptotic methods. *Z. Angew. Math. Phys*, 63(3):529–556, 2012.
- [141] Á. Rodríguez-Arós and J. M. Viaño. A bending-stretching model in adhesive contact for elastic rods obtained by using asymptotic methods. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 22:632–644, 2015.
- [142] E. Sanchez-Palencia. *Lecture Notes in Physics: Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.
- [143] S. J. Sherwin, V. Franke, J. Peiró, and K. Parker. One-dimensional modelling of a vascular network in space-time variables. *Journal of Engineering Mathematics*, 47:217–250, 2003.
- [144] M. Shillor, M. Sofonea, and J. Telega. *Models and Analysis of Quasistatic Contact, Lecture Notes in Physics*, volume 655. Springer Berlin, 2004.
- [145] P. Singh. Entry flow in a curved pipe. *J. Fluid Mech.*, 65:571–539, 1974.
- [146] S. Slicaru. *Quelques résultats dans la théorie des coques linéairement élastiques à surface moyenne uniformément elliptique ou compacte sans bord*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1998.
- [147] F. T. Smith. Pulsatile flow in curved pipes. *J. Fluid Mech.*, 71(1):15–42, 1975.
- [148] F. T. Smith. Fluid flow into a curved pipe. *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 351:71–87, 1976.
- [149] F. T. Smith, R. Purvis, S. C. R. Dennis, M. A. Jones, N. C. Ovenden, and M. Tadjfar. Fluid flow through various branching tubes. *Journal of Engineering Mathematics*, 47:277–298, 2003.
- [150] M. Sofonea and A. Matei. *Mathematical Models in Contact Mechanics. Lecture Note Series*, volume 398. London Mathematical Society, 2012.
- [151] B. N. Steele, J. Wan, J. P. Ku, T. J. R. Hughes, and C. A. Taylor. In vivo validation of a one-dimensional finite-element method for predicting blood flow in cardiovascular bypass grafts. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 50:649–656, 2003.
- [152] R. Temam. *Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis*. AMS Chelsea Publishing, 2000.
- [153] R. Temam and M. Ziane. Navier-Stokes equations in three-dimensional thin domains with various boundary conditions. *Advances in Differential Equations*, 1(4):499–546, 1996.
- [154] E. F. Toro, F. Borgioli, Q. Zhang, C. Contarino, L. O. Müller, and A. Bruno. Inner-ear circulation in humans is disrupted by extracranial venous outflow structures: Implications for Ménière’s disease. *Veins and Lymphatics*, 7, 2018.

- [155] L. Trabucho and J. M. Viaño. A derivation of generalized Saint-Venant's torsion theory from three-dimensional elasticity by asymptotic expansion methods. *Applicable Analysis*, 31(1-2):129–148, 1988.
- [156] L. Trabucho and J. M. Viaño. Existence and characterization of higher-order terms in an asymptotic expansion method for linearized elastic beams. *Asymptotic Anal.*, 2(3):223–255, 1989.
- [157] L. Trabucho and J. M. Viaño. A new approach of Timoshenko's beam theory by asymptotic expansion method. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 24(5):651–680, 1990.
- [158] L. Trabucho and J. M. Viaño. Mathematical modelling of rods. In *Handbook of numerical analysis, Vol. IV*, Handb. Numer. Anal., IV, pages 487–974. North-Holland, Amsterdam, 1996.
- [159] Z. Tutek and I. Aganović. A justification of the one-dimensional linear model of elastic beam. *Math. Methods Appl. Sci.*, 8(4):502–515, 1986.
- [160] S. Čanić, D. Lamponi, A. Mikelić, and J. Tambača. Self-consistent effective equations modeling blood flow medium-to-large compliant arteries. *Multiscale Model. Simul.*, 3(3):559–596, 2005.
- [161] S. Čanić and A. Mikelić. Effective equations modeling the flow of a viscous incompressible fluid through a long elastic tube arising in the study of blood flow through small arteries. *SIAM J. Applied Dynamical Systems*, 2(3):431–463, 2003.
- [162] J. M. Viaño, Á. Rodríguez-Arós, and M. Sofonea. Asymptotic derivation of quasistatic frictional contact models with wear for elastic rods. *J. Math. Anal. Appl.*, 401(2):641–653, 2013.
- [163] S. L. Waters and T. J. Pedley. Oscillatory flow in a tube of time-dependent curvature. Part 1. Perturbation to flow in a stationary curved tube. *J. Fluid Mech.*, 383:327–352, 1999.
- [164] Y. Wu and X. C. Cai. A fully implicit domain decomposition based ALE framework for three-dimensional fluid-structure interaction with application in blood flow computation. *Journal of Computational Physics*, 258:524–537, 2014.
- [165] N. Xiao, J. Alastruey, and C. A. Figueroa. A systematic comparison between 1D and 3D hemodynamics in compliant arterial models. *Int. J. Numer. Meth. Biomed. Engng.*, 30:204–231, 2013.
- [166] L.-S. Yao and S. A. Berger. Entry flow in a curved pipe. *J. Fluid Mech.*, 67(1):177–196, 1975.
- [167] K. Yosida. *Functional Analysis*. Springer-Verlag, 1966.

# Índice alfabético

- área
  - de la sección transversal, 21
  - de la sección transversal de referencia, 21
- acotaciones *a priori*, 88
- aplicación proyección, 118
- aproximación asintótica, 36, 74
- base
  - de Frenet-Serret, 8
  - euclídea canónica, 113, 250
  - ortonormal, 13
- cambio de variable, 10
- campo
  - de desplazamientos, 113, 116, 156, 199, 225, 250, 251
  - de presiones, 9, 19
  - de velocidades, 9, 19
  - tensorial de deformaciones, 113
  - tensorial de tensiones, 113, 177, 219, 242
- campos vectoriales escalados, 118
- coeficientes
  - de Lamé, 112, 117, 250
  - de viscosidad, 112, 117, 250
- condición
  - de compatibilidad, 44, 78
  - de contorno, 9, 18, 20
  - de contorno de fijación, 116
  - de tipo Dirichlet, 113
  - de tipo Neumann, 113
  - inicial, 43, 44, 77, 113, 117, 122, 133, 157, 200, 227
- condiciones de contorno, 43, 44, 77, 95
- configuración de referencia, 115, 251
- convención de suma, 8, 112
- coordenadas
  - cartesianas locales, 25
  - curvilíneas, 114, 116, 251
  - polares, 25
- correctores de capa límite
  - en espacio, 46, 59, 60
  - en espacio-tiempo, 46
  - en tiempo, 46
- cuerpo deformable, 112
- curvatura, 15
- densidad
  - de fuerzas, 9, 18
  - de fuerzas
    - de superficie, 113, 117
    - volumétricas, 113, 117
  - del cuerpo, 251
  - del fluido, 9
- derivadas covariantes de primer orden, 118, 122
- desarrollo asintótico, 19, 132
- desigualdad
  - de Korn en coordenadas curvilíneas, 125
  - de tipo Korn, 153, 191, 224
  - de tipo Korn para membranas elípticas, 153
  - de tipo Poincaré, 80
  - de Young, 126, 255, 258
- determinante del jacobiano del cambio de variable, 11
- dominio de referencia, 10, 17, 18, 118
- ecuación
  - de equilibrio, 9, 17, 113
  - de la incompresibilidad, 9, 18

- ecuaciones  
 de Navier-Stokes, 8, 9  
 en potencias de  $\varepsilon$ , 20  
 ecuaciones de una lámina  
 flexural viscoelástica, 135  
 ecuaciones de una lámina  
 membrana viscoelástica, 134  
 elipticidad de los tensores bidimensionales, 147  
 entrada y salida de la tubería, 42  
 espacio de las soluciones admisibles, 113, 116  
 espacio de soluciones admisibles, 122  
 espacios compleción, 192  
 estimaciones del error, 95  
 estimaciones del error  
 relativo, 104  
 existencia y unicidad de solución, 125, 129  
 fórmulas de Frenet-Serret, 15  
 fenómenos de capa límite, 46  
 flujo  
 a través de la sección transversal, 21  
 de Poiseuille, 37  
 escalado, 21  
 secundario, 39  
 forma bilineal  
 X-elíptica, 129  
 continua, 129  
 frontera lateral, 8, 10, 42  
 fronteras de entrada y salida, véase también  
 entrada y salida de la tubería 44  
 fuerzas  
 admisibles, 196  
 aplicadas, 20, 121, 123  
 función radio, 8, 36, 47  
 identidad de polarización, 195  
 igualdad del paralelogramo, 194  
 instante inicial, véase también condición  
 inicial 95  
 inversa del cambio de variable, 13  
 Jacobiano, 14  
 Kelvin-Voigt, 112, 250  
 línea media de la tubería, 8  
 lámina  
 flexural viscoelástica, 224, 225  
 viscoelástica, 114, 115, 251  
 lámina flexural viscoelástica, 223  
 lámina viscoelástica, 251  
 láminas  
 de tipo membrana, 148  
 flexurales, 148  
 ley  
 algebraica elástica, 37  
 de conservación de la masa, 24  
 de pared, 36  
 membrana  
 elíptica viscoelástica, 154, 156  
 generalizada del primer tipo, 193  
 generalizada del segundo tipo, 194  
 generalizada viscoelástica, 192, 197, 199  
 movimientos radiales, 9  
 parámetro pequeño, 7, 114  
 paredes rígidas, 36  
 partes de la frontera, 115, 118  
 periodo de observación, 8, 112, 250  
 primera forma fundamental, 114  
 principio de los trabajos virtuales, 114  
 Principio de Saint-Venant, 48  
 problema  
 de Leray, 47  
 de Leray modificado, 48, 55  
 de Stokes, 24  
 de valor en la frontera, 82, 117, 122  
 dinámico bidimensional, 261  
 físico, 113, 250  
 variacional  
 en coordenadas cartesianas, 113, 251  
 en coordenadas curvilíneas, 116, 251  
 escalado, 122  
 promedio transversal, 150  
 símbolos de Christoffel, 115, 120

- segunda forma fundamental, 114  
solución asintótica , véase también aproximación asintótica 37  
subconjunto  $\gamma_0$ , 115  
superficie media, 115, 251
- término de memoria  
  corta, 147  
  larga, 147
- tensor  
  de cambio de curvatura, 134  
  de cambio de métrica, 134  
  de curvatura, 114  
  de deformaciones, 117, 119  
  de tensiones, 117, 121  
  métrico, 114, 115
- tensores  
  bidimensionales de cuarto orden, 135  
  de cuarto orden de elasticidad y viscosidad, 117  
  de elasticidad y viscosidad, 113  
  de elasticidad y viscosidad , véase también tensores de cuarto orden de elasticidad y viscosidad 120  
  uniformemente definidos positivos, 120
- torsión, 15
- tubería curva, 7
- vector  
  de las incógnitas, 116, 118  
  normal exterior unitario, 11, 112  
  normal unitario, 114  
  unitario exterior radial, 18
- viscosidad cinemática, 9